

Otimização Topológica de Estruturas Termoelásticas Tridimensionais

José Alves de Oliveira Neto

Natal-RN, Setembro de 2011.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

Otimização Topológica de Estruturas Termoelásticas
Tridimensionais

Dissertação submetida à Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

José Alves de Oliveira Neto

Natal-RN, Setembro de 2011

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

Otimização Topológica de Estruturas Termoelásticas
Tridimensionais

José Alves de Oliveira Neto

Dissertação submetida à Banca Examinadora como parte
dos requisitos necessários à obtenção do título de

Mestre em Engenharia

Especialidade Engenharia Mecânica

João Carlos Arantes Costa Júnior, Dr.
Orientador

Clodomiro Alves Júnior, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-grad. em Eng. Mecânica

Banca Examinadora:

Daniel Nelson Maciel, Dr.
Membro da Banca Examinadora

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Membro da Banca Examinadora

Raimundo Carlos Silvério Freire Júnior, Dr.
Membro da Banca Examinadora

Dedicatória

Esta dissertação é dedicada:
Ao meu pai, Aprígio Alves de Oliveira, pois, apesar das
dificuldades enfrentadas, teve a sabedoria
necessária para nos incentivar e nos alertar sobre a
importância de dedicação aos estudos; À minha irmã,
Miriam dos Santos Oliveira, por ser modelo de
perseverança e inspiração para mim. E finalmente a
todas as crianças do Brasil, em especial ao
meu filho José Víctor.

Agradecimentos

Ao professor João Carlos Arantes Costas Júnior, por seu excelente trabalho de orientação. Sua gentileza, paciência, dedicação, competência e maturidade científica foram fundamentais para a confecção deste trabalho. Sou grato também pelas conversas e a grande amizade formada nestes meses.

Ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte pela oportunidade de estudos.

Ao Instituto Federal da Bahia-IFBA, por conceder licença para realizar esta grande empreitada.

Aos professores Daniel Nelson Maciel, Marcelo Krajnc Alves e Raimundo Carlos Silvério Freire Júnior, por terem gentilmente participado da banca de avaliação.

À professora Karilany Dantas Coutinho do DEM da UFRN, pela ajuda nos programas de pré e pós-processamento.

Ao Grande criador do Universo, por nos possibilitar participar desta grande aventura chamada vida.

Sumário

Dedicatória	iv
Agradecimentos	v
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Símbolos.....	xii
Resumo.....	xv
Abstract.....	xvi
Capítulo 1.....	1
Introdução Geral	1
1.1 Introdução	1
1.2 Pressupostos Teóricos e Metodologia.....	3
1.3 Objetivos	4
1.4 Conteúdo e Organização do Trabalho	5
Capítulo 2.....	6
Revisão Bibliográfica	6
2.1 Introdução	6
2.2 Otimização	6
2.2.1 Formulação Geral do Problema de Otimização	7
2.2.2 Otimização Estrutural	9
2.2.3 Técnicas de Otimização Estrutural.....	10
2.2.4 Evolução Histórica.....	12
2.2.5 Otimização Topológica	14
2.2.6 Método do Conjunto Nível (<i>Level Set Method</i>).....	22
2.2.7 Otimização Aplicada a Problemas Termomecânicos	26
Capítulo 3.....	29
Otimização Topológica de Estruturas Termoelásticas 3D.....	29
3.1 Introdução	29
3.2 Definição do Problema	29
3.2.1 Determinação do Problema Térmico	29
3.2.2 Determinação do Problema Mecânico.....	31

3.3	Equação Constitutiva Termoelástica	32
3.3.1	Formulação Forte do Problema	33
3.3.2	Formulação Fraca do Problema.....	35
3.4	Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos	38
3.4.1	Aproximação do Problema Térmico	43
3.4.2	Aproximação do Problema Mecânico.....	44
3.4.3	Aproximação do Problema Termomecânico Acoplado.....	44
3.5	Formulação do Problema de Ótimo no Contínuo	47
3.5.1	Relaxação da Tensão Efetiva ϵ	49
3.5.2	Critério de Tensão Global	50
3.5.3	Método do Lagrangiano Aumentado.....	51
3.5.4	Determinação das Sensibilidades da Função Objetivo \mathcal{L}_A	53
3.5.5	Discretização do Problema de Otimização no Contínuo	61
Capítulo 4	71
4.1	Procedimento Computacional.....	71
Resultados	73
4.2	Descrição Geral das Propriedades dos Materiais Utilizados nos Problemas de Validação	73
4.3	Apresentação dos Resultados.....	74
4.4	Conclusão	99
Capítulo 5	100
Sugestões de Trabalhos Futuros	100
5.1	Sugestões de Trabalhos Futuros	100
Referências Bibliográficas	101
Bibliografia Complementar	110
Apêndice A	112
A.1	Método do Gradiente Projetado	112
A.2	Aproximação Quase – Newton.....	115
Apêndice B	116
B.1	Condições Necessárias e Suficientes de Karush-Kuhn-Tucker.....	116
Apêndice C	118
C.1	Método da Função de Penalidade Exterior.....	118
C.2	Método da Função de Penalidade Interior.....	119

Lista de Figuras

Figura:2.1: Otimização de Paramétrica	11
Figura 2.2: Etapas no Processo de Otimização Topológica	12
Figura 2.3: Ocorrência dos padrões de xadrez e ziguezague	15
Figura 2.4: Microestrutura do tipo rank	17
Figura 2.5: Microcélulas com furos retangulares	17
Figura 2.6: Contorno 2D incorporado ao conjunto-nível zero de uma função do conjunto-nível 3D	23
Figura 3.1: Descrição do Problema Térmico	29
Figura 3.2: Descrição do Problema Mecânico	31
Figura 3.3: Elemento Finito Tetra4	39
Figura 3.4: Distribuição de Densidades Nodais	56
Figura 3.5: Elemento Finito Tetra4	61
Figura 3.6: Mapeamento para o sistema natural do elemento	63
Figura 3.7: Coordenadas da baricentro do Elemento Finito Tetra4	67
Figura 4.1: Fluxograma do Processo de Otimização Topológica	72
Figura 4.1 (a): Descrição do problema 4.1	74
Figura 4.1 (b): Resultado refino 1 do problema 4.1	75
Figura 4.1 (c): Função de falha refino 1 do problema 4.1	75
Figura 4.1 (d): Resultado refino 2 do problema 4.1	75
Figura 4.1 (e): Função de falha refino 2 do problema 4.1	76
Figura 4.1 (f): Resultado refino 3 do problema 4.1	76

Figura 4.1 (g): Função de falha refino 3 do problema 4.1	76
Figura 4.2 (a) Descrição do problema 4.2	77
Figura 4.2 (b): Resultado refino 1 do problema 4.2	77
Figura 4.2 (c): Função de falha refino 1 do problema 4.2	78
Figura 4.2 (d): Resultado refino 2 do problema 4.2	78
Figura 4.2 (e): Função de falha refino 2 do problema 4.2	78
Figura 4.2 (f): Resultado refino 3 do problema 4.2	79
Figura 4.2 (g): Função de falha refino 3 do problema 4.2	79
Figura 4.3 (a) Descrição do problema 4.3	80
Figura 4.3 (b): Resultado refino 1 do problema 4.3	80
Figura 4.3 (c): Função de falha refino 1 do problema 4.3	80
Figura 4.3 (d): Resultado refino 2 do problema 4.3	81
Figura 4.3 (e): Função de falha refino 2 do problema 4.3	81
Figura 4.4 (a) Descrição do problema 4.4	82
Figura 4.4 (b): Resultado refino 1 do problema 4.4	82
Figura 4.4 (c): Função de falha refino 1 do problema 4.4	82
Figura 4.4 (d): Resultado refino 2 do problema 4.4	83
Figura 4.4 (e): Função de falha refino 2 do problema 4.4	83
Figura 4.4 (f): Resultado refino 3 do problema 4.4	83
Figura 4.4 (g): Função de falha refino 3 do problema 4.4	84
Figura 4.5 (a): Estrutura 2D, Silva (2007)	84
Figura 4.5 (b): Descrição do problema 4.5	85
Figura 4.5 (c): Resultado refino 1 do problema 4.5	85
Figura 4.5 (d): Função de falha refino 1 do problema 4.5	86

Figura 4.5 (e): Resultado refino 2 do problema 4.5	86
Figura 4.5 (f): Função de falha refino 2 do problema 4.5	86
Figura 4.5 (g): Resultado problema 4.3 formulado e resolvido por Silva, (2007)	87
Figura 4.6 (a): Estrutura 2D, Silva (2007)	87
Figura 4.6 (b): Descrição do problema 4.6	88
Figura 4.6 (c): Resultado refino 1 do problema 4.6	88
Figura 4.6 (d): Função de falha refino 1 do problema 4.6	89
Figura 4.6 (e): Resultado refino 2 do problema 4.6	89
Figura 4.6 (f): Função de falha refino 2 do problema 4.6	89
Figura 4.6 (g): Resultado refino 3 do problema 4.6	90
Figura 4.6 (h): Função de falha refino 3 do problema 4.6	90
Figura 4.6 (i): Resultado problema 4.7 formulado e resolvido por Silva, (2007)	90
Figura 4.7 (a): Descrição do problema 4.7	91
Figura 4.7 (b): Resultado refino 1 do problema 4.7	92
Figura 4.7 (c): Função de falha refino 1 do problema 4.7	92
Figura 4.7 (d): Resultado refino 2 do problema 4.7	92
Figura 4.7 (e): Função de falha refino 2 do problema 4.7	93
Figura 4.7 (f): Resultado refino 3 do problema 4.7	93
Figura 4.7 (g): Função de falha refino 3 do problema 4.7	93
Figura 4.8 (a): Descrição do problema 4.8	94
Figura 4.8 (b): Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 100^\circ C$	95
Figura 4.8 (c): Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 300^\circ C$	95
Figura 4.8 (d): Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 500^\circ C$	95
Figura 4.8 (e): Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 600^\circ C$	96

Figura 4.8 (f): Topologia do problema com distribuição de massa $\bar{T} = 100^\circ C$	96
Figura 4.8 (g): Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 100^\circ C$	96
Figura 4.8 (h): Topologia do problema com distribuição de massa $\bar{T} = 300^\circ C$	97
Figura 4.8 (i): Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 300^\circ C$	97
Figura 4.8 (j): Topologia do problema com distribuição de massa $\bar{T} = 500^\circ C$	97
Figura 4.8 (l): Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 500^\circ C$	98
Figura 4.8 (m): Topologia do problema com distribuição de massa $\bar{T} = 600^\circ C$	98
Figura 4.8 (n): Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 600^\circ C$	98

Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
A	operador montagem
b	vetor de força de corpo
C_x, C_y e C_z	limites das derivadas parciais da densidade relativa
D	tensor constitutivo para material denso
\mathbf{D}^ρ	tensor constitutivo para material poroso
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ e \mathbf{e}_z	vetores que formam a base cartesiana ortonormal
E_0	módulo de Young do material completamente denso
f	vetor de carga global
E	módulo de Young do material relativo a densidade (porosidade)
G_0	módulo de cisalhamento do material completamente denso
G	módulo de cisalhamento do material relativo a densidade (porosidade)
h	coeficiente de transferência convectiva de calor
H	conjunto dos deslocamentos admissíveis
H_0	conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis
H_T	conjunto das temperaturas admissíveis
H_{oT}	conjunto das variações das temperaturas admissíveis
Q	fonte de calor interno
L_{\max}^e	comprimento da maior aresta do e -ésimo triângulo
n	número de nós da malha
n_d	número de nós do elemento
n_e	número de elementos da malha
n_v	número de nós dos vértices adjacentes associado a um definido nó
N_j	função interpolação clássica do elemento finito considerado
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
t	vetor de tração
$\bar{\mathbf{t}}$	vetor de tração prescrita
T	campo de temperatura
T	temperatura do corpo

T_0	temperatura de referência do corpo
\bar{T}	temperatura prescrita do corpo
T'	temperatura a ser determinada
\hat{T}	temperatura virtual
T_∞	temperatura do fluido
T_s	temperatura da parede
\mathbf{N}_T^e	matriz de funções de forma de temperatura
\mathbf{N}_u^e	matriz de funções de forma de deslocamentos
\mathbf{n}	vetor normal
\mathbf{q}^e	vetor de graus de liberdade do elemento
\mathbf{q}_T^e	vetor de temperaturas nodais
\mathbf{q}_u^e	vetor de deslocamentos nodais
\mathbf{u}	vetor de deslocamento admissível
$\bar{\mathbf{u}}$	vetor de deslocamento prescrito
U	campo de deslocamentos
\mathbf{v}	vetor de deslocamento virtual
ρ	vetor de densidade relativa
\mathbf{k}	matriz de condutividade térmica
\mathbf{K}	matriz de rigidez global
\mathbf{x}	vetor posição
$\bar{\mathbf{x}}$	vetor posição teste
\mathbf{X}	conjunto que define as variáveis de projeto
α	coeficiente de dilatação térmica
k	coeficiente de condutividade térmica
β_0	coeficiente de tensões térmicas
δ_{ij}	delta de Kronecker
η	parâmetro de penalidade da microestrutura
λ e μ	constantes de Lamé
ϵ	parâmetro de relaxação de tensão
ε	parâmetro de penalidade da função Lagrangiana Aumentada
λ, κ, μ	multiplicadores de Lagrange
\mathcal{L}	função Lagrangiana
\mathcal{L}_A	função lagrangiano aumentado
div	operador divergente

∇	operador gradiente
\cup	operador união
\otimes	produto tensorial
Λ	superfície média de referência
Θ_e	erro local do elemento
Θ_G	erro global
ν_o	coeficiente de Poisson do material completamente denso
ρ	densidade relativa
ρ_{inf}	limite inferior da densidade relativa
ρ_{sup}	limite superior da densidade relativa
$\Gamma_{\mathbf{u}}$	parte do contorno com deslocamento prescrito
$\Gamma_{\mathbf{t}}$	parte do contorno com tração prescrita
Γ_q	parte do contorno com fluxo de calor prescrito
Γ_T	parte do contorno com temperatura prescrita
Γ_{qq}	parte condutiva do contorno com fluxo de calor prescrito
Γ_{qh}	parte convectiva do contorno com fluxo de calor prescrito
Ω	domínio do corpo
$\partial\Omega$	contorno do domínio
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor tensão
$\boldsymbol{\beta}$	tensor de tensões térmicas
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor deformação linear elástico
$\boldsymbol{\sigma}_y$	tensão de escoamento
V	volume do elemento finito tetraédrico
i, j e k	variáveis auxiliares

Resumo

Este trabalho apresenta uma técnica de otimização estrutural baseada no Método de Otimização de Topologia, MOT, desenvolvida para solucionar problemas de termoelasticidade 3D. A abordagem apresentada fundamenta-se no método adjunto unificado de análise de sensibilidade de projeto e destina-se a problemas termomecânicos fracamente acoplados. A técnica faz uso de expressões de sensibilidades analíticas, possibilitando uma redução no custo computacional por meio da utilização de uma equação adjunta de campo acoplado, definida sobre os campos de temperatura e deslocamento.

O MOT utilizado é baseado na abordagem material. Desta forma, para fazer com que o domínio seja composto de uma distribuição contínua de material, possibilitando o uso dos métodos clássicos de programação não linear no problema de otimização, a microestrutura é considerada como um meio poroso e sua equação constitutiva homogeneizada é função apenas da densidade relativa do material. Nesta abordagem, as propriedades efetivas dos materiais com densidades intermediárias são penalizadas com base em uma microestrutura artificial fundamentada no modelo SIMP, (*Solid Isotropic Material with Penalty*). Para contornar problemas de tabuleiro de xadrez e reduzir a dependência do leiaute ótimo final em relação à malha inicial, ocasionados por problemas de instabilidade numérica, restrições às componentes do gradiente de densidades relativas foram aplicadas.

O problema de otimização é resolvido aplicando-se o Método do Lagrangiano Aumentado, sendo a solução obtida através da aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin, utilizando no processo de aproximação o elemento finito Tetra4. Este elemento tem a capacidade de interpolar tanto a densidade relativa quanto as componentes de deslocamento e temperatura. Quanto à definição do problema, o carregamento térmico é suposto em regime estacionário, isto é, os efeitos da condução e da convecção do calor não variam no tempo. O carregamento mecânico é assumido estático e distribuído.

Abstract

This work presents an optimization technique based on structural topology optimization methods, TOM, designed to solve problems of thermoelasticity 3D. The presented approach is based on the adjoint method of sensitivity analysis unified design and is intended to loosely coupled thermomechanical problems. The technique makes use of analytical expressions of sensitivities, enabling a reduction in the computational cost through the use of a coupled field adjoint equation, defined in terms of the temperature and displacement fields.

The TOM used is based on the material approach. Thus, to make the domain is composed of a continuous distribution of material, enabling the use of classical models in nonlinear programming optimization problem, the microstructure is considered as a porous medium and its constitutive equation is a function only of the homogenized relative density of the material. In this approach, the actual properties of materials with intermediate densities are penalized based on an artificial microstructure model based on the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalty). To circumvent problems chessboard and reduce dependence on layout in relation to the final optimal initial mesh, caused by problems of numerical instability, restrictions on components of the gradient of relative densities were applied.

The optimization problem is solved by applying the augmented Lagrangian method, the solution being obtained by applying the finite element method of Galerkin, the process of approximation using the finite element Tetra4. This element has the ability to interpolate both the relative density and the displacement components and temperature. As for the definition of the problem, the heat load is assumed in steady state, i.e., the effects of conduction and convection of heat does not vary with time. The mechanical load is assumed static and distributed.

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Introdução

Dentre os diversos tipos de projetos de engenharia, os sistemas estruturais certamente desempenham um papel fundamental, uma vez que têm, entre outros atributos, a função de receber os carregamentos externos, absorve-los internamente e transmiti-los aos seus apoios. Sua configuração deve, portanto, ser pensada de modo a formar um conjunto estável, garantindo assim a integridade estrutural do sistema. Desta forma, a elaboração de projetos estruturais de engenharia é uma das etapas mais importantes na atividade do engenheiro, pois além de ter que atender aos requisitos a que se destina, o produto final deve obedecer a um conjunto de procedimentos normativos e conhecimentos científicos bem estabelecidos.

Dentro deste cenário, e dada a dificuldade de se avaliar uma grande quantidade de variáveis de projeto, até meados do século passado esta atividade era fortemente dependente da experiência, intuição e habilidade do projetista. O produto final era obtido como resultado de um processo intuitivo, iterativo e sequencial o qual demandava a construção de modelos para avaliação de certos parâmetros críticos e comparação com projetos preestabelecidos. Era, em suma, um trabalho de tentativa e erro e naturalmente os avanços em termos de qualidade, durabilidade, segurança, redução de custos e funcionalidade ocorriam lentamente.

Foi somente a partir de 1950, com o advento dos computadores e o desenvolvimento de linguagens de programação de alto nível, em conjunto com as pesquisas de métodos numéricos genéricos e confiáveis, que houve um salto qualitativo nos trabalhos de desenvolvimento e análise de projetos estruturais. O aumento contínuo do poder computacional e as significativas reduções de preços possibilitaram o uso, o aperfeiçoamento e o desenvolvimento de técnicas numéricas capazes de lidar com problemas constituídos de um grande número de variáveis. É neste cenário que teorias e métodos numéricos, até então restritos ao ambiente acadêmico, ganham impulso e possibilitam extraordinário avanço na análise de

sistemas estruturais complexos. Dentre estas novas ferramentas numéricas destacam-se os Métodos de Otimização Estrutural, os métodos numéricos, sobretudo o Método dos Elementos Finitos, os métodos de análise de sensibilidade estrutural e os métodos de programação matemática.

Por exemplo, o propósito de uma ponte é fornecer continuidade do tráfego de uma localidade para outra. Vários tipos de pontes podem servir a esse propósito. A solução tradicional para a escolha do projeto mais apropriado seria a construção de protótipos ou modelos reduzidos para ensaios em laboratório, nos quais instrumentos de medição estrategicamente posicionados coletariam dados como tensões, deformações, deslocamentos de apoios, frequência natural, etc. Então, com base nos valores obtidos experimentalmente os parâmetros seriam dimensionados conforme os requisitos de projeto. Entretanto, desenhar, construir protótipos e analisar todas as possibilidades implica um trabalho demorado e dispendioso, indesejável no contexto atual em que se busca rapidez, eficiência e economia. Nos tempos atuais, felizmente, utilizando-se técnicas numéricas relacionadas à Otimização Estrutural, bem como programas computacionais que utilizam, entre outros, os conceitos de CAD (*Computer Aided Design*) e de CAE (*Computer Aided Engineering*) é possível simular várias configurações de pontes e analisar todos os aspectos estruturais listados acima. Isto, é claro, com rapidez, confiabilidade e sobretudo economia.

A otimização tem um campo de atuação muito amplo e objetiva, em geral, a obtenção dos melhores resultados de certas variáveis sujeitas a determinadas condições. No caso da otimização estrutural, ao melhorar o desempenho dos componentes e sistemas projetados ela se transforma também em uma ferramenta de projeto que permite não apenas diminuir custos de fabricação, mas também diminuir custos de operação.

A Otimização Topológica foi aplicada inicialmente em problemas estruturais e é considerado o método de otimização estrutural mais flexível, pois permite mudanças na topologia e na forma da estrutura. Contudo, como consequência destas primeiras aplicações, a maioria dos estudos em otimização de topologia tem se dedicado preponderantemente a problemas de estruturas, tais como a maximização da rigidez ou a minimização da frequência natural de sistemas. A introdução dos efeitos térmicos em problemas de otimização é relativamente recente, sendo frequentemente abordado apenas o caso 2D.

A condução de calor macroscópica nos materiais e sua conseqüente influência na deformação estrutural é uma propriedade física de grande importância no projeto de componentes mecânicos, eletrônicos e térmicos, tendo um grande número de aplicações nas áreas de construção civil, aeroespacial, nuclear, biomédica e eletrônica. Em muitas circunstâncias, a presença de uma fonte de calor é determinante na abordagem do projeto e pode influenciar significativamente a sua configuração ótima. O presente trabalho pretende contribuir no estudo de problemas de otimização de estruturas tridimensionais submetidas a uma combinação de cargas térmica e mecânica.

1.2 Pressupostos Teóricos e Metodologia

A técnica de otimização estrutural apresentada neste trabalho é baseada no Método de Otimização Topológica (MOT) e fundamenta-se no método adjunto unificado de análise de sensibilidade de projeto, do inglês *Design Sensitivity Analysis* (DSA), desenvolvida por Alves & Costa Jr. (2002) e Cho & Choi (2005) e destinada a problemas termomecânicos fracamente acoplados. A técnica faz uso de expressões de sensibilidades analíticas, possibilitando uma redução no custo computacional por meio da utilização de uma equação adjunta de campo acoplado, definida sobre os campos de deslocamentos e temperatura.

O Método de Otimização Topológica aqui utilizado é baseado na abordagem material. Destarte, para fazer com que o domínio seja composto de uma distribuição contínua de material, possibilitando o uso dos métodos clássicos de programação não linear no problema de otimização, a microestrutura é considerada como um meio poroso e sua equação constitutiva homogeneizada é função apenas da densidade relativa do material. Nesta abordagem, as propriedades efetivas dos materiais com densidades intermediárias são penalizadas com base em uma microestrutura artificial fundamentada no modelo SIMP, do inglês *Solid Isotropic Material with Penalty*, como proposto por Bendsøe & Sigmund (1999). Por outro lado, como esta abordagem pode ocasionar problemas de instabilidade numérica, como apontado por Bendsøe (1995), Sigmund & Petersson (1998) e Bendsøe & Sigmund (1999), aplica-se uma restrição às componentes do gradiente de densidade relativa a fim de contornar o problema de tabuleiro de xadrez e reduzir a dependência do leiaute ótimo final em relação à malha inicial, como sugerido por Sigmund & Petersson (1998).

O problema de otimização é resolvido aplicando-se o Método do Lagrangiano Aumentado, o qual consiste na solução de uma sequência de problemas de mínimo com restrições do tipo caixa e solucionado por um método de projeção de segunda ordem que utiliza o método Quasi-Newton sem memória durante o processo de solução do problema.

Para contornar os problemas decorrentes de singularidades de tensões, impõem-se uma relaxação no critério de tensão visando auxiliar o processo de convergência. Ademais, é utilizado um critério de medida global de tensão em vez de um critério local, o qual demonstra ser mais adequado aos casos paramétricos de tensão, ampliando o critério de medida de modo a contabilizar eventuais pontos de singularidades.

A abordagem desenvolvida é aplicada a problemas termomecânicos tridimensionais e resolvida através da aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin, utilizando no processo de aproximação o elemento finito isoparamétrico tetraédrico de 4 nós, denominado Tetra4. Este elemento tem a função de interpolar tanto a densidade relativa quanto as componentes de deslocamento e temperatura. Quanto à definição do problema, o carregamento térmico é suposto em regime estacionário, isto é, os efeitos da condução e da convecção do calor não variam no tempo. O carregamento mecânico é suposto estático e distribuído, uma vez que a idealização de carregamentos concentrados ocasionaria de pronto uma violação no critério de falha.

O algoritmo utilizado foi implementado em linguagem Fortran 95, enquanto o programa comercial Femap, versão 10.1.0, foi utilizado como pré-processador para a geração da malha de elementos finitos. Para a visualização gráfica dos resultados fez-se uso do programa GiD, versão 10.0.5, como pós-processador.

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma técnica com base no MOT para a obtenção de leiautes estruturais ótimos de sistemas tridimensionais submetidos a carregamentos termoelásticos. A formulação apresentada visa minimizar a massa da estrutura sujeita a um critério de tensão de von Mises, restrições laterais e restrições de estabilidade. Pretende-se também contornar problemas de padrões de

xadrez através da introdução de restrições de estabilidade às componentes do gradiente da densidade relativa

1.4 Conteúdo e Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: o capítulo 1 apresenta uma introdução geral, explicitando as técnicas e metodologias utilizadas na abordagem proposta; o capítulo 2 apresenta os principais conceitos relacionados às técnicas de otimização, sua evolução histórica e uma revisão bibliográfica exibindo as principais técnicas utilizadas nas duas últimas décadas em problemas de otimização de sistemas termomecânicos; no capítulo 3 é proposto uma formulação para a minimização da massa de sistemas termomecânicos satisfazendo a um critério de tensão; no capítulo 4 são apresentados os resultados dos problemas formulados com o objetivo de validar o modelo proposto. Finalmente, no capítulo 5 são feitas as conclusões finais, sugestões para trabalhos futuros na área de análise de sistemas termomecânicos e em seguida, apresentam-se as fontes de consultas utilizadas nesta dissertação.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Visando uma melhor compreensão do tema objeto deste trabalho e objetivando o conhecimento da evolução histórica nesta área, serão apresentadas nas seções seguintes uma explanação sobre os principais conceitos relacionados ao tema e uma revisão bibliográfica sobre o desenvolvimento da Otimização Estrutural.

2.2 Otimização

O advento da globalização econômica e a conseqüente oferta de produtos e serviços para um mercado consumidor cada vez maior e mais exigente têm propiciado um aumento considerável em pesquisas que objetivam melhorar o desempenho e a qualidade de tais produtos e serviços. *Melhorar* um produto ou serviço significa que um determinado parâmetro da engenharia do produto ou do serviço será alterado de modo a propiciar um aumento no desempenho e/ou na qualidade deste. Neste cenário, não basta que um sistema (produto ou serviço) funcione corretamente, é necessário que ele seja o *melhor*. Para Coutinho (2006), *melhor* significa eficiência, versatilidade, possibilidade de ser distinto (único) e possuir uma boa relação custo-benefício. Tais exigências mercadológicas refletem, entre outras coisas, a escassez cada vez maior de recursos naturais e a forte competição entre as empresas em um mercado onde cada uma deseja ser a primeira no seu segmento. Como consequência, tornou-se imprescindível a consideração destes requisitos na elaboração de qualquer projeto, devendo-se levar em conta, ainda, os seus impactos sobre o meio ambiente e a necessidade de ofertá-lo a preços competitivos. Estas são, em síntese, as ideias por trás do conceito de otimização.

2.2.1 Formulação Geral do Problema de Otimização

Segundo Rao (1996), a otimização pode ser definida como o processo que permite determinar o valor máximo ou mínimo de uma função. Ela consiste de um conjunto de técnicas que visa obtenção da solução mais apropriada para um problema submetido a certas condições.

Sob o enfoque matemático, a otimização pode ser definida como o processo de determinação do mínimo ou do máximo de uma função f , denominada *função custo* ou *função objetivo*. Para tanto, é necessária a determinação dos valores de certas variáveis ou parâmetros, escolhidos dentre as variáveis que descrevem o problema. Estas são as chamadas *variáveis de projeto*. Além disso, como sempre há limitantes em um projeto, na maioria dos problemas de otimização impõem-se certas *restrições* às variáveis de projeto, podendo estas ser devidas à própria concepção do produto, atendimento a princípios físicos e/ou matemáticos, obediência às leis políticas e ambientais, limitações de orçamento e a muitos outros fatores.

Em geral, como maximizar uma função f é equivalente a minimizar a sua negativa, $-f$, o problema de otimização é definido frequentemente no seguinte formato padrão:

Determinar \mathbf{x} que minimiza $f(\mathbf{x})$, sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x}) &= 0; & i &= 1, \dots, p \\ g_j(\mathbf{x}) &\leq 0; & j &= 1, \dots, m \\ x_{lj} &\leq x_j \leq x_{uj}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ é o vetor das variáveis de projeto.

Na definição acima, a função objetivo $f(\mathbf{x})$ define o parâmetro que se deseja maximizar ou minimizar. As funções $h_i(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ definem as restrições de igualdade e de desigualdade, respectivamente, e as últimas restrições são as chamadas restrições laterais, sendo x_{lj} e x_{uj} respectivamente os limites inferior e superior da j -ésima variável de projeto. Qualquer ponto \mathbf{x} que satisfaça todas as restrições é um ponto candidato a **ótimo** e o conjunto de todos estes pontos forma a região factível ou admissível S , tendo as funções de restrição o papel de limitarem ou subdividirem o espaço de solução S . As funções $f(\mathbf{x})$, $h_i(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ dependem de algumas ou de todas as variáveis de projeto e o número de restrições de igualdade independentes deve ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto. Quando ocorre o

contrário, tem-se um sistema de equações indeterminado, o que significa que a formulação possui alguma inconsistência ou que algumas restrições de igualdade são redundantes, isto é, linearmente dependentes de outras restrições. Finalmente, um problema de otimização no qual não há conflitos entre as restrições é denominado *factível* ou *admissível*.

2.2.1.1 Função Lagrangiana e as Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

- **Ponto Regular**

Para definir um ponto regular do espaço de projeto S , consideremos o problema de minimizar $f(\mathbf{x})$ sujeito às restrições de igualdade $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, p$. Um ponto \mathbf{x}^* satisfazendo as restrições $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$ é denominado ponto regular do espaço de projeto se $f(\mathbf{x}^*)$ é diferenciável e os vetores gradientes de todas as restrições no ponto \mathbf{x}^* são linearmente independentes (LI). Quando as restrições de desigualdades são também incluídas na definição do problema, então para um ponto ser regular, os gradientes das desigualdades ativas também devem ser LI.

- **Função Lagrangiana**

Uma vez que na definição de um problema de engenharia sempre está implícita a existência de restrições de igualdade ou desigualdade, se faz necessário contornar o problema a fim de solucionar problemas de mínimo com restrições. Neste sentido, um método clássico e bem estabelecido na literatura para tratar problemas com restrições é o Lagrangiano, o qual possibilita transformar o problema original com restrições em um problema equivalente de otimização sem restrições, possibilitando assim a aplicação das condições necessárias e suficientes de otimalidade.

A função Lagrangiana, denotada por \mathcal{L} , pode ser definida, conforme Luenberger (1984), Rao (1995) e Arora (2004), da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

sendo $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ os vetores multiplicadores de Lagrange associados aos respectivos vetores \mathbf{h} e \mathbf{g} de restrições de igualdade e desigualdade.

- **Condições Necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)**

Seja \mathbf{x}^* um ponto regular do conjunto restrição que é mínimo local para a função $f(\mathbf{x})$ sujeito às restrições,

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x}) &= 0 ; & i = 1, \dots, p \\ g_j(\mathbf{x}) &\leq 0 ; & j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.3)$$

e seja s_j uma variável que transforma a desigualdade $g_j \in \mathbb{R}$ em uma igualdade, isto é, $g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \Rightarrow g_j(\mathbf{x}) + s_j^2 = 0$, $j = 1, \dots, m$. Então, as condições necessárias de estacionaridade (condições KKT) da função Lagrangiana dada na eq.(2.2) são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^m \mu_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = 0 ; \quad k = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = h_i(\mathbf{x}^*) = 0 ; \quad i = 1, \dots, p \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} = g_j(\mathbf{x}^*) + s_j^2 = 0 ; \quad j = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_j} = \mu_j^* s_j = 0 ; \quad j = 1, \dots, m \quad (2.7)$$

$$\mu_j^* \geq 0 ; \quad j = 1, \dots, m \quad (2.8)$$

sendo todas as derivadas calculadas no ponto \mathbf{x}^* .

A solução das eqs. (2.4)-(2.8) fornece, portanto, o vetor solução ótima, \mathbf{x}^* , os multiplicadores de Lagrange λ_i^* e μ_j^* e as chamadas variáveis de folga, s_j .

2.2.2 Otimização Estrutural

Em seu sentido mais amplo, a otimização pode ser aplicada para resolver qualquer problema de engenharia. Na verdade, o conceito de otimização se confunde com o próprio conceito de engenharia, pois na elaboração de um projeto frequentemente o especialista se depara com situações nas quais se busca, por exemplo:

- Minimizar a área da seção de uma viga, mantendo ou aumentando a sua rigidez;
- Maximizar o desempenho de um motor reduzindo-se ao mínimo consumo de combustível;
- Projetar estruturas de engenharia civil, tais como quadros, fundações, pontes, torres, e barragens com o custo mínimo;
- Conceber estruturas de peso mínimo capazes de suportar terremotos, ventos e outros tipos de carregamento aleatório;
- Selecionar condições de usinagem em processos de corte de metais para minimizar custos de produção;
- Encontrar as melhores trajetórias de veículos espaciais para reduzir custos e o tempo de voo.

Como é evidente, a lista acima pode ser consideravelmente ampliada se levarmos em conta os vários ramos de aplicação da engenharia. Entretanto, é na Otimização Estrutural (OE) que as pesquisas em técnicas de otimização têm aumentado de forma considerável.

A otimização estrutural surge como uma ferramenta que permite não apenas diminuir os custos de produção, mas, sobretudo melhorar o desempenho dos componentes e sistemas criados. Além disso, dada a sua flexibilidade, a otimização estrutural possibilita melhorar o projeto em vários aspectos, dependendo do que se escolhe como objetivo, restrições e variáveis de projeto. Em adição, com a integração das técnicas de otimização e os programas CAE, é possível, ainda, simular várias configurações e escolher aquela que resulta em produtos mais econômicos, mais seguros, mais eficientes e mais funcionais, tudo isso com maior precisão e em um intervalo de tempo consideravelmente reduzido.

2.2.3 Técnicas de Otimização Estrutural

Existem basicamente três possíveis abordagens em um problema de otimização estrutural: otimização dimensional ou paramétrica, otimização de forma e otimização topológica.

A otimização paramétrica utiliza como variáveis de projeto parâmetros que representam as dimensões ou razões de dimensões do sistema estrutural. Neste tipo de otimização parte-se de uma configuração pré-definida e são obtidos os valores ótimos das dimensões, não havendo alteração na forma, apenas na razão de aspecto da estrutura. A variável de projeto pode ser a espessura ótima de uma placa, propriedades do material ou as dimensões ótimas da seção transversal de uma estrutura reticulada, Fig.2.1.

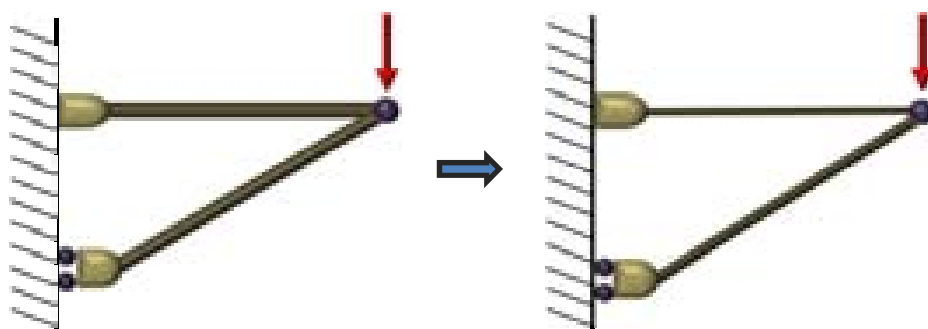


Figura 2.1 – Otimização Paramétrica

Na otimização de forma é permitido alterar os contornos internos e externos da estrutura. Assim, as variáveis de projeto podem ser as coordenadas de pontos de controle do contorno, coordenadas dos nós da malha de elementos finitos ou até mesmo parâmetros que definem a curva que representa a geometria do sistema. Vale observar que neste tipo de otimização é permitido alterar a posição de furos, mas não são introduzidos novos furos.

O método de otimização topológica (MOT) objetiva definir a melhor forma de distribuir material em um domínio pré-fixado. A função objetivo pode ser, por exemplo, maximizar os parâmetros de rigidez de um sistema reduzindo ao mínimo o volume de material. Neste tipo de otimização a variável de projeto é a densidade da massa e agora, além de reduzir as dimensões e alterar os contornos da estrutura é possível remover material criando-se furos. Esta técnica utiliza métodos computacionais baseados em elementos finitos no qual o domínio do problema é inicialmente discretizado para se trabalhar apenas com um número finito de pontos. Assim, após se obter a solução aproximada das equações que governam o problema os pontos pertencentes ao domínio são então interpretados como bits, cujo valor pode ser 1 ou 0, ou seja, significando a presença ou não de material. A solução do problema

discreto é definida como a união de todos os pontos que possuem o valor 1. A Fig.2.2 abaixo ilustra os resultados da otimização de forma e de topologia.

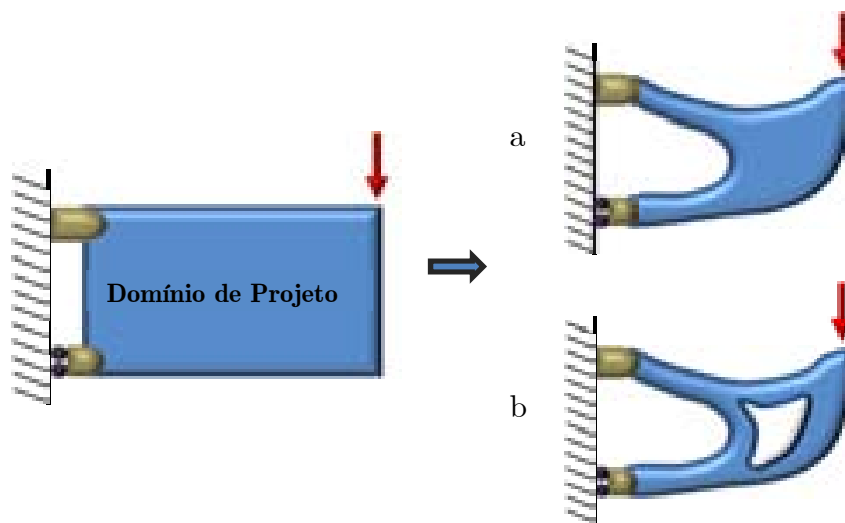


Figura 2.2 – Métodos de Otimização.

a) Otimização de forma b) Otimização topológica

2.2.4 Evolução Histórica

Conforme Rao (1995), a existência de métodos de otimização pode ser rastreada desde os dias de Newton, Lagrange, Cauchy até os dias atuais. O desenvolvimento do cálculo diferencial possibilitou o surgimento de métodos de otimização graças às contribuições de Newton e Leibniz. As bases do cálculo das variações, que trata da minimização de funcionais, foram definidas por Bernoulli, Euler, Lagrange, e Weirstrass. O método de otimização para problemas com restrições, que envolve o uso de multiplicadores desconhecidos, tornou-se conhecido pelo nome de seu inventor, Lagrange, e Cauchy fez a primeira aplicação do método de descida para resolver problemas de minimização.

Apesar dessas primeiras e importantes contribuições, pouco progresso foi feito até meados do século XX, quando o advento dos computadores digitais de alta velocidade tornou possível a execução dos procedimentos de otimização e estimulou novas pesquisas sobre novos métodos. Avanços espetaculares se seguiram, produzindo uma vasta literatura sobre técnicas de otimização e resultando no surgimento de várias áreas bem definidas na teoria de otimização.

No que concerne à Otimização Estrutural (ou de leiaute), os primeiros estudos foram realizados no final do século XIX por Maxwell em 1872, o qual buscava o

menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos. Seus princípios básicos, entretanto, foram introduzidos inicialmente por Michell em 1904 e foram desenvolvidos no âmbito de problemas relacionados ao cálculo do campo de tensões principais de uma força aplicada em um domínio infinito, sujeito a restrições de deslocamento em outros pontos. A proposta de Michell foi admitir, no domínio do problema, uma estrutura formada por barras submetidas apenas a forças de tração e compressão, sem momentos fletores, sendo suas famosas estruturas ainda hoje referência na moderna teoria da Otimização Topológica. Apesar da simplicidade, essa proposta fornece o mesmo resultado que o critério de máxima rigidez para um dado volume de material, ou seja, mesmo partindo-se de um meio contínuo a estrutura com melhor aproveitamento de material, segundo o critério de máxima rigidez e um dado peso, é uma estrutura de barras de treliça. Segundo Costa Jr. (2003), o trabalho de Michell foi pouco apreciado por seus contemporâneos, sendo referenciado apenas no final dos anos 50 no trabalho de Cox (1958). Ainda de acordo com Costa Jr. (2003), a popularização no uso das técnicas de otimização numérica para projetos de engenharia ocorreu inicialmente com Schmit (1960) e em seguida com Fox (1965). Eles utilizaram técnicas de otimização não linear para projetos estruturais, mas, na prática, os projetos ainda carregavam grande dose de intuição e careciam de solidez matemática.

Até o final da década de 60 a abordagem em otimização estrutural ficou restrita apenas à otimização paramétrica de estruturas de treliças. Foi somente a partir dos anos 70 que alguns problemas de leiaute foram também estudados e resolvidos. Como exemplos, citamos os trabalhos de Hemp (1973) e de Prager (1974). Com base nestas aplicações, os princípios básicos da teoria da otimização de leiaute foram então formulados por Prager & Rozvany (1977a), Rozvany (1981), Rozvany & Wang (1983), Zhou & Rozvany (1991) e consideravelmente generalizado por Rozvany (1992) e Rozvany & Birker (1994). Nos trabalhos de revisão elaborados por Kirsch (1989), Rozvany *et al.* (1994) e também Rozvany (2001), podem ser encontradas mais informações sobre otimização do leiaute de estruturas de treliças.

Os avanços conquistados pelos trabalhos citados acima, tanto em otimização de leiaute de estruturas de treliças quanto em otimização paramétrica, não despertaram de forma significativa a atenção dos projetistas. A razão para isto era a inexistência de técnicas robustas capazes de lidar com projetos complexos e a constatação, inicialmente por Cheng & Olhoff (1981) em seus estudos de otimização

da espessura de placas nervuradas, e posteriormente por Kohn & Strang (1986), da existência de classes de problemas de otimização cujas formulações não eram bem postas. Segundo Costa Jr. (2003), a proposta de Kohn & Strang (1986) para tornar o problema bem posto foi a relaxação do problema de projeto original, através da introdução de um material composto fictício, contendo uma microestrutura caracterizada pela presença de *vazios* (porosidade), o que deu origem à formulação de problemas de otimização de leiaute como problemas de distribuição ótima de material. Vale observar ainda que, segundo Rozvany (2001), os primeiros trabalhos realizados por matemáticos interessados na investigação de microestruturas ótimas ocorreram somente na década de 1980, com as publicações de Lurie *et al.* (1982), Kohn & Strang (1986) e Vigdergauz (1986).

2.2.5 Otimização Topológica

2.2.5.1 Caracterização

O problema de otimização topológica ou de leiaute¹, pode ser definido como a determinação da distribuição ótima de material em um domínio de projeto pré-fixado. Na literatura especializada em geral, e neste trabalho, a palavra leiaute, do inglês *layout*, conforme utilizada por Bendsøe & Sigmund (2003), inclui informações da topologia, da forma e das dimensões da estrutura e o método de distribuição de material empregado permite atacar os três problemas simultaneamente. Assim, para um dado conjunto de cargas e condições de contorno prescritas, o problema é como distribuir o material de modo a minimizar/maximizar uma função objetivo e atender a todas as restrições de projeto, possibilitando alterar simultaneamente as dimensões, a forma e a topologia do sistema. Segundo Bendsøe (1995), essa distribuição ótima de material consiste em se verificar quais pontos do domínio possuirão material e quais pontos estarão vazios. Desta forma, o problema de otimização de leiaute pode ser considerado como um problema pontual material/vazio, podendo ser encarado como um problema de otimização do tipo 0-1, Costa Jr. (2003).

¹ O termo leiaute, apesar de menos utilizado na literatura, é mais adequado para definir a disposição dos membros estruturais do que o termo topologia. No contexto deste trabalho os dois termos são utilizados como sinônimos.

Apesar da simplicidade conceitual, a implementação deste tipo de problema requer, entretanto, o uso de algoritmos de otimização discreta, o que em geral resulta em problemas relacionados à instabilidade numérica. Bendsøe & Sigmund (2003), dividem tais problemas de instabilidade numérica basicamente em três categorias: dependência da malha, instabilidade de tabuleiro de xadrez e mínimos locais.

O problema de dependência da malha está ligado ao processo de discretização do domínio, o que pode resultar em diferentes soluções finais para diferentes discretizações iniciais. Intuitivamente, espera-se que quanto mais refinada seja a malha de elementos finitos, mais nítida será a resposta do processo de otimização topológica. Paradoxalmente, para alguns problemas, malhas mais refinadas podem produzir estruturas complexas, com topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes, em comparação com uma malha mais grosseira para o mesmo domínio. A explicação para isto é que à medida que a densidade da malha aumenta, o projeto final passa a ter um número crescente de elementos com tamanhos bastante reduzidos, o que acarreta na inexistência de soluções. Segundo Zhou *et al.* (2001), este fenômeno foi observado pela primeira vez por Cheng & Olhoff (1981) e posteriormente por Olhoff *et al.* (1981) para problemas de otimização topológica de placas nervuradas.

Nos problemas de instabilidade de xadrez, do inglês *checkerboard problems*, como o próprio nome indica, há uma alternância de elementos vazios (0) e elementos cheios (1), formando uma configuração similar a um tabuleiro de xadrez. A formação de padrões de xadrez tem sido observada principalmente nos resultados de otimização topológica de estruturas contínuas e é comparável ao problema de zigzague do contorno em otimização de forma. Para Bendsøe (1995), Diaz & Sigmund (1995) e Jog & Haber (1996) a origem do problema de configuração em xadrez está relacionada a erros numéricos característicos dos processos de aproximação do elemento finito, bem como da utilização de funções interpoladoras de baixa ordem. A Fig. 2.3 abaixo mostra a ocorrência dos padrões de xadrez e de zigzague.

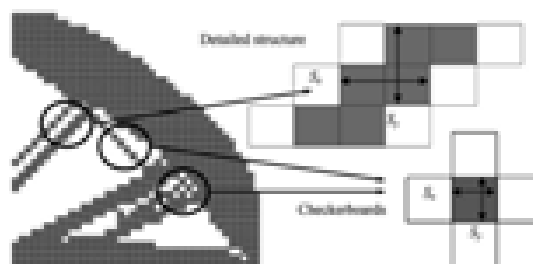


Figura 2.3 - Ocorrência dos padrões de xadrez e zigzague, Zhu *et al*

Problemas de mínimos locais estão relacionados ao fato de que a maioria dos problemas de topologia de projeto são não convexos², implicando na existência de muitos mínimos locais. Assim, a não convexidade do problema possibilita que sejam encontrados muitos mínimos locais e, conseqüentemente, diferentes soluções para o mesmo problema, dependendo das diferentes estimativas iniciais para as variáveis de projeto e para os diferentes parâmetros utilizados nos algoritmos de otimização. Isto ocorre porque as provas de convergência dos algoritmos funcionam apenas para programação convexa, enquanto que para programação não convexa apenas está garantida a convergência para pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais, Coutinho (2006).

A estratégia clássica para contornar problemas de instabilidade numérica consiste em adotar, como forma de relaxação, a abordagem de material composto, como inicialmente proposto por Kohn & Strang (1986). Nesta abordagem é feita uma distribuição de material em duas fases, que consiste de um material original e um material imitando vazios. Além deste tipo de abordagem, há também os métodos de filtragem, como no trabalho de Haber *et al.* (1996) no qual é utilizada uma abordagem via método dos perímetros para controlar o número de furos em um projeto ótimo, e no trabalho de Bourdin (2001), que apresenta uma versão “filtrada” do problema de flexibilidade mínima para enfrentar instabilidades ligadas à dependência de malha e tabuleiro de xadrez. Atualmente, conforme Ansola *et al.* (2006), os métodos de filtragem são os mais populares.

Segundo Costa Jr. (2003), “*a abordagem material consiste em considerar o material como sendo um material composto constituído por uma microestrutura periódica, a qual é caracterizada por um conjunto de parâmetros. Mediante esta abordagem, a natureza complexa do problema de otimização de leiante pode ser convertida em um problema de otimização de parâmetros*”. Para Bendsøe (1989), esta forma de definir o problema transforma a concepção 0-1 da escala macroscópica para a escala microscópica, o que, em termos matemáticos, corresponde à relaxação do problema variacional que pode ser estabelecida para o problema de otimização.

Existem na literatura vários exemplos bem sucedidos de modelos de microestruturas e podemos classificá-los basicamente em três grupos: modelos de

² Definimos um domínio convexo como sendo aquele no qual a reta definida por dois de seus pontos está completamente contida nele.

compósitos laminados tipo *rank*, modelos de microcélulas com vazios internos e modelos artificiais.

Nos modelos de compósitos do tipo *rank*, a microestrutura é constituída de camadas alternadas de materiais sólidos e vazios. O parâmetro de otimização é a medida φ , conforme Fig. 2.4 a seguir:

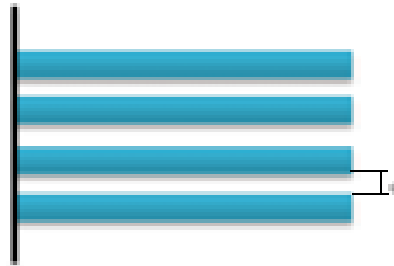
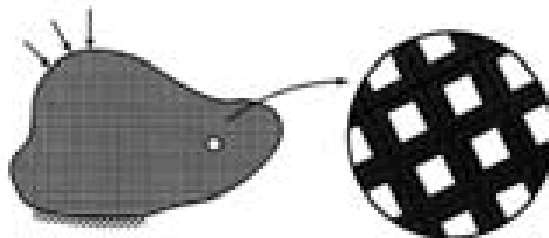


Figura 2.4 - Microestrutura do tipo rank

Modelos de microcélulas com vazios internos são outro tipo de microestrutura utilizado. Eles são constituídos de células com furos retangulares e os parâmetros de otimização são as medidas a e b dos lados do retângulo e a medida do ângulo θ , que representa a inclinação do retângulo em relação ao semi eixo positivo OX do sistema de coordenadas cartesianas. A Fig. 2.5 abaixo ilustra este caso.



**Figura 2.5 - Microcélulas com furos retangulares
Hassani & Hinton (1998).**

Para a determinação das propriedades mecânicas macroscópicas destes materiais é utilizada a teoria da homogeneização, na qual o material é concebido como um meio compósito poroso em que cada elemento é constituído de um número infinito de células microscópicas contendo variados graus de sólido/vazio e o problema de otimização topológica é definido pela busca da distribuição ótima da porosidade. Para os materiais do tipo rank a equação constitutiva homogeneizada pode ser determinada analiticamente, enquanto para os modelos com microcélulas

complexas as propriedades são determinadas predominantemente por procedimentos numéricos, como o método dos elementos finitos.

Devemos observar, como afirmado por Hassani & Hinton (1998), que nos modelos do tipo *rank* e de microcelulas com vazios internos, as variáveis de projeto são os parâmetros geométricos que definem os “vazios” incorporados ao modelo. Nos modelos artificiais, por sua vez, é a densidade relativa do material em um ponto arbitrário do domínio de projeto que desempenha este papel. Este é o ponto crucial que distingue aqueles deste último método.

2.2.5.2 Evolução Histórica

Uma vez constatados os problemas de instabilidade numérica e suas causas, a proposta de relaxação se revelou extremamente eficiente no desenvolvimento das técnicas de otimização de leiaute. Neste sentido, uma das primeiras e mais importante contribuição em otimização de leiaute foi apresentada por Bendsøe & Kikuchi (1988). Eles apresentaram uma abordagem material na qual se buscava maximizar a rigidez global estática de estruturas bidimensionais de material elástico linear, estando a mesma submetida à aplicação de carregamentos mecânicos prescritos. A fim de se regularizar o problema foram introduzidos *infinitos* furos retangulares de escala infinitesimal, periodicamente distribuídos em todo o domínio de projeto. Desta forma, a microestrutura obtida mostrou ter, de maneira intrínseca, as características básicas necessárias para a relaxação do problema. Já para a derivação do modelo mecânico equivalente homogeneizado da estrutura porosa, ou seja, a determinação das propriedades ortotrópicas equivalentes do material, aplicou-se a teoria da homogeneização, ver teoria geral proposta por Sanchez-Palencia (1980) e Guedes & Kikuchi (1990) para a implementação computacional. Apesar dos pioneiros esforços, os resultados obtidos por Bendsøe & Kikuchi (1988) não eram muito nítidos, ou seja, nem a forma e nem a topologia da estrutura eram adequadamente definidas. Isso se deve, provavelmente, à inadequação do algoritmo utilizado no recálculo do ângulo ótimo (rotação) dos furos.

Na tentativa de superar estas dificuldades, Pedersen (1989) conseguiu derivar as condições corretas para a determinação do ângulo ótimo através de um trabalho direcionado à classe de problemas de otimização de microestruturas, representando materiais compósitos reforçados por fibras. Em seguida, Suzuki (1991) e Suzuki &

Kikuchi (1991) estenderam o trabalho de Bendsoe & Kikuchi (1988), no qual foram aplicadas as considerações propostas por Gibiansky & Cherkaev (1987) e Pedersen (1989). Neste trabalho, o ângulo de rotação foi identificado pela direção das tensões principais, mas não foram obtidas soluções estáveis.

É importante ressaltar aqui que a técnica de relaxação empregada, caracterizada pela utilização de uma microestrutura porosa, possibilitou a determinação de leiautes ótimos possuindo uma grande quantidade de material composto, ou seja, material cuja microestrutura apresenta uma densidade intermediária. Entretanto, a presença de material composto é indesejável, pois dificulta a definição da forma e do leiaute ótimo da estrutura e, como consequência do aumento da tecnologia e etapas de fabricação a serem empregadas na produção do material, torna o processo produtivo oneroso.

Assim, com o objetivo de se obter soluções práticas com distribuição limpa de material (0-1), vários métodos de concepção material via otimização topológica foram propostos ao longo das últimas três décadas. Estes incluem os métodos da microestrutura-base (método de homogeneização e método de densidade variável SIMP) e os métodos de otimização estrutural evolucionária: ESO, AESO, BESO e o método do conjunto-nível.

No método de homogeneização, introduzido inicialmente por Bendsoe & Kikuchi (1988), um modelo de material com vazios em micro-escala é introduzido e o problema de otimização topológica é definido pela busca da porosidade média ótima, sendo o comportamento material constante de célula para célula. Basicamente, o método torna possível uma descrição contínua de meios não contínuos e desta forma é possível o tratamento de propriedades físicas descontínuas que oscilam muito rapidamente, como o peso específico e o módulo de elasticidade.

Ao transformar o difícil problema de topologia de projeto em um problema de tamanho relativamente “menor”, a técnica de homogeneização é capaz de produzir furos internos sem o conhecimento prévio de sua existência. Ou seja, ela oferece uma ferramenta que otimiza, simultaneamente, forma e topologia. No entanto, o método de homogeneização pode não produzir os resultados pretendidos para alguns objetivos na modelagem matemática de projetos estruturais. Ele frequentemente produz projetos com poros infinitesimais nos materiais, o que torna a estrutura não fabricável. Além disso, instabilidades numéricas podem introduzir artefatos “não-físicos” nos resultados e tornar o projeto sensível a variações no carregamento, Wang *et al.* (2003).

A abordagem SIMP, do inglês *Solid Isotropic Material with Penalization*, inicialmente proposta por Bendsoe & Kikuchi (1988) e posteriormente por Bendsoe (1989) é baseada no conceito de microestruturas e técnicas de homogeneização. Nesta abordagem, a existência ou não de material é tratada através do uso de um modelo de material fictício, que pode adotar comportamento intermediário entre sólido e vazio. Assim, ao se utilizar o método SIMP o comportamento constitutivo do material intermediário (artificial) é definido por uma função paramétrica $\rho(\mathbf{x})$, associada com a densidade do material. O material sólido é representado por $\rho(\mathbf{x}) = 1$ e o vazio por $\rho(\mathbf{x}) = 0$. Desta forma, a densidade associada a cada ponto do domínio é utilizada para a determinação do tensor constitutivo $E(\mathbf{x})$ do material, que é definido por:

$$E(\mathbf{x}) = \rho^\eta(\mathbf{x})E_0(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

no qual E indica as propriedades de um ponto arbitrário no espaço de projeto, η é um fator de penalização de valores de densidades intermediárias e E_0 representa as propriedades do material sólido. Aqui, as propriedades dos materiais são consideradas constantes no interior dos elementos utilizados para discretizar o domínio do projeto e as variáveis de projeto são as densidades desses elementos. Esta abordagem tem sido amplamente aplicada a problemas com múltiplas restrições, múltiplos princípios físicos e múltiplos materiais. Suas principais desvantagens, porém, são a ocorrência de instabilidades numéricas e complexidade computacional.

Na classe dos métodos que consideram malhas variáveis durante o processo de otimização destacam-se os métodos evolutivos ESO, AESO e BESO.

Na abordagem ESO, do inglês *Evolutionary Structural Optimization*, o domínio de projeto é discretizado utilizando uma malha de elementos finitos e, com base em critérios capazes de estimar a contribuição de cada elemento na resposta do sistema, os elementos que possuem menor sensibilidade são removidos. Então, ao final do processo, a configuração ótima é obtida como um subconjunto ótimo da malha original de elementos finitos.

Historicamente, o método ESO foi apresentado pela primeira vez por Xie & Steven (1997). Ele possui como principais atrativos uma formulação intuitivamente simples e uma implementação relativamente fácil. Entretanto, a ocorrência de extremidades dentadas e de interconexões estruturais originando problemas de concentração de tensão, além de sua concepção essencialmente unidirecional, isto é,

permitindo apenas a remoção de elementos e impedindo a restituição dos elementos removidos durante a iteração, revelaram ser as suas principais desvantagens. Para corrigir estes problemas, uma melhoria no método foi apresentada por Querin *et al.* (2000a) na qual a estrutura evolui de um leiaute estrutural mínimo necessário para resistir às cargas aplicadas, desconsiderando a magnitude da tensão efetiva. O material é então acrescentado nas regiões de alta concentração de tensão de modo a amenizar o seu efeito. Este procedimento conduz a um leiaute final ótimo e é conhecido como o ESO aditivo ou AESO, do original em inglês *Additive Evolutionary Structural Optimization*. Uma abordagem mais atualizada do método AESO foi posteriormente desenvolvida por Kim *et al.* (2003).

Quase em simultâneo, uma variação do método, que combina o básico dos métodos ESO e AESO, denominado bidirecional ESO ou BESO, do inglês *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*, foi proposta por Yang *et al.* (1999a, 1999b) e Querin *et al.* (2000b). O método BESO trabalha removendo elementos com baixos valores de sensibilidade e acrescentando elementos com altos valores de sensibilidade. Entretanto, a utilização de uma taxa evolucionária de adição e outra de remoção de material, de maneira sucessiva, mostraram-se problemáticas, uma vez que as seleções destas taxas influenciam na determinação do leiaute ótimo e, em adição, devido à falta de rigor teórico, o processo subjacente ao método ESO/BESO faz com que seja difícil resolver problemas multifísicos e com várias restrições, conforme Sigmund (2001). Além disso, o método ESO/ BESO não é robusto em testes representativos de benchmark, como apontaram Zhou & Rozvany (2001).

Desde o surgimento do método de homogeneização e dos métodos de otimização estrutural evolucionária, muitos trabalhos foram apresentados no sentido de aprimorar as técnicas desenvolvidas. Neste sentido, Ansola *et al.* (2006) apresentaram uma versão modificada do método ESO para a otimização topológica da máxima rigidez de estruturas contínuas submetidas a diferentes combinações de forças de corpo e de cargas fixas. Eles propuseram um fator de correção para calcular a sensibilidade e aumentar a convergência do algoritmo proposto.

Mais recentemente, Zhu *et al.* (2007) utilizaram o método do elemento substituível e introduziram com sucesso a chamada técnica de controle de posição para otimização topológica evolucionária de estruturas. Eles apresentaram também um novo algoritmo que atua completando ou eliminando elementos, evitando assim problemas de tabuleiro de xadrez. Também em 2007, Ansola *et al.* propuseram uma versão modificada do procedimento de otimização estrutural evolucionária, ESO, para

aplicação na otimização topológica de mecanismos flexíveis. Para evitar a formação indesejada de padrões de xadrez foi utilizada a clássica técnica de alisamento, freqüentemente adotada quando a otimização topológica evolucionária é aplicada.

Além das abordagens clássicas citadas acima, uma abordagem também evolutiva, chamada adaptatividade reversa, foi proposta por Reynolds *et al.* (1999). Nesta abordagem, para cada iteração evolucionária, um contorno de tensão é obtido na estrutura atual. Esta curva de nível é então utilizada como um molde para a estrutura modificada e daí uma nova malha é gerada para reduzir o custo computacional ou aumentar a resolução nas proximidades do contorno estrutural. A dificuldade desta abordagem está na determinação de um modo automático para a identificação do contorno adequado e para gerar a nova malha no interior da região selecionada.

Outro método relacionado ao tema é o chamado método bolha e foi proposto por Eschenauer *et al.* (1994). Neste método, as então chamadas funções características das tensões, deformações e deslocamentos são empregadas para determinar a colocação ou inserção de furos de forma conhecida na melhor posição possível da estrutura, assim modificando a topologia estrutural na forma prescrita. Em tal caso, a topologia para um dado projeto é resolvida antes de suas alterações posteriores.

A otimização estrutural é um ramo em franca expansão, de modo que dentro de cada uma das abordagens listadas acima existem várias técnicas propostas para resolver determinados tipos de problemas e que possuem vantagens e desvantagens. Para além desta clássica divisão, há uma outra abordagem que tem despertado bastante interesse dos pesquisadores nos últimos anos. Ela é denominada Método do Conjunto-Nível e na seção seguinte descreveremos o seu funcionamento e sua evolução histórica.

2.2.6 Método do Conjunto Nível (*Level Set Method*)

O método do conjunto-nível, do inglês *Level Set Method*, é uma nova abordagem para a otimização topológica na qual as mudanças topológicas são realizadas através do movimento, fusão, expansão e evolução do conjunto-nível zero (contorno). A função conjunto-nível é geralmente definida como a função distância com sinal de um ponto arbitrário no domínio do projeto. As regiões com diferentes

valores da função conjunto-nível são colocadas com diferentes materiais, de acordo com a distribuição de material ou como a topologia é descrita. No tradicional método do conjunto-nível, a evolução dos contornos é governada pela velocidade de movimento e controlada por uma equação diferencial parcial de “Hamilton-Jacobi”.

O método do conjunto-nível foi introduzido por Osher & Sethian (1988) como uma ferramenta numérica capaz de controlar frentes de propagação e fronteiras livres com velocidade curvatura-dependente. Neste método, a curva ou superfície que forma implicitamente uma fronteira é expressa como o conjunto de pontos no nível zero de uma função φ , portadora de dimensão mais elevada. A partir daí o desenvolvimento da fronteira é acompanhado através da evolução da função φ . A função φ , também chamada função do conjunto-nível, é definida da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) > 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega - \partial\Omega \\ \varphi(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \varphi(\mathbf{x}) < 0, & \forall \mathbf{x} \in D - \Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

onde D denota o domínio do projeto e $\partial\Omega$ representa a interface entre o domínio material e o domínio vazio. Um esboço do domínio e a correspondente representação do conjunto-nível são mostrados na Fig. 2.6.

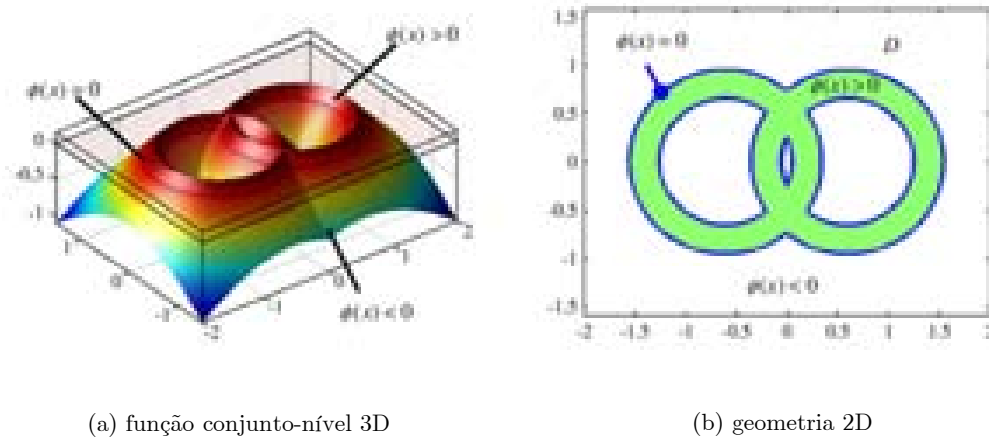


Figura 2.6 - Contorno 2D incorporado ao conjunto-nível zero de uma função do conjunto-nível 3D

Fonte: de Chen *et al.*(2010)

Para uma descrição detalhada do método do conjunto-nível sugere-se consultar Osher & Sethian (1988) e Sethian & Wiegmann (1999).

Nas duas últimas décadas, os métodos de conjunto-nível prosperaram como ferramentas poderosas para muitas aplicações em diferentes campos. Sethian &

Wiengmann (1999) foram os primeiros a combinar métodos de conjunto-nível e o método de interface imersa para o projeto do contorno estrutural, os quais foram inicialmente utilizados para representar os limites geométricos do projeto e mais tarde para a análise elástica. Osher & Santosa (2001) introduziram o gradiente de forma do funcional objetivo no modelo de conjunto-nível e estabeleceram uma ligação entre o gradiente de forma e o campo de velocidade. Este trabalho foi posteriormente completado por Allaire *et al.* (2002) e por Allaire *et al.* (2004), que derivaram a forma da sensibilidade para o problema de flexibilidade e mostraram as vantagens geométricas empregando o método da variável adjunta. Haber (2004) propôs pela primeira vez um método de conjunto-nível multinível para otimização de autovalores em problemas de otimização de forma, em que a resposta de frequência de uma membrana é maximizada/minimizada encontrando-se a distribuição ótima da densidade de material.

Mais recentemente, Wang & Wang (2006) e em seguida Lou *et al.* (2007) estenderam o método do conjunto-nível convencional através da incorporação das Funções de Base Radial (RBFs), empregadas na montagem de dados dispersos e aproximação de funções para, parametricamente, aproximar a função conjunto-nível. O método de otimização conjunto-nível+RBF transforma o método do conjunto-nível convencional em um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Desta forma, o problema original de valor inicial tempo-dependente é transformado em um problema de otimização para os valores ótimos dos coeficientes de expansão generalizados. Esta abordagem não só contorna a grande deficiência da condição de estabilidade associada com métodos conjunto-nível, mas também permite a otimização topológica estrutural em grande escala, através da utilização de algoritmos de otimização mais eficientes, tais como critérios de otimalidade (OC) e assíntotas móveis (MMA).

Luo *et al.* (2009a) propuseram um método alternativo de conjunto-nível para otimização topológica e de forma de estruturas contínuas. Um modelo implícito de representação de contorno livre é estabelecido pela incorporação do limite estrutural no conjunto-nível zero de uma função conjunto-nível de dimensão superior. Um esquema de parametrização explícita para a superfície do conjunto-nível usando funções de base radial com suporte compacto é utilizado. Nesta abordagem, o problema de otimização de forma e topológica originalmente mais difícil, governado pela equação diferencial parcial temporal/espacial de Hamilton-Jacobi, é transformado em uma otimização dimensional relativamente fácil dos coeficientes de

expansão das funções de base. O projeto de otimização é convertido em um processo numérico iterativo que combina a parametrização com a derivação da sensibilidade de forma das funções de projeto, de modo a permitir o uso de algoritmos de programação matemática para resolver o problema de projeto baseado no método do conjunto-nível e assim evita resolver diretamente a equação Hamilton-Jacobi. Além disso, um esquema de integração numericamente mais estável e eficiente é proposto para implementar os cálculos das derivadas de forma, levando à criação de novos furos que são gerados inicialmente ao longo da fronteira e, em seguida, propagando-se para o interior do domínio de projeto.

Em 2010, Chen *et al.* apresentaram uma abordagem fundamentada no método do conjunto-nível para o projeto ótimo de coletores de energia baseados em vibração piezoelétrica. A idéia é captar a energia mecânica liberada em micro-sistemas, transformá-la em energia elétrica através do efeito piezoelétrico direto, e utilizá-la para alimentar o próprio sistema. O problema é reformulado como um problema variacional baseado no conceito de otimização topológica, onde a geometria ótima é encontrada pela maximização da eficiência de conversão energética do dispositivo. Para garantir eficiência computacional, o gradiente de forma da eficiência de conversão energética é derivado analiticamente usando a derivada material em relação ao tempo e o método da variável adjunta. O método do conjunto-nível ajustado, do inglês *reconciled level set* (RLS), é empregado para resolver problemas de otimização topológica e de forma multi-material usando o operador Merriman-Bence-Osher (MBO).

Uma das principais vantagens dos métodos de conjunto-nível reside na sua capacidade de descrever precisamente os contornos fechados com variações dinâmicas, o que permite a fácil "captura" do contorno no sistema euleriano de coordenadas. Desta forma, conforme Yamada *et al.* (2010), formas complexas e mudanças topológicas podem ser tratadas e as estruturas ótimas obtidas são livres de tons de cinza, uma vez que os limites estruturais são representados como as iso-superfícies da função conjunto-nível. Estes e outros aspectos tornam o método do conjunto-nível uma ferramenta ideal para a modelagem de fenomenos variantes no tempo, como o inflar de um *airbag*, ou uma gota de óleo flutuando na água.

É importante salientar, no entanto, que as dificuldades numéricas relacionadas às condições CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), esquema de extensão de velocidade e processo de reinicialização limitam a aplicação do método do conjunto-nível para

problemas de otimização de forma e topológica, pois os complicados procedimentos de solução da equação de Hamilton-Jacobi estão frequentemente envolvidos nestes procedimentos numéricos. Em particular, o projeto final depende do valor inicial, porque nenhum mecanismo de nucleação é incluído para criar novos furos no domínio de projeto. Para superar essas dificuldades numéricas, várias parametrizações ou métodos equivalentes de conjunto-nível que não utilizam as equações de Hamilton-Jacobi, estão em desenvolvimento. Maiores detalhes sobre estes problemas podem ser encontrados em Belytschko *et al.* (2003), Haber (2004), Lou *et al.* (2007) e Lou *et al.* (2009b).

2.2.7 Otimização Aplicada a Problemas Termomecânicos

Existem poucos trabalhos disponíveis sobre otimização topológica de sistemas térmicos, mas um número considerável de artigos sobre métodos de análise de sensibilidade de projeto (DSA), do inglês *design sensitivity analysis*, está disponível. Neste sentido, Tortorelli *et al.* (1989a) derivaram o modelo de sensibilidade de projeto para problemas de condução de calor transiente não linear usando o método dos multiplicadores de Lagrange e em seguida Tortorelli & Haber (1989b) abordaram o mesmo problema utilizando o método adjunto. Yang (1993) derivou a forma das expressões de sensibilidade de projeto para problemas termomecânicos aplicando uma abordagem material derivada dos campos de temperatura e deslocamento. Michaleris *et al.* (1995) desenvolveram uma análise de sensibilidade para os processos termo-elasto-plástico em estruturas de referência Lagrangiana. No entanto, eles utilizaram um algoritmo de atualização de tensão (totalmente implícito na forma inversa do tensor de Euler) que é computacionalmente menos eficiente do que o algoritmo de retorno radial e, assim, o algoritmo de sensibilidade desenvolvido foi aplicado apenas para o caso bidimensional. Sluzalec *et al.* (1996) empregaram uma transformação de Kirchhoff para derivar expressões de sensibilidade de projeto para problemas de condução do calor não linear, usando o método da variável adjunta e Jog (1996) desenvolveu uma técnica de otimização topológica para problemas de termo-elasticidade também não linear com o método do perímetro.

Utilizando uma abordagem evolucionária, Li *et al.* (1999) realizaram um método de otimização topológica discreto usando o método ESO. Lewis & Ransing (2000) analisaram a influência dos valores dos coeficientes de transferência de calor interfacial e, utilizando o conhecimento de que muitas decisões sobre projeto de alimentação, tais como isolamento, refrigeração, espessura de revestimento etc, influenciam diretamente nos valores dos coeficientes de transferência de calor interfacial, utilizaram a correlação Lewis-Ransing para vincular o modelo de tensão com um modelo de otimização para o projeto de alimentação ótima. Bobaru & Mukherjee (2002) utilizaram o método do elemento livre de Galerkin na formulação DSA para sólidos termo-elásticos e o aplicaram a problemas de otimização de forma em análise térmica.

Já em 2004, Song *et al.* estenderam o trabalho de Michaleris *et al.* (1995) através de um esquema computacional para otimizar processos termo-elasto-plástico fracamente acoplados quasi-estáticos de estruturas Lagrangianas tridimensionais. Formulações de sensibilidade foram desenvolvidas a partir do algoritmo de retorno radial, baseadas em equações de elementos finitos para problemas termo-elasto-plástico utilizando o método de diferenciação direta. Os resultados foram validados por comparação com os cálculos de sensibilidade por diferença finita. Para realizar a otimização, Song *et al.* (2004) utilizaram o método *line search* BFGS.

Em seguida, Chen & Tong (2005) aplicaram técnicas de otimização estrutural para realizar a análise de sensibilidade em problemas termomecânicos acoplados em materiais funcionalmente graduados. Eles empregaram o método de elementos finitos proposto por Kim & Paulino (2002) para estudar a transferência de calor e a análise estrutural. Ainda no mesmo ano, Cho & Choi (2005) desenvolveram um método adjunto unificado de análise de sensibilidade de projeto (DSA), para problemas termo-mecânico fracamente acoplados. Expressões de sensibilidade de projeto em relação à condutividade térmica e módulo de Young foram derivadas. Eles conseguiram uma redução significativa no custo computacional utilizando uma equação adjunta de campo acoplado, definida sobre o campo de deslocamento e obtida como um campo adjunto de carga e temperatura. No ano seguinte, Gersborg-Hansen & Bendsøe (2006) compararam os resultados da otimização de dois problemas de condução de calor que foram resolvidos pelo método dos elementos finitos e pelo método de volumes finitos, respectivamente.

Mais recentemente, Bruns (2007) avaliou um problema de otimização topológica de transferência de calor não-linear em estado estacionário, sem contabilização explícita do movimento de fluido. Neste trabalho, Bruns (2007) leva em conta os fenômenos da condução, convecção e radiação, discute a origem do problema de instabilidade numérica provocado pela convecção e apresenta um método para evitá-lo. Ainda em no mesmo ano, Silva (2007) abordou o problema de otimização topológica de estruturas 2D empregando um processo de refino h -adaptativo.

Nos anos seguintes, Gao *et al.* (2008) formularam um procedimento de otimização topológica para lidar com problemas de condução de calor em regime estacionário sob condição de carga fixa (ou projeto-independente) e carga projeto-dependente. Na fase de análise de sensibilidade, tanto a matriz de condutividade térmica quanto a carga de geração de calor projeto-dependente, associadas com o elementos vazios são penalizados da mesma maneira. Além disso, como a sensibilidade da função objetivo muda seu sinal durante a iteração, um procedimento BESO modificado foi apresentado por Gao *et al.* (2008) para lidar com a não-monotonicidade da função objetivo. Giusti *et al.* (2009) apresentou uma fórmula fechada para a sensibilidade do tensor de condutividade térmica efetiva em problemas bidimensionais. A fórmula é obtida aplicando-se o conceito de derivada topológica, utilizando, para tanto, princípios variacionais multi-escala para a condução de calor em estado estacionário.

Como mencionado no final do subitem 2.2.4.2, atualmente há uma crescente utilização de abordagens em otimização via *level set method*, em um esforço para solucionar problemas que não são eficazmente resolvidos pelos métodos convencionais de otimização. Assim, nessa direção, Zhuang *et al.* (2007) apresentaram uma abordagem numérica de otimização topológica para problemas de condução de calor sujeitos a múltiplos carregamentos térmicos. A abordagem empregada se baseou no método conjunto-nível, (*level set method*) nos quais os processos de otimização são atualizados com a então chamada derivada topológica, utilizando para tanto o método das diferenças finitas.

Capítulo 3

Otimização Topológica de Estruturas Termoelásticas 3D

3.1 Introdução

Neste capítulo, as equações e as correspondentes expressões de sensibilidade dos campos térmico e mecânico de sistemas termoelásticos fracamente acoplados são derivadas. A abordagem de otimização topológica aqui apresentada é aplicada a estruturas 3D submetidas a carregamento térmico em regime estacionário, isto é, sem variação no tempo, e leva em conta os efeitos da condução e da convecção do calor. A carga mecânica é suposta distribuída.

O problema de otimização é resolvido aplicando-se o Método do Lagrangiano Aumentado, que consiste na solução de uma sequência de problemas de mínimo com restrições do tipo caixa e é resolvido por um método de projeção de segunda ordem que utiliza o método quase-Newton sem memória durante o processo de solução do problema, ver apêndice A.

3.2 Definição do Problema

3.2.1 Determinação do Problema Térmico

O problema térmico a ser resolvido neste trabalho pode ser ilustrado como na Fig.3.1 abaixo:

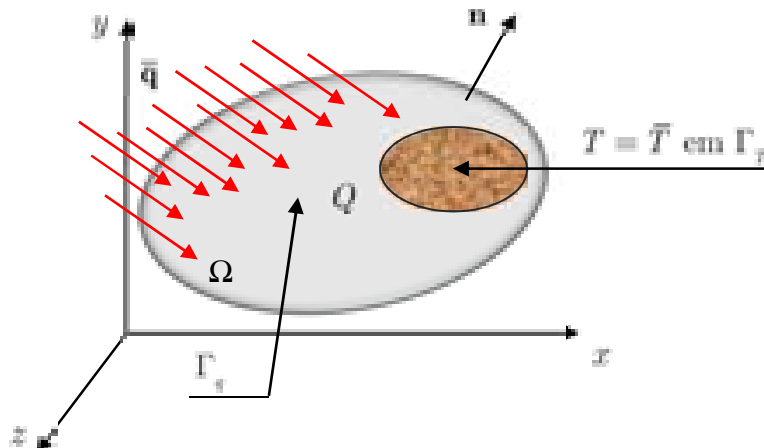


Figura 3.1: - Descrição do Problema Térmico

Sendo Ω o domínio do corpo e $\partial\Omega$ o contorno do domínio, definimos:

$\Gamma_T \rightarrow$ parte do contorno com uma temperatura prescrita, ou seja, $T = \bar{T}$;

$\Gamma_q \rightarrow$ parte do contorno com um fluxo de calor prescrito $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_n$;

$Q \rightarrow$ fonte de calor interno (calor gerado) por unidade de volume e tempo; taxa de geração interna de calor ou fonte são proporcionadas, por exemplo, por resistência à corrente elétrica e reações químicas;

$\mathbf{n} \rightarrow$ vetor normal unitário a um plano tangente estacionário em um ponto da superfície do contorno $\partial\Omega$.

Em relação ao contorno, devemos ter as seguintes condições:

$$\partial\Omega = \Gamma_T \cup \Gamma_q \quad \text{e} \quad \Gamma_T \cap \Gamma_q = \emptyset.$$

Definimos agora os seguintes conjuntos que representam os campos de temperatura real e virtual, respectivamente:

(i) Conjunto das temperaturas admissíveis (H_T):

$$H_T = \left\{ T \mid T \text{ é suf. regular, } T(\mathbf{x}) = \bar{T}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Gamma_T \right\} \quad (3.1)$$

$$H_T = \left\{ \bar{T} + H_{oT} \right\} \quad (3.2)$$

(ii) Conjunto das variações das temperaturas admissíveis (H_{oT}):

$$H_{oT} = \left\{ \hat{T} \mid \hat{T} \text{ é suf. regular, } \hat{T}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in \Gamma_T \right\}. \quad (3.3)$$

Definimos também o termo fonte de calor interno (ou taxa de geração de calor interno) como o escalar $Q = \rho r$, sendo r é a taxa de calor gerado por unidade de massa e ρ é densidade mássica do corpo. Além disso, como o processo de transferência de calor é dividido em uma parte condutiva e outra convectiva, temos:

$$\bar{q}_n = \bar{q}_{0n} \quad \text{em } \Gamma_{qq} \quad \text{e} \quad \bar{q}_n = -h(T - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_{qh} \quad (3.4)$$

sendo T a temperatura da estrutura, T_∞ a temperatura fora da camada limite térmica do fluido, h o coeficiente convectivo de transferência de calor e Γ_{qq} e Γ_{qh} os contornos condutivo e convectivo, respectivamente. Além disso,

$$\Gamma_{qq} \cup \Gamma_{qh} = \Gamma_q. \quad (3.5)$$

Notemos ainda que se $T > T_\infty$ então o calor é removido da estrutura, isto é, escoia para o meio por convecção; se, por outro lado, $T < T_\infty$ então o calor é cedido do meio para a estrutura.

3.2.2 Determinação do Problema Mecânico

O problema mecânico está representado na Fig. 3.2 a seguir:

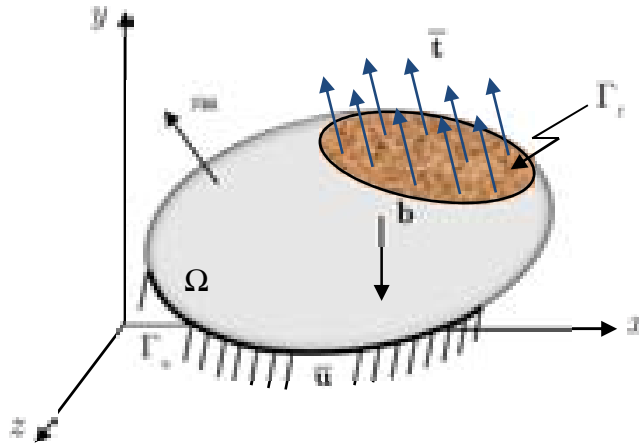


Figura 3.2: - Descrição do Problema Mecânico.

$\Gamma_u \rightarrow$ parte do contorno sujeito a um deslocamento prescrito, isto é, $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$;

$\Gamma_t \rightarrow$ parte do contorno com uma tração prescrita, isto é, $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$;

$\mathbf{b} \rightarrow$ vetor força de corpo por unidade de volume;

Além disso, deve-se ter: $\partial\Omega = \Gamma_t \cup \Gamma_u$ e $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$.

De modo análogo ao caso térmico, definimos os seguintes conjuntos:

(i) Conjunto dos deslocamentos admissíveis (H):

$$H = \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ é suf. regular, } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (3.6)$$

$$H = \left\{ \bar{\mathbf{u}} + H_o \right\} \quad (3.7)$$

(ii) Conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis (H_o):

$$H_o = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ é suf. regular, } \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_u \right\} \quad (3.8)$$

e,

$$\sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t. \quad (3.9)$$

Como resultado das equações (3.1), (3.2), (3.3), (3.6), (3.7) e (3.8) podemos decompor os campos de deslocamento e temperatura como:

$$U = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in H_o \quad \text{e} \quad T = \bar{T} + T', \quad T' \in H_{oT} \quad (3.10)$$

sendo U e T os campos de deslocamento e temperatura, respectivamente.

3.3 Equação Constitutiva Termoelástica

A aplicação da lei de Hooke generalizada para o problema termomecânico resulta na equação,

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} - (T - T_0) \beta_{ij} \quad (3.11)$$

na qual σ_{ij} , D_{ijkl} , ε_{kl} e β_{ij} denotam, o tensor tensão, o tensor constitutivo, o tensor deformação e o tensor de tensões térmicas, respectivamente. O termo $T - T_0$ representa a diferença entre a temperatura atual, T , e a temperatura de referência ou temperatura da estrutura antes carregamento térmico, T_0

No caso de material denso (sem porosidade) e isotrópico, tem-se que:

$$\beta_{ij} = \beta_0 \delta_{ij} \quad , \quad \beta_0 = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu} \quad (3.12)$$

sendo β_0 o coeficiente de tensões térmicas, δ_{ij} o delta de Kronecker, α uma propriedade do material, denominada coeficiente de dilatação (expansão) térmica, E o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

A equação constitutiva termoelástica tridimensional para o material denso é dada por,

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.13)$$

na qual λ e μ são os coeficientes de Lamé, dados por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.14)$$

A inversa da equação constitutiva para material isotrópico pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{kl} = -\frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}. \quad (3.15)$$

Para utilização da microestrutura porosa do tipo SIMP, faz-se necessário uma modificação (correção) no módulo de Young E e no coeficiente de dilatação térmica α , tal que:

$$E_\rho = \rho^\eta E \quad \text{e} \quad \alpha_\rho = \rho^{2\eta} \alpha \quad (3.16)$$

sendo η o parâmetro de penalidade de densidades intermediárias.

Desse modo, é possível definir os tensores constitutivos de tensões mecânicas e térmicas como,

$$D_{ijkl}^\rho = \rho^\eta D_{ijkl} \quad \text{e} \quad \beta_{ij}^\rho = \rho^{2\eta} \beta_{ij} \quad (3.17)$$

fazendo com que a relação tensão-deformação do material para o problema termomecânico, dada pela expressão (3.11), agora com a utilização da microestrutura porosa (SIMP), assuma a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^\rho \varepsilon_{kl} - (T - T_0) \beta_{ij}^\rho. \quad (3.18)$$

3.3.1 Formulação Forte do Problema

A formulação forte para o problema em discussão pode ser escrita da seguinte maneira:

Determinar $(U, T) \in H \times H_T$, tal que:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{e} \quad -\text{div } \mathbf{q} + Q = \rho c_p \dot{T} \quad (3.19)$$

sendo o escalar $Q = \rho r$, no qual r é a taxa de calor gerado por unidade de massa e

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^\rho \varepsilon_{kl} - (T - T_0) \beta_{ij}^\rho \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla T \quad (3.20)$$

Sujeito às seguintes condições:

- Problema Térmico:

$$\bar{q}_n = \bar{q}_{0n} \quad \text{em } \Gamma_{qq} \quad \text{e} \quad \bar{q}_n = -h(T - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_{qh} \quad (3.21)$$

- Problema Mecânico:

$$\sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.22)$$

A segunda equação na expressão (3.20) é a conhecida Lei de Fourier. No caso de fluxo unidimensional, observa-se fisicamente que o fluxo de calor em uma direção é proporcional à taxa de variação da temperatura T naquela direção, sendo \mathbf{k} um parâmetro que exprime a maior ou menor facilidade que o material apresenta à condução de calor e, por este motivo, denominado coeficiente de condutividade térmica. No caso 3D, \mathbf{k} é a matriz de condutividade térmica e contabiliza as contribuições das variações de temperatura em cada uma das direções x , y e z , enquanto $\nabla \mathbf{T}$ representa o gradiente de temperatura. Esta equação é utilizada para calcular a quantidade de energia transferida por unidade de tempo e o sinal negativo no segundo membro expressa o fato de o calor se transferir na direção da maior para a menor temperatura.

Para o caso tridimensional de material anisotrópico a matriz de condutividade térmica é dada por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx}(x, y, z) & k_{xy}(x, y, z) & k_{xz}(x, y, z) \\ k_{yx}(x, y, z) & k_{yy}(x, y, z) & k_{yz}(x, y, z) \\ k_{zx}(x, y, z) & k_{zy}(x, y, z) & k_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Se as direções cartesianas coincidirem com as direções principais do material, então os termos $k_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$. Além disso, no caso particular de um meio isotrópico (com mesma condutividade térmica em todas as direções), tem-se que $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k$. Neste caso a matriz de condutividade térmica pode ser escrita como:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & k(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & k(x, y, z) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k\mathbf{I}. \quad (3.24)$$

Vale salientar que a matriz \mathbf{k} também deveria ser corrigida de acordo com a densidade do material, de modo que $k = k(\rho)$. Neste trabalho nenhum parâmetro de correção condizente com o modelo SIMP é adotado para a citada matriz.

3.3.2 Formulação Fraca do Problema

- **Problema Térmico:**

Nesta análise estamos considerando dois diferentes tipos de fluxo de calor prescrito:

(i) Fluxo condutivo constante:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_n(\mathbf{x}) = \bar{q}_{on} = cte, \quad \text{com } \mathbf{x} \in \Gamma_{qq}. \quad (3.25)$$

(ii) Fluxo convectivo:

Este fluxo é obtido pela troca de calor do fluido com a temperatura da parede T_s . O fluxo de calor neste caso pode ser expresso como:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_n(\mathbf{x}) = -h(T(\mathbf{x}) - T_\infty), \quad \text{com } \mathbf{x} \in \Gamma_{qh}. \quad (3.26)$$

sendo $T = T_s$ a temperatura da parede.

Objetiva-se então determinar a temperatura T tal que:

$$-\text{div } \mathbf{q} + Q = \rho c_p \dot{T} \quad (3.27)$$

com,

$$\mathbf{q} = -k \nabla T = -k \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

e \dot{T} representando a variação de temperatura em relação ao tempo.

Uma vez que o caso analisado é suposto em regime permanente, tem-se

$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = 0$ e daí a eq.(3.27) reduz-se a:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + Q = 0 \quad (3.29)$$

Sujeito às seguintes condições de contorno:

$$T = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_T \quad (3.30)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_n \quad \text{em } \Gamma_{qq} \quad (3.31)$$

$$f(\mathbf{x}) = \bar{q}_n = -h(T(\mathbf{x}) - T_\infty), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{qh} \quad (3.32)$$

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T. \quad (3.33)$$

sendo T_0 a temperatura de referencia do corpo, considerada em geral como sendo a temperatura de montagem da estrutura, ou seja, antes do carregamento térmico.

Multiplicando a equação de equilíbrio térmico dada em (3.29) pela função peso \hat{T} (temperatura virtual) e integrando-a sobre o domínio Ω , obtemos:

$$-\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{q}) \hat{T} d\Omega + \int_{\Omega} \rho r \hat{T} d\Omega = 0, \quad \forall \hat{T} \in H_{oT} \quad (3.34)$$

sendo $Q = \rho r$.

Pela regra do produto:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{T}) = \hat{T}\operatorname{div}(\mathbf{q}) + \nabla\hat{T} \cdot \mathbf{q} \quad (3.35)$$

integrando em ambos os lados

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{T}) d\Omega = \int_{\Omega} \hat{T}\operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\hat{T} \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (3.36)$$

substituindo a eq. (3.34) na eq. (3.36), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{T}) d\Omega = \int_{\Omega} \hat{T}\rho r d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\hat{T} \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (3.37)$$

como $\mathbf{q} = -k\nabla T$, a eq. (3.37) transforma-se em:

$$\int_{\Omega} k\nabla\hat{T} \cdot \nabla T d\Omega = \int_{\Omega} \hat{T}\rho r d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{T}) d\Omega. \quad (3.38)$$

Pelo teorema da divergência (Gauss),

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{T}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{q}\hat{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_T} \mathbf{q}\hat{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \mathbf{q}\hat{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.39)$$

Uma vez que $\hat{T} = 0$ em Γ_T tem-se que $\int_{\Gamma_T} \mathbf{q}\hat{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$, e daí:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{T}) d\Omega = \int_{\Gamma_q} \mathbf{q}\hat{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n \hat{T} d\Gamma \quad (3.40)$$

Agora, substituindo a expressão dada pela eq. (3.40) na eq. (3.38) obtemos,

$$\int_{\Omega} k \nabla \hat{T} \cdot \nabla T d\Omega = \int_{\Omega} \rho r \hat{T} d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n \hat{T} d\Gamma \quad (3.41)$$

e como, por (3.21), $\bar{q}_n = \bar{q}_{on}$ em Γ_{qq} e $\bar{q}_n = -h(T - T_{\infty})$ em Γ_{qh} , segue que:

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \hat{T} d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h T \hat{T} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho r \hat{T} d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \hat{T} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{on} \hat{T} d\Gamma, \quad \forall \hat{T} \in H_{oT} \quad (3.42)$$

Como, da eq. (3.10) $T = \bar{T} + T'$, $T' \in H_{oT}$ (temperatura a ser determinada) segue que a eq. (3.42) assume a forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k \nabla T' \cdot \nabla \hat{T} d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h T' \hat{T} d\Gamma &= - \int_{\Omega} k \nabla \bar{T} \cdot \nabla \hat{T} d\Omega + \int_{\Gamma_{qh}} h \bar{T} \hat{T} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho r \hat{T} d\Omega + \\ &- \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \hat{T} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{on} \hat{T} d\Gamma, \quad \forall \hat{T} \in H_{oT} \end{aligned} \quad (3.43)$$

No caso de não haver geração de interna de calor, $r = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k \nabla T' \cdot \nabla \hat{T} d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h T' \hat{T} d\Gamma &= - \int_{\Omega} k \nabla \bar{T} \cdot \nabla \hat{T} d\Omega + \int_{\Gamma_{qh}} h \bar{T} \hat{T} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \hat{T} d\Gamma - \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{on} \hat{T} d\Gamma, \quad \forall \hat{T} \in H_{oT} \end{aligned} \quad (3.44)$$

- **Problema Mecânico:**

Multiplicando a equação de equilíbrio mecânico pela função peso \mathbf{v} (deslocamento virtual) e integrando-a sobre o domínio Ω , obtemos:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_o. \quad (3.45)$$

Sabendo que $\nabla \mathbf{v}$ é o tensor deformação virtual, e que o mesmo, por ser simétrico, pode ser rearranjado e conseqüentemente utilizado no formato de vetor, podemos escrevê-lo como $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \nabla \mathbf{v}$. Agora, pela regra do produto obtém-se

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.46)$$

Reordenando a expressão anterior resulta,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.47)$$

substituindo a eq. (3.47) na eq.(3.45), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in H_0 \quad (3.48)$$

e novamente pelo teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (3.49)$$

Conseqüentemente, substituindo a eq. (3.49) na eq.(3.48), tem-se:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in H_0. \quad (3.50)$$

Agora, substituindo $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{\rho} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - (T - T_0) \boldsymbol{\beta}^{\rho}$ em (3.50) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}^{\rho} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\Omega} (T - T_0) \boldsymbol{\beta}^{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in H_0 \quad (3.51)$$

Novamente da equação (3.10) temos $T = \bar{T} + T'$, $T' \in H_{oT}$ e então:

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}^{\rho} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} T' \boldsymbol{\beta}^{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\Omega} (\bar{T} - T_0) \boldsymbol{\beta}^{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in H_0 \quad (3.52)$$

3.4 Aproximação pelo Método dos Elementos Finitos

O problema termomecânico em estudo é generalizado para estruturas tridimensionais e solucionado com a aplicação do Método dos Elementos Finitos de

Galerkin, que utiliza elementos finitos tetraédricos isoparamétricos de quatro nós, aqui chamado Tetra4. Este elemento interpola tanto as variáveis do campo de deslocamentos (u, v, w) , quanto a densidade relativa ρ e a temperatura T , Fig. 3.4.

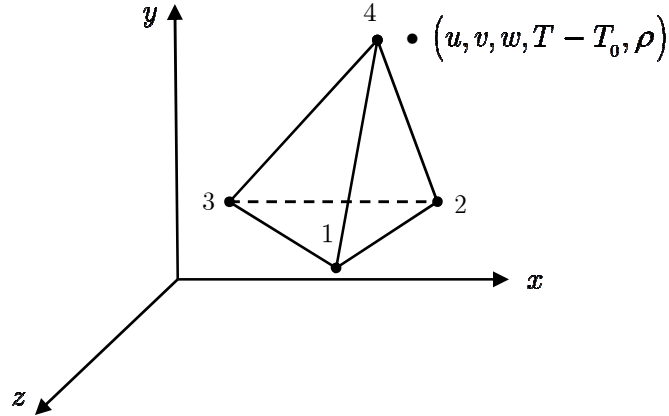


Figura 3.3 – Elemento Finito Tetra 4.

A descrição do campo de deslocamento e de temperatura do problema supracitado faz uso de quatro graus de liberdade por nó, sendo três de deslocamentos e um de temperatura. Assim, denotando-se por \mathbf{q}^e o vetor de graus de liberdade do elemento do problema acoplado, tem-se:

$$\mathbf{q}^e = \left[u^1 \quad v^1 \quad w^1 \quad T^1 \quad u^2 \quad v^2 \quad w^2 \quad T^2 \quad u^3 \quad v^3 \quad w^3 \quad T^3 \quad u^4 \quad v^4 \quad w^4 \quad T^4 \right]^T \quad (3.53)$$

o qual pode ser particionado em dois vetores, obtendo-se,

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{q}_u^e + \mathbf{q}_T^e \quad (3.54)$$

sendo \mathbf{q}_u^e o vetor de deslocamentos nodais do elemento e definido e como

$$\mathbf{q}_u^e = \left[u^1 \quad v^1 \quad w^1 \quad 0 \quad u^2 \quad v^2 \quad w^2 \quad 0 \quad u^3 \quad v^3 \quad w^3 \quad 0 \quad u^4 \quad v^4 \quad w^4 \quad 0 \right]^T \quad (3.55)$$

e \mathbf{q}_T^e representando o vetor de temperaturas nodais e definido por:

$$\mathbf{q}_T^e = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad T^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T^4 \right]^T \quad (3.56)$$

Assim, utilizando-se os vetores \mathbf{q}_u^e e \mathbf{q}_T^e , juntamente com as matrizes de função de forma, os campos de temperatura e de deslocamento podem ser interpolados utilizando-se o Método dos Elementos Finito.

Neste ponto, definimos o vetor de graus de liberdade global da seguinte forma:

$$\mathbf{U} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{q}^e \quad (3.57)$$

sendo \bigcup o operador união e tendo a função de realizar a união de todos os graus de liberdade em \mathbf{q}^e , $e = 1, 2, \dots, n_e$.

- **Interpolação do Campo de Deslocamento**

Definimos o vetor de deslocamentos, \mathbf{u} , de um ponto \mathbf{x} de coordenadas (x, y, z) do domínio Ω , por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega \quad (3.58)$$

Daí, o campo de deslocamentos é aproximado pelo Método dos Elementos Finitos da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(x, y, z) \approx \mathbf{u}^e(x, y, z) = \mathbf{N}_u^e(x, y, z) \mathbf{q}_u^e; \quad \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (3.59)$$

sendo Ω_e o domínio do elemento, \mathbf{q}_u^e o vetor de deslocamentos nodais do elemento, como definido em (3.55), e \mathbf{N}_u^e a matriz de funções de forma a ser aplicada no campo de deslocamentos, a qual é definida por:

$$\mathbf{N}_u^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & 0 & N_4^e & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

De modo análogo, define-se o campo de deslocamento virtual como:

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e = \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{q}}_u^e \quad (3.61)$$

no qual o vetor de deslocamentos nodais virtuais do elemento, $\hat{\mathbf{q}}_u^e$, é definido de maneira semelhante ao vetor \mathbf{q}_u^e .

- **Interpolação do Campo de Deformação**

Tal como o tensor tensão, o tensor deformação 3D, por seu caráter simétrico, pode ser escrito na forma vetorial como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & 2\varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{xz} & 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (3.62)$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_u \mathbf{u} = \nabla_u \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

em que o operador diferencial ∇_u é uma matriz a ser aplicada sobre o vetor de deslocamentos, sendo definida por:

$$\nabla_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Aproximando o campo de deformação pelo Método dos Elementos Finitos, obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_u \mathbf{u} \approx \nabla_u \mathbf{u}^e = \nabla_u \mathbf{N}_u^e \mathbf{q}_u^e = \mathbf{B}_u^e \mathbf{q}_u^e \quad (3.65)$$

e o campo virtual,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla_u \mathbf{v} \approx \nabla_u \mathbf{v}^e = \nabla_u \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{q}}_u^e = \mathbf{B}_u^e \hat{\mathbf{q}}_u^e = \mathbf{B}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e \quad (3.66)$$

no qual $\mathbf{B}_u^e = \nabla_u \mathbf{N}_u^e$ é a chamada matriz deformação-deslocamento e definida como:

$$\mathbf{B}_u^e = \begin{bmatrix} N_{1,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,x}^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,y}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,z}^e & 0 \\ N_{1,y}^e & N_{1,x}^e & 0 & 0 & N_{2,y}^e & \partial N_{2,x}^e & 0 & 0 & N_{3,y}^e & N_{3,x}^e & 0 & 0 & N_{4,y}^e & N_{4,x}^e & 0 & 0 \\ N_{1,z}^e & 0 & N_{1,x}^e & 0 & N_{2,z}^e & 0 & N_{2,x}^e & 0 & N_{3,z}^e & 0 & N_{3,x}^e & 0 & N_{4,z}^e & 0 & N_{4,x}^e & 0 \\ 0 & N_{1,z}^e & N_{1,y}^e & 0 & 0 & N_{2,z}^e & N_{2,y}^e & 0 & 0 & N_{3,z}^e & N_{3,y}^e & 0 & 0 & N_{4,z}^e & N_{4,y}^e & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

sendo $N_{i,j}^e = \frac{\partial N^e}{\partial j}$, com $i = 1, \dots, 4$ e $j = x, y, z$. Além disso, para evitar o problema de travamento do elemento tetraédrico linear, faz-se um esquema de integração seletiva, sendo necessária a partição da matriz deformação-deslocamento \mathbf{B}_u^e , de modo que:

$$\mathbf{B}_u^e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{vol}^e \\ \mathbf{B}_{dev}^e \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

sendo \mathbf{B}_{vol}^e a matriz deformação-deslocamento volumétrica, definida por:

$$\mathbf{B}_{vol}^e = \begin{bmatrix} N_{1,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,x}^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,y}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,z}^e & 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

e \mathbf{B}_{dev}^e a matriz deformação-deslocamento deviatórica (desviadora), definida como:

$$\mathbf{B}_{dev}^e = \begin{bmatrix} N_{1,y}^e & N_{1,x}^e & 0 & 0 & N_{2,y}^e & N_{2,x}^e & 0 & 0 & N_{3,y}^e & N_{3,x}^e & 0 & 0 & N_{4,y}^e & N_{4,x}^e & 0 & 0 \\ N_{1,z}^e & 0 & N_{1,x}^e & 0 & N_{2,z}^e & 0 & N_{2,x}^e & 0 & N_{3,z}^e & 0 & N_{3,x}^e & 0 & N_{4,z}^e & 0 & N_{4,x}^e & 0 \\ 0 & N_{1,z}^e & N_{1,y}^e & 0 & 0 & N_{2,z}^e & N_{2,y}^e & 0 & 0 & N_{3,z}^e & N_{3,y}^e & 0 & 0 & N_{4,z}^e & N_{4,y}^e & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

• Interpolação do Campo de Temperatura

A aproximação para o campo de temperatura é dada por:

$$T(\mathbf{x}) = T(x, y, z) \approx T^e(x, y, z) = \mathbf{N}_T^e(x, y, z) \mathbf{q}_T^e; \quad \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (3.71)$$

sendo \mathbf{N}_T^e a matriz de funções de forma a ser aplicada no campo de temperatura e definida pela equação,

$$\mathbf{N}_T^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_1^e & 0 & 0 & 0 & N_2^e & 0 & 0 & 0 & N_3^e & 0 & 0 & 0 & N_4^e \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Desta forma, tem-se:

$$T^e \approx \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}^e = \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}_T^e, \quad \bar{T} \approx \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}_{\bar{T}}^e \quad \text{e} \quad (\bar{T} - T_0) \approx \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}_{\bar{T}_0}^e \quad (3.73)$$

em que os vetores $\mathbf{q}_{\bar{T}}^e$ e $\mathbf{q}_{\bar{T}_0}^e$ definidos, respectivamente, como:

$$\mathbf{q}_{\bar{T}}^e = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{T}^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{T}^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{T}^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{T}^4 \right]^T \quad (3.74)$$

$$\mathbf{q}_{T_0}^e = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad (\bar{T}^1 - T_0^1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (\bar{T}^2 - T_0^2) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (\bar{T}^3 - T_0^3) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (\bar{T}^4 - T_0^4) \right]^T \quad (3.75)$$

Agora, obtém-se o campo de gradiente de temperatura tomando-se o gradiente da eq.(3.71), isto é:

$$\nabla_T T(x, y, z) \approx \nabla_T T^e(x, y, z) = \nabla_T \mathbf{N}_T^e(x, y, z) \mathbf{q}_T^e = \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}_T^e = \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}^e \quad (3.76)$$

Daí,

$$\nabla T' \approx \nabla T^e = \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}_T^e = \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}^e \quad (3.77)$$

$$\nabla \bar{T} \approx \nabla_T \bar{T}^e = \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}_{\bar{T}}^e \quad (3.78)$$

sendo \mathbf{B}_T^e a matriz das derivadas das funções de forma do campo de temperatura e dada por:

$$\mathbf{B}_T^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,x}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,x}^e \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,y}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,y}^e \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{2,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{3,z}^e & 0 & 0 & 0 & N_{4,z}^e \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

De modo análogo deduz-se o campo virtual,

$$\hat{T} \approx \hat{T}^e = \mathbf{N}_T^e \hat{\mathbf{q}}_T^e = \mathbf{N}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e \quad (3.80)$$

$$\nabla \hat{T} \approx \nabla_T \hat{T}^e = \mathbf{B}_T^e \hat{\mathbf{q}}_T^e = \mathbf{B}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e \quad (3.81)$$

3.4.1 Aproximação do Problema Térmico

O problema térmico, representado pela eq. (3.44), será aproximado pelos campos dados pelas equações (3.71)-(3.81), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}^e \cdot \mathbf{B}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}^e \cdot \mathbf{N}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Gamma = & - \int_{\Omega} k \mathbf{B}_T^e \mathbf{q}_{\bar{T}}^e \cdot \mathbf{B}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega + \int_{\Gamma_{qh}} h \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}_{\bar{T}}^e \cdot \mathbf{N}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \mathbf{N}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Gamma - \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{on} \mathbf{N}_T^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Gamma, \quad \forall \hat{T} \in H_{oT} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Agora, reescrevendo a eq. (3.82), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Omega} k [\mathbf{B}_T^e]^T [\mathbf{B}_T^e] d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h [\mathbf{N}_T^e]^T [\mathbf{N}_T^e] d\Gamma \right\} \mathbf{q}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e = - \left\{ \int_{\Omega} k [\mathbf{B}_T^e]^T [\mathbf{B}_T^e] d\Omega \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e \\ & + \left\{ \int_{\Gamma_{qh}} h [\mathbf{N}_T^e]^T [\mathbf{N}_T^e] d\Gamma \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e - \left\{ \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \mathbf{N}_T^e d\Gamma \right\} \hat{\mathbf{q}}^e - \left\{ \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{om} \mathbf{N}_T^e d\Gamma \right\} \hat{\mathbf{q}}^e, \forall \hat{T} \in H_{\circ T} \end{aligned} \quad (3.83)$$

3.4.2 Aproximação do Problema Mecânico

O problema mecânico, dado pela a equação (3.52), será aproximado pelos campos dados pelas equações (3.58)-(3.66) obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{D}^{\rho} \mathbf{B}_u^e \mathbf{q}^e \cdot \mathbf{B}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{N}_T^e \mathbf{q}^e) \boldsymbol{\beta}^{\rho} \cdot \mathbf{B}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{N}_T^e \mathbf{q}_{\bar{T}_0}^e) \boldsymbol{\beta}^{\rho} \cdot \mathbf{B}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega \\ + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{N}_u^e \hat{\mathbf{q}}^e d\Gamma, \forall \mathbf{v} \in H_{\circ} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Reescrevendo a eq. (3.84), obtemos:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \mathbf{D}^{\rho} \cdot \mathbf{B}_u^e d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \boldsymbol{\beta}^{\rho} \otimes \mathbf{N}_T^e d\Omega \right\} \mathbf{q}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e = \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \boldsymbol{\beta}^{\rho} \otimes \mathbf{N}_T^e d\Omega \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}_0}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \\ \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{N}_u^e]^T \mathbf{b} d\Omega \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e + \left\{ \int_{\Gamma_t} [\mathbf{N}_u^e]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right\} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \forall \mathbf{v} \in H_{\circ} \end{aligned} \quad (3.85)$$

3.4.3 Aproximação do Problema Termomecânico Acoplado

A fim de simplificar os cálculos, denotaremos o primeiro membro da expressão (3.83), que descreve o problema térmico, da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{Term}^e = \int_{\Omega} k [\mathbf{B}_T^e]^T [\mathbf{B}_T^e] d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h [\mathbf{N}_T^e]^T [\mathbf{N}_T^e] d\Gamma \quad (3.86)$$

De maneira análoga, a expressão entre chaves no primeiro membro da equação (3.85), que descreve o problema mecânico, será denotada por,

$$\mathbf{K}_{Mec}^e = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \mathbf{D}^{\rho} \cdot \mathbf{B}_u^e d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \boldsymbol{\beta}^{\rho} \otimes \mathbf{N}_T^e d\Omega \quad (3.87)$$

Assim, o primeiro membro da equação do problema termomecânico acoplado é:

$$\mathbf{K}_{Total}^e = \mathbf{K}_{Mec}^e + \mathbf{K}_{Term}^e \quad (3.88)$$

isto é,

$$\mathbf{K}_{Total}^e = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \mathbf{D}^{\rho} \cdot \mathbf{B}_u^e d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \boldsymbol{\beta}^{\rho} \otimes \mathbf{N}_T^e d\Omega + \int_{\Omega} k [\mathbf{B}_T^e]^T [\mathbf{B}_T^e] d\Omega - \int_{\Gamma_{qh}} h [\mathbf{N}_T^e]^T [\mathbf{N}_T^e] d\Gamma \quad (3.89)$$

sendo \mathbf{K}_{Total}^e a matriz de rigidez total do elemento.

Pode-se definir agora a matriz de rigidez global, de modo que:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Total}^e \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

na qual o símbolo \mathbf{A} representa um operador montagem. O operador montagem acima, para o cálculo da matriz de rigidez global, corresponde ao seguinte algoritmo, escrito em pseudocódigo:

Algoritmo

```

K(:, :) = 0
do n=1, ne
    ! Calcular a matriz de rigidez do e-ésimo elemento → [KTotale]
    get Ke(:, :)
    do i=1, ns
        ii=lm(i)
        if (ii/=0) then
            do j=1, ns
                jj=lm(j)
                if (jj/=0) then
                    ! Montagem da matriz de rigidez global
                    K(ii, jj) = K(ii, jj) + Ke(i, j)
                end if
            end do
        end if
    end do
end do

```

sendo ns o número de graus de liberdade do elemento, n_e o número total de elementos e lm o vetor de código do respectivo grau de liberdade.

Agora, analisando o segundo membro da equação térmica dada em (3.83) tem-se:

$$\mathbf{f}_{Térm}^e = - \left\{ \int_{\Omega} k [\mathbf{B}_T^e]^T [\mathbf{B}_T^e] d\Omega \right\} \mathbf{q}_T^e + \left\{ \int_{\Gamma_{qh}} h [\mathbf{N}_T^e]^T [\mathbf{N}_T^e] d\Gamma \right\} \mathbf{q}_T^e - \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \mathbf{N}_T^e d\Gamma - \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{on} \mathbf{N}_T^e d\Gamma \quad (3.91)$$

Da mesma forma, do segundo membro da equação do problema mecânico dada pela eq.(3.85), obtém-se:

$$\mathbf{f}_{Mec}^e = \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \boldsymbol{\beta}^{\rho} \otimes \mathbf{N}_T^e d\Omega \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}_0}^e + \int_{\Omega} [\mathbf{N}_u^e]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} [\mathbf{N}_u^e]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.92)$$

Assim, para o problema acoplado conclui-se que o segundo membro é dado por:

$$\mathbf{f}_{Total}^e = \mathbf{f}_{Mec}^e + \mathbf{f}_{Term}^e \quad (3.93)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Total}^e = & \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_u^e]^T \boldsymbol{\beta}^{\rho} \otimes \mathbf{N}_T^e d\Omega \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}_0}^e + \int_{\Omega} [\mathbf{N}_u^e]^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} [\mathbf{N}_u^e]^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ & - \left\{ \int_{\Omega} k [\mathbf{B}_{\bar{T}}^e]^T [\mathbf{B}_T^e] d\Omega \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}}^e + \left\{ \int_{\Gamma_{qh}} h [\mathbf{N}_T^e]^T [\mathbf{N}_T^e] d\Gamma \right\} \mathbf{q}_{\bar{T}}^e - \int_{\Gamma_{qh}} h T_{\infty} \mathbf{N}_T^e d\Gamma - \int_{\Gamma_{qq}} \bar{q}_{on} \mathbf{N}_T^e d\Gamma \end{aligned} \quad (3.94)$$

sendo \mathbf{f}_{Total}^e a matriz de força total do elemento.

De modo análogo à matriz de rigidez, obtém-se o vetor de carga global como:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Total}^e \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{Total}^e \end{bmatrix}_{e=1}^{n_e} \quad (3.95)$$

no qual, o símbolo \mathbf{A} representa um operador montagem. O operador montagem acima, para o cálculo do vetor de carga (carregamentos termomecânicos) global, corresponde ao seguinte algoritmo, também escrito em pseudocódigo:

Algoritmo

```
f(:)=0
do n=1, ne
    ! Cálculo do vetor de carga do e-ésimo elemento → [fTotale]
    get fe(:)
    do i=1, ns
        ii=lm(i)
        if (ii/=0) then
            ! Montagem do vetor de carga global
            f(ii)=f(ii)+ fe(i)
        end if
    end do
end do
```

sendo ns o número de graus de liberdade do elemento, n_e o número total de elementos e lm o vetor de código do respectivo grau de liberdade.

3.5 Formulação do Problema de Ótimo no Contínuo

O problema a ser resolvido consiste em minimizar a massa de uma região pré-definida de projeto, sujeito a um critério de tensão. Assim sendo, o problema consiste em determinar a densidade relativa ρ do material em um dado volume Ω , tal que a solução seja:

$$\min_{\rho} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.96)$$

sendo $f(\rho) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega$ a função objetivo e $\rho(\mathbf{x})$ a função porosidade (volume específico de material) do material, com $0 \leq \rho \leq 1$, e \mathbf{x} a coordenada (vetor posição) de um ponto arbitrário do domínio Ω . Na forma parametrizada a equação (3.96) assume a forma:

$$\min \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.97)$$

Sujeito às seguintes restrições

(i) Restrições de Tensão: basicamente, o que se deseja é garantir que a sollicitação em cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, denotada por $\sigma_{eq}(\mathbf{x})$, atenda a um critério de tensão. Assim sendo, a sollicitação de tensão em um dado ponto deve ser limitada por um valor admissível σ_{adm} , de modo que

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{c_s} \quad (3.98)$$

A tensão admissível aqui toma como referência a tensão de escoamento σ_y (para material denso) e o coeficiente de segurança c_s . A tensão equivalente, σ_{eq} , que confere o nível de sollicitação para um estado tridimensional de tensões, é aqui mensurada pela equação de von Mises:

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \quad (3.99)$$

a qual pode ser reescrita como,

$$\sigma_{eq}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.100)$$

podendo o tensor $\boldsymbol{\sigma}$, dada a sua simetria, ser escrito na forma vetorial como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \right]^T \quad (3.101)$$

a qual é calculada pela equação (3.18).

A tensão efetiva, considerando material poroso, é denotada por σ_{eq}^* e definida por:

$$\sigma_{eq}^* = \frac{\sigma_{eq}}{\rho^\eta} \quad (3.102)$$

sendo η o expoente SIMP (parâmetro de penalidade da microestrutura) do material poroso, o qual deve ter valor $3 \leq \eta \leq 4$ para que o material seja realizável (factível), conforme Sigmund (1998), no caso do presente trabalho o valor $\eta = 4$ foi utilizado em todos os exemplos. Agora, adaptando o critério de tensão dado pela eq. (3.98) para o caso de material poroso, e considerando o coeficiente de segurança $c_s = 1$, obtém-se:

$$\left(\frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) \leq 0 \quad (3.103)$$

sendo

$$\sigma_{eq}^* = \sigma_{eq}^* \left(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x}), T, \mathbf{x}) \right) \quad (3.104)$$

(ii) Restrições Laterais

$$\rho_{\inf} - \rho(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{x}) - \rho_{\sup} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.105)$$

iii) Restrições de Estabilidade

$$h^x = \left\| \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial x} \right\| - c_x \leq 0; h^y = \left\| \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial y} \right\| - c_y \leq 0 \text{ e } h^z = \left\| \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial z} \right\| - c_z \leq 0 \quad (3.106)$$

tendo as constantes c_x , c_y e c_z o papel de limitarem superiormente as componentes do gradiente da densidade relativa, conforme Petersson & Sigmund (1998).

Notamos ainda que:

- $\left\| \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right\|$ é constante em cada uma das direções de cada elemento;
- Também é constante em cada elemento o tensor deformação, embora o tensor tensão não o seja.

3.5.1 Relaxação da Tensão Efetiva ϵ

Uma das principais dificuldades encontradas durante o processo de solução de problemas de otimização topológica sujeitos a restrições de tensão local é o aparecimento de problemas de singularidade. Este fato é caracterizado pelo surgimento de campos descontínuos de tensão entre elementos adjacentes e é resultado do fenômeno de degeneração do espaço de projeto (disposição da distribuição do material). Com a finalidade de contornar o problema de singularidade, uma vez que o mesmo dificulta o processo de convergência da solução do problema de ótimo, considera-se uma relaxação e na restrição de tensão, como proposto por Cheng & Guo (1997), dada por:

$$\rho \left(\frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) + \rho e (\rho_{\text{sup}} - \rho) \leq 0. \quad (3.107)$$

Esta relaxação possibilita a criação e a remoção de furos sem violar a restrição de tensão, atuando sobre a parte degenerada do espaço de projeto. Isto é, para cada $e > 0$, o problema relaxado é caracterizado por um espaço de projeto não tanto degenerado e o fator $(\rho_{\text{sup}} - \rho)$ em e garante que a restrição de tensão real está

imposta para $\rho = \rho_{\text{sup}}$. Desta forma, torna-se mais acessível atingir um ótimo local com algoritmos de otimização baseados nas condições de Karush-Kuhn-Tucker.

Denotando a restrição acima por g , temos:

$$g\left(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}\left(\rho(\mathbf{x}), T, \mathbf{x}\right)\right) \leq 0 \quad \text{ou} \quad (3.108)$$

$$g = \rho(\mathbf{x}) \left(\frac{\sigma_{eq}^*\left(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}\left(\rho(\mathbf{x}), T, \mathbf{x}\right)\right)}{\sigma_y} - 1 \right) + \rho(\mathbf{x}) e\left(\rho_{\text{sup}} - \rho(\mathbf{x})\right) \leq 0.$$

3.5.2 Critério de Tensão Global

Com o objetivo de reduzir o custo computacional do problema de determinação da topologia ótima e atender ao critério de tensão em cada ponto do domínio, impõe-se um critério global de tensão. Este critério é proposto de modo a ser calculado de forma integral, e portanto todo o campo de tensão será analisado, a fim de ser mais eficiente do que os critérios pontuais mais comuns propostos na literatura. Os critérios pontuais, normalmente são calculados nos baricentros, nos pontos de integração ou nos nós dos elementos. Nestes critérios existe a possibilidade de haver regiões de concentração de tensão, devido ao fato de o domínio, que é contínuo, estar sendo analisado em um número finito de pontos. Além disso, o critério integral no elemento pode ser escrito como uma norma, a fim de ser reduzido numa única restrição global.

O critério global aqui utilizado, como proposto por Costa Jr. & Alves (2003), é dado por:

$$\bar{g}\left(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}\left(\rho(\mathbf{x}), T, \mathbf{x}\right)\right) = \left\{ \frac{1}{V} \int_V \left\langle g_e\left(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}\left(\rho(\mathbf{x}), T, \mathbf{x}\right)\right) \right\rangle^p dV \right\}^{1/p} \leq 0 \quad (3.109)$$

Por simplicidade definimos o operador $\langle \bullet \rangle = \max\{0, \bullet\}$, e daí:

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{V} \int_V \left\langle g_e(\mathbf{x}) \right\rangle^p dV \right\}^{1/p} \leq 0 \quad (3.110)$$

A aproximação por elementos finitos resulta,

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \langle g_e(\mathbf{x}) \rangle^p dV \right\}^{1/p} \leq 0. \quad (3.111)$$

A função restrição acima pode ainda ser calculada sobre o elemento natural, discutido em 3.5.5, resultando:

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \langle g_e(\xi, \eta, \zeta) \rangle^p \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \right\}^{1/p} \leq 0 \quad (3.112)$$

sendo V_e o volume real do e -ésimo elemento.

Para o elemento tetraédrico tem-se:

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \int_{\zeta=0}^{\zeta=1-\xi-\eta} \langle g_e(\xi, \eta, \zeta) \rangle^p \det \mathbf{J} d\zeta d\eta d\xi \right\}^{1/p} \leq 0 \quad (3.113)$$

Agora, a expressão acima pode ser integrada numericamente por:

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \langle g_e(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \rangle^p w_i w_j w_k \right\}^{1/p} \leq 0 \quad (3.114)$$

sendo

$$g_e = \rho_e \left(\frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) + \rho_e e (\rho_{\text{sup}} - \rho_e). \quad (3.115)$$

3.5.3 Método do Lagrangiano Aumentado

O problema de otimização a ser resolvido, já definido pelas equações (3.97), (3.103), (3.105) e (3.106) pode ser reformulado utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado com penalidade exterior (ver Apêndice C), que consiste em transformar um problema com restrições em um problema equivalente de minimização sem restrições, pela solução de uma sequência de problemas de mínimo com restrições laterais. A abordagem será apresentada na forma de algoritmo com vistas à formulação computacional, a qual segue:

1. Definir valores iniciais: $k = 0$, $\boldsymbol{\lambda}^\sigma = \boldsymbol{\lambda}^x = \boldsymbol{\lambda}^y = \boldsymbol{\lambda}^z = 0$, $err = 1,0$, $\varepsilon_\sigma^k, \varepsilon_x^k, \varepsilon_y^k, \varepsilon_z^k$ e tol .

2. Enquanto $err > tol$, efetuar *laço*:

(i) Solução do problema de minimização com restrições laterais

$$\min \mathcal{L}_A(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^\sigma, \boldsymbol{\lambda}^x, \boldsymbol{\lambda}^y, \boldsymbol{\lambda}^z; \varepsilon_\sigma, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X} \quad (3.116)$$

sendo \mathcal{L}_A a função Lagrangiano aumentado, $\mathbf{X} = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n \mid \rho_{\inf} \leq \rho_i \leq \rho_{\sup}; i = 1, \dots, n\}$ e n o número de nós da malha.

A função \mathcal{L}_A , definida com base em um critério de tensão global, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}^\sigma, \boldsymbol{\lambda}^x, \boldsymbol{\lambda}^y, \boldsymbol{\lambda}^z; \varepsilon_\sigma, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) = & f(\boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{\varepsilon_\sigma} \psi^\sigma(\bar{g}, \varepsilon_\sigma \boldsymbol{\lambda}^\sigma) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon_x} \sum_{e=1}^{n_e} \psi_e^x(h_e^x, \varepsilon_x \boldsymbol{\lambda}_e^x) + \frac{1}{\varepsilon_y} \sum_{e=1}^{n_e} \psi_e^y(h_e^y, \varepsilon_y \boldsymbol{\lambda}_e^y) + \frac{1}{\varepsilon_z} \sum_{e=1}^{n_e} \psi_e^z(h_e^z, \varepsilon_z \boldsymbol{\lambda}_e^z) \end{aligned} \quad (3.117)$$

sendo ε_σ , e ε_i , $i = x, y, z$ os parâmetros de penalidade exterior de tensão e de estabilidade, respectivamente.

- O critério de tensão global (norma aplicada no vetor critério de tensão de todos os elementos) é definido como:

$$\psi^\sigma(\bar{g}, \varepsilon_\sigma \boldsymbol{\lambda}^\sigma) = \begin{cases} \bar{g}(\bar{g} + \varepsilon_\sigma \boldsymbol{\lambda}^\sigma) & , \text{ se } \bar{g} \geq -\frac{\varepsilon_\sigma \boldsymbol{\lambda}^\sigma}{2} \\ -\left(\frac{\varepsilon_\sigma \boldsymbol{\lambda}^\sigma}{2}\right)^2 & , \text{ se } \bar{g} < -\frac{\varepsilon_\sigma \boldsymbol{\lambda}^\sigma}{2} \end{cases} \quad (3.118)$$

$$\psi_e^i(h_e^i, \varepsilon_i \boldsymbol{\lambda}_e^i) = \begin{cases} h_e^i(h_e^i + \varepsilon_i \boldsymbol{\lambda}_e^i) & , \text{ se } h_e^i \geq -\frac{\varepsilon_i \boldsymbol{\lambda}_e^i}{2} \\ -\left(\frac{\varepsilon_i \boldsymbol{\lambda}_e^i}{2}\right)^2 & , \text{ se } h_e^i < -\frac{\varepsilon_i \boldsymbol{\lambda}_e^i}{2} \end{cases} ; \quad i = x, y, z \quad (3.119)$$

(ii) Atualização dos multiplicadores de Lagrange:

$$\boldsymbol{\lambda}_e^{\sigma, k+1} = \max \left\{ 0, \boldsymbol{\lambda}_e^{\sigma, k} + \frac{2}{\varepsilon_\sigma} g_e(\mathbf{x}^k) \right\} \quad (3.120)$$

$$\lambda_e^{i, k+1} = \max \left\{ 0, \lambda_e^{i, k} + \frac{2}{\varepsilon_i} h_e^i(\mathbf{x}^k) \right\}; \quad i = x, y, z \quad (3.121)$$

(iii) Atualização dos parâmetros de penalidade:

$$\varepsilon_\sigma^{k+1} = \begin{cases} \gamma_\sigma \varepsilon_\sigma & , \text{ se } \gamma_\sigma \varepsilon_\sigma > \varepsilon_\sigma^{crit} \\ \varepsilon_\sigma^{crit} & , \end{cases} \quad \gamma_\sigma \in (0,1) \quad (3.122)$$

$$\varepsilon_i^{k+1} = \begin{cases} \gamma_i \varepsilon_i & , \text{ se } \gamma_i \varepsilon_i > \varepsilon_i^{crit} \\ \varepsilon_i^{crit} & , \end{cases} \quad \gamma_i \in (0,1); \quad i = x, y, z \quad (3.123)$$

(iv) Determinação do erro

$$err_\sigma = \max_e \left| \lambda_e^{\sigma, k+1} - \lambda_e^{\sigma, k} \right| \quad (3.124)$$

$$err_i = \max_e \left| \lambda_e^{i, k+1} - \lambda_e^{i, k} \right|; \quad i = x, y, z \quad (3.125)$$

então, $err = \max \{ err_\sigma, err_x, err_y, err_z \}$.

3. Fim do laço.

3.5.4 Determinação das Sensibilidades da Função Objetivo \mathcal{L}_A

Derivando a eq.(3.117) em relação a ρ_i obtemos,

$$\frac{d\mathcal{L}_A}{d\rho_i} = \frac{df}{d\rho_i} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon_\sigma} \frac{d\psi^\sigma}{d\rho_i} + \frac{1}{\varepsilon_x} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{d\psi_e^x}{d\rho_i} + \frac{1}{\varepsilon_y} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{d\psi_e^y}{d\rho_i} + \frac{1}{\varepsilon_z} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{d\psi_e^z}{d\rho_i} \right\}; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.126)$$

3.5.4.1 Cálculo da sensibilidade $\frac{df}{d\rho_i}$

Calculando a sensibilidade de $\frac{df}{d\rho_i}$ da eq. (3.126):

$$\frac{df}{d\rho_i} = \frac{1}{4} \sum_{e=1}^{n_{ei}} V_e; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.127)$$

sendo n_{ei} o número de elementos que contém o i -ésimo nó.

A sensibilidade do segundo termo do segundo membro da eq.(3.126) é dada por:

$$\frac{d\psi_e^\sigma}{d\rho_i} = \begin{cases} (2\bar{g} + \varepsilon_\sigma \lambda^\sigma) \frac{d\bar{g}}{d\rho_i} & , \text{ se } \bar{g} \geq -\frac{\varepsilon_\sigma \lambda^\sigma}{2} \\ 0 & , \text{ se } \bar{g} < -\frac{\varepsilon_\sigma \lambda^\sigma}{2} \end{cases} \quad (3.128)$$

3.5.4.2 Cálculo da sensibilidade $\frac{d\bar{g}}{d\rho_i}$

$$\frac{d\bar{g}}{d\rho_i} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i} + \sum_{e=1}^{n_{ei}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial q^e} \frac{\partial q^e}{\partial \rho_i} \quad (3.129)$$

de outra forma

$$\frac{d\bar{g}}{d\rho_i} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i} + \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} \quad (3.130)$$

3.5.4.3 Cálculo da sensibilidade $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i}$

Sabendo que

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f} , \quad (3.131)$$

calculando a sensibilidade em relação a variável de projeto, temos:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_i} . \quad (3.132)$$

Fazendo

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} = \mathbf{r}_i \quad (3.133)$$

segue que,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}_i . \quad (3.134)$$

Daí, substituindo a eq.(3.134) na eq.(3.130), obtém-se

$$\frac{d\bar{g}}{d\rho_i} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i} + \nabla_{\mathbf{u}} \bar{g} \cdot \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}_i \quad (3.135)$$

Entretanto, uma vez que \mathbf{K}^{-1} é simétrica, segue que $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-T}$, e então pode-se reescrever a eq.(3.135) como:

$$\frac{d\bar{g}}{d\rho_i} = \frac{\partial\bar{g}}{\partial\rho_i} + \mathbf{K}^{-1}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{g} \cdot \mathbf{r}_i. \quad (3.136)$$

Agora, fazendo

$$\mathbf{K}^{-1}\nabla_{\mathbf{u}}\bar{g} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad (3.137)$$

a equação (3.136) fica:

$$\frac{d\bar{g}}{d\rho_i} = \frac{\partial\bar{g}}{\partial\rho_i} + \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \mathbf{r}_i \quad (3.138)$$

e o vetor $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ é a solução de $\mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \nabla_{\mathbf{u}}\bar{g}$, calculada a partir da eq. (3.137).

Após analisar as eqs. (3.132) e (3.133), pode-se calcular \mathbf{r}_i através de:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\rho_i} - \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\rho_i}\mathbf{U}. \quad (3.139)$$

E como $\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\rho_i} = 0 \quad \forall i$, pois o carregamento não depende da densidade, segue que:

$$\mathbf{r}_i = -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\rho_i}\mathbf{U} \quad (3.140)$$

sendo necessário então calcular $\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\rho_i}\mathbf{U}$.

3.5.4.4 Cálculo da sensibilidade $\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\rho_i}$

Sabendo que a matriz

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^e \\ \mathbf{K}^{Total} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

e analisando a eq. (3.88) e como $\mathbf{K}_{Térm}^e$ não depende de ρ_i temos:

$$\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\rho_i} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{K}^e}{\partial\rho_i} \\ \frac{\partial\mathbf{K}^{Total}}{\partial\rho_i} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{K}^e}{\partial\rho_i} \\ \frac{\partial\mathbf{K}^{Mec}}{\partial\rho_i} \end{bmatrix}. \quad (3.142)$$

Analisando agora a eq.(3.87) e lembrando que $\mathbf{D}^\rho = \rho^\eta \mathbf{D}$ e $\boldsymbol{\beta}^\rho = \rho^{2\eta} \boldsymbol{\beta}$, verifica-se que:

$$\mathbf{K}_{Mec}^e = \rho_e^\eta \mathbf{K}_e^\sigma - \rho_e^{2\eta} \mathbf{K}_e^\beta \quad (3.143)$$

Agora, denominando $J^i = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ o conjunto dos elementos que contém o i -ésimo nó, segue que:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} = \mathbf{A} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_{Mec}^e}{\partial \rho_i} \right] \quad ; i = 1, \dots, n \quad (3.144)$$

e esta última equação sendo substituída na eq.(3.140), resulta:

$$\mathbf{r}_i = -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} = -\mathbf{A} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_{Mec}^e}{\partial \rho_i} \right] \mathbf{q}^e \quad (3.145)$$

da eq.(3.143), tem-se que:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{Mec}^e}{\partial \rho_i} = \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\rho_e^\eta \mathbf{K}_e^\sigma - \rho_e^{2\eta} \mathbf{K}_e^\beta \right) \quad (3.146)$$

sendo,

$$\rho_e^\eta = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_e} \rho^\eta d\Omega \quad \text{e} \quad \rho_e^{2\eta} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_e} \rho^{2\eta} d\Omega \quad (3.147)$$

Derivando as expressões acima, obtém-se que,

$$\frac{\partial \rho_e^\eta}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_e} \eta \rho^{\eta-1} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_i} d\Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho_e^{2\eta}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_e} 2\eta \rho^{2\eta-1} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_i} d\Omega. \quad (3.148)$$

Sabendo ainda que a distribuição de densidade é nodal por elemento, conforme Fig.3.5:

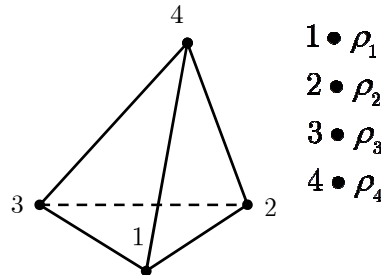


Figura 3.4 - Distribuição de Densidades Nodais.

tem-se,

$$\rho = \rho_1 N_1 + \rho_2 N_2 + \rho_3 N_3 + \rho_4 N_4 \quad (3.149)$$

daí

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_i} = \begin{cases} N_1, & \text{se } i = \text{nó (1)} \\ N_2, & \text{se } i = \text{nó (2)} \\ N_3, & \text{se } i = \text{nó (3)} \\ N_4, & \text{se } i = \text{nó (4)} \end{cases} \quad (3.150)$$

3.5.4.5 Cálculo da Sensibilidade $\frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i}$

Com a finalidade de determinar o primeiro termo do segundo membro da eq.(3.138), inicia-se da definição de \bar{g} , que é dada por

$$\bar{g} = \left\{ \frac{1}{V} \int_V \langle g_e \rangle^p dv \right\}^{1/p} \quad (3.151)$$

daí,

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{V} \int_V \langle g_e \rangle^p dV \right\}^{\frac{1}{p}-1} \frac{1}{V} \int_V \left[p \langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial \rho_i} \right] dV \quad (3.152)$$

Elevando ao expoente p ambos os membros da eq.(3.151), obtém-se

$$[\bar{g}]^p = \frac{1}{V} \int_V \langle g_e \rangle^p dV. \quad (3.153)$$

Substituindo a eq.(3.153) na eq.(3.152), verifica-se que:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i} = \frac{[\bar{g}]^{1-p}}{V} \int_V \left[\langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial \rho_i} \right] dV. \quad (3.154)$$

Agora, a expressão acima pode ser reescrita como,

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho_i} = \frac{[\bar{g}]^{1-p}}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \left[\langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial \rho_i} \right] dV. \quad (3.155)$$

3.5.4.6 Cálculo da Sensibilidade $\frac{\partial g_e}{\partial \rho_i}$

Efetutando-se o cálculo de $\frac{\partial g_e}{\partial \rho_i}$ na eq.(3.155), partindo-se da eq.(3.115) e sabendo que $\frac{\partial g_e}{\partial \rho_i}; i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \frac{\partial g_e}{\partial \boldsymbol{\rho}}$ pois $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{X}$, obtemos:

$$\frac{\partial g_e}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\sigma_{eq}^*}{\sigma_y} - 1 \right) + \frac{\rho}{\sigma_y} \frac{\partial \sigma_{eq}^*}{\partial \boldsymbol{\rho}} + (\epsilon \rho_{\text{sup}} - 2\epsilon \rho) \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (3.156)$$

3.5.4.7 Cálculo da Sensibilidade $\frac{\partial \sigma_{eq}^*}{\partial \boldsymbol{\rho}}$

Partindo da equação (3.102) obtemos:

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^*}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\rho^\eta} \right) \quad (3.157)$$

Sabe-se que o denominador ρ^η tem a propriedade (função) de corrigir o cálculo da tensão para um material poroso. Assim, esse valor pode ser interpretado como uma correção do volume do material e daí, denotando o volume efetivo do material por

$$V_{\text{eff}} = \rho^\eta, \quad (3.158)$$

temos:

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^*}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\sigma_{eq}}{V_{\text{eff}}} \right) = \frac{1}{V_{\text{eff}}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{\sigma_{eq}}{V_{\text{eff}}^2} \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \boldsymbol{\rho}}. \quad (3.159)$$

3.5.4.8 Cálculo da Sensibilidade $\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$

Da equação (3.100) tem-se

$$\frac{\partial \sigma_{eq}^2}{\partial \boldsymbol{\rho}} = 2\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\rho}}. \quad (3.160)$$

Derivando ambos os membros da equação acima e sabendo que $\boldsymbol{\sigma} = \rho^\eta \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - (T - T_0)\rho^{2\eta}\boldsymbol{\beta}$ temos,

$$2\sigma_{eq} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = 2\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \left[\rho^\eta \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - (T - T_0) \rho^{2\eta} \boldsymbol{\beta} \right]}{\partial \boldsymbol{\rho}}. \quad (3.161)$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\eta \rho^{\eta-1} \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - 2\eta \rho^{2\eta-1} \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\rho}} (T - T_0) \boldsymbol{\beta} \right]. \quad (3.162)$$

Fazendo

$$\eta \rho^{\eta-1} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - 2\eta \rho^{2\eta-1} (T - T_0) \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\omega} \quad (3.163)$$

e substituindo na eq. (3.162), encontramos:

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{\sigma_{eq}} (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{\rho}}. \quad (3.164)$$

3.5.4.9 Cálculo da Sensibilidade $\nabla_{\mathbf{u}} \bar{g}$

Por analogia com os cálculos realizados no subitem 3.5.4.5, e em conformidade com a eq.(3.155), obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{[\bar{g}]^{1-p}}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \left[\langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{U}} \right] dV \quad (3.165)$$

de modo que

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{[\bar{g}]^{1-p}}{V} \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \bar{g}_e}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.166)$$

sendo $\frac{\partial \bar{g}_e}{\partial \mathbf{U}} = \int_{V_e} \left[\langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}} \right] dV.$

Entretanto, uma vez que cada elemento contribui apenas com as componentes associadas a seus graus de liberdade (deslocamentos e temperaturas) nodais, derivamos o seguinte algoritmo:

Algoritmo:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{U}} = 0$$

do n=1, nume

 get lm(:)

 get uel(:)

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{U}}(\text{lm}(\cdot)) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{U}}(\text{lm}(\cdot)) + \frac{\partial \bar{g}_e}{\partial \mathbf{U}}(1 : ns); \quad ns = \text{size}(\text{lm})$$

end do

sendo ns o número de graus de liberdade do elemento e lm o vetor de código do respectivo grau de liberdade.

3.5.4.10 Cálculo da sensibilidade $\frac{\partial \bar{g}_e}{\partial \mathbf{U}}$

Aqui

$$\frac{\partial \bar{g}_e}{\partial \mathbf{U}} = \int_{V_e} \left[\langle g_e \rangle^{p-1} \frac{\partial g_e}{\partial \mathbf{u}} \right] dV \quad (3.167)$$

Derivando a eq. (3.100) em relação ao vetor \mathbf{u} , obtém-se:

$$2\sigma_{eq} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial u_r} = 2\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u_r}. \quad (3.168)$$

Daí, substituindo $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^\rho \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - (T - T_0)\boldsymbol{\beta}^\rho$ e derivando

$$2\sigma_{eq} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial u_r} = 2\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial u_r} \left(\rho^\eta \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}_u^e - \mathbf{N}_T^e \mathbf{q}_{T-T_0}^e \rho^{2\eta} \boldsymbol{\beta} \right); \quad r = \text{lm}(k) \wedge k = 1, \dots, ns \quad (3.169)$$

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial u_r} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\rho^\eta \mathbf{D}\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}_u^e}{\partial u_r} - \mathbf{N}_T^e \frac{\partial \mathbf{q}_{T-T_0}^e}{\partial u_r} \rho^{2\eta} \boldsymbol{\beta} \right); \quad r = \text{lm}(k) \wedge k = 1, \dots, ns \quad (3.170)$$

sendo r o número do grau de liberdade global e k o número do grau de liberdade local.

Na forma compacta a equação anterior pode ser expressa na forma:

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial u_r} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{D}^\rho \llbracket \mathbf{B} \rrbracket_k - \llbracket \mathbf{N}_T^e \rrbracket_k \boldsymbol{\beta} \right); \quad r = \text{lm}(k) \wedge k = 1, \dots, ns \quad (3.171)$$

Sendo que o operador $\llbracket \bullet \rrbracket_k$ define a k -ésima coluna da matriz \bullet .

Agora, desde que a matriz \mathbf{D}^ρ é simétrica, tem-se,

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial u_r} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \left(\mathbf{D}^\rho \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \llbracket \mathbf{B} \rrbracket_k - \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \cdot \llbracket \mathbf{N}_T^e \rrbracket_k \boldsymbol{\beta} \right); \quad r = \text{lm}(k) \wedge k = 1, \dots, ns. \quad (3.172)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\boldsymbol{\tau}} \\ \mathbf{D}^p \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \quad (3.173)$$

temos

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial u_r} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \left(\bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \llbracket \mathbf{B} \rrbracket_k - \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \llbracket \mathbf{N}_T^e \rrbracket_k \boldsymbol{\beta} \right); \quad r = lm(k) \wedge k = 1, \dots, ns \quad (3.174)$$

sendo assim,

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \left(\mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\omega}} - \left[\boldsymbol{\beta} \mathbf{N}_T^e \right]^T \bar{\boldsymbol{\tau}} \right) \quad (3.175)$$

que representa toda a contribuição do e -ésimo elemento.

3.5.5 Discretização do Problema de Otimização no Contínuo

Para discretizar o domínio do problema, nós aplicamos, para um elemento Tetra4, o Método dos Elementos Finitos de Galerkin que interpola tanto as componentes de deslocamento e temperatura, (u_x, u_y, u_z, T) , quanto a densidade relativa ρ , conforme a Fig.3.6 abaixo.

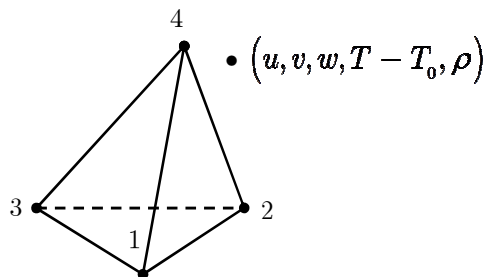


Figura 3.5 – Elemento Finito Tetra 4.

A função objetivo é dada por:

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega \quad (3.176)$$

- Interpolação do campo de densidade relativa:

$$\rho_i(x, y, z) = \sum_{n=1}^4 N_n(x, y, z) \rho_{in} \quad (3.177)$$

ou ainda:

$$\rho_i(x, y, z) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{i1} \\ \rho_{i2} \\ \rho_{i3} \\ \rho_{i4} \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

onde N_n indica as funções de interpolação do elemento, com $n = 1, \dots, 4$ indicando os nós do elemento.

Sendo $\phi(\mathbf{x})$ o campo das variáveis, o caso linear é dado por:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad (3.179)$$

- Determinação das funções interpoladoras

Para a determinação das funções interpoladoras N_1, N_2, N_3 e N_4 , aplicamos as condições nodais, isto é:

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= a_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i \\ \phi(x_j) &= a_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j + \alpha_3 z_j \\ \phi(x_k) &= a_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k + \alpha_3 z_k \\ \phi(x_l) &= a_l = \alpha_0 + \alpha_1 x_l + \alpha_2 y_l + \alpha_3 z_l \end{aligned} \quad (3.180)$$

Na forma matricial:

$$\{\mathbf{a}\} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

ou ainda,

$$\{\mathbf{a}\} = [\bar{\mathbf{A}}] \{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (3.182)$$

sendo,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}. \quad (3.183)$$

As funções interpoladoras são então determinadas por:

$$N_n = \frac{1}{6V} (\mathbf{C} \text{ Adj} \bar{\mathbf{A}}), \quad n = 1, \dots, 4 \quad (3.184)$$

sendo V o volume do elemento finito e calculado utilizando-se a formula,

$$V = \frac{1}{6} |\det \bar{\mathbf{A}}| \quad (3.185)$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

Uma vez que a construção das matrizes de rigidez envolve a definição das funções interpoladoras, cuja expressão depende das características próprias do elemento utilizado e do sistema de coordenadas que o define, e considerando-se que a utilização do mesmo sistema de coordenadas no elemento e na estrutura como um todo aumenta o custo computacional, costuma-se utilizar uma operação de mapeamento das funções interpoladoras definidas em um domínio elementar padrão, denominado sistema de coordenadas local ou natural, conforme Fig.3.7.

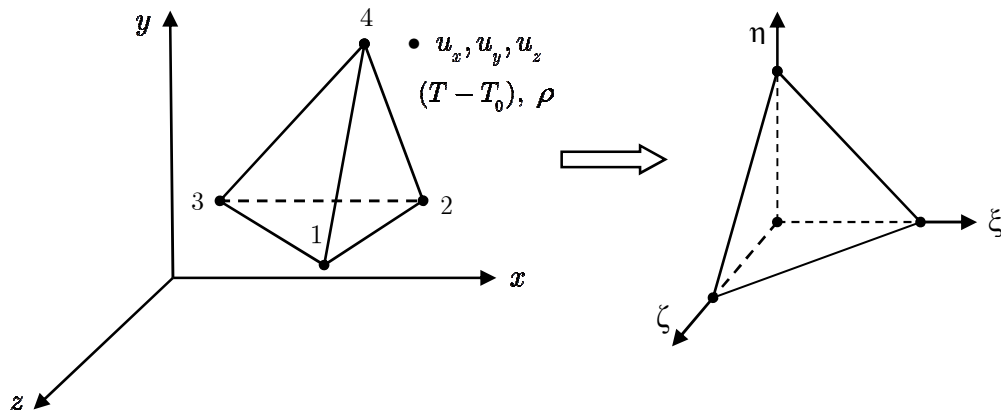


Figura 3.6 – Mapeamento para o sistema natural do elemento.

Neste novo sistema, a densidade relativa e as funções interpoladoras são definidas, respectivamente, como:

$$\rho_i(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{n=1}^4 N_n(\xi, \eta, \zeta) \rho_{in} \quad (3.187)$$

sendo,

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta \\ N_4(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta \end{aligned} \quad (3.188)$$

A matriz Jacobiana do elemento, que relaciona os dois sistemas, é:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{i4} & y_{i1} - y_{i4} & z_{i1} - z_{i4} \\ x_{i2} - x_{i4} & y_{i2} - y_{i4} & z_{i2} - z_{i4} \\ x_{i3} - x_{i4} & y_{i3} - y_{i4} & z_{i3} - z_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

As expressões integrais são dadas por:

$$\int_V f(x, y, z) dV = 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi \quad (3.190)$$

No caso do elemento tetraédrico de quatro nós, $\det \mathbf{J}$ é constante e o volume do elemento é:

$$V = \det \mathbf{J} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi \quad (3.191)$$

Calculando as integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\zeta d\eta d\xi &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1 - \xi - \eta) d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \left[\left(\eta - \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} \right)_0^{1-\xi} \right] d\xi = \int_0^1 \left[(1 - \xi) - \xi(1 - \xi) - \frac{(1 - \xi)^2}{2} \right] d\xi \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1 - 2\xi + \xi^2}{2} \right] d\xi = \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (3.192)$$

Logo,

$$V = \frac{1}{6} |\det[\mathbf{J}]| \quad (3.193)$$

- Interpolação da Geometria:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) x_n \\ y &= \sum_{n=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) y_n \\ z &= \sum_{n=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) z_n \end{aligned} \quad (3.194)$$

- Derivada das funções de forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial N_n}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix} \quad (3.195)$$

Assim, substituindo os resultados obtidos na equação da função objetivo, teremos:

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \sum_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega \quad (3.196)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega &= 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \left[\sum_{e=1}^4 N_e \rho_e(\xi, \eta, \zeta) \right] d\zeta d\eta d\xi \\ \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega &= 6\Omega_e \left[\rho_1 \int_{\Omega_e} N_1 d\Omega + \rho_2 \int_{\Omega_e} N_2 d\Omega + \rho_3 \int_{\Omega_e} N_3 d\Omega + \rho_4 \int_{\Omega_e} N_4 d\Omega \right] \end{aligned} \quad (3.197)$$

Determinação de $\int_{\Omega_e} N_1 d\Omega$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi d\zeta d\eta d\xi &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \left(\xi \int_0^{1-\xi-\eta} d\eta d\xi \right) d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi(1-\xi-\eta) d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \left(\xi\eta - \xi^2\eta - \frac{\xi\eta^2}{2} \right) \Big|_0^{1-\xi} d\xi = \int_0^1 \left(\xi(1-\xi) - \xi^2(1-\xi) - \frac{\xi(1-\xi)^2}{2} \right) d\xi \\ \therefore \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi d\zeta d\eta d\xi &= \int_{\Omega_e} N_1 d\Omega = \frac{1}{24} \end{aligned} \quad (3.198)$$

Procedendo de maneira análoga, veremos que:

$$\int_{\Omega_e} N_2 d\Omega = \int_{\Omega_e} N_3 d\Omega = \int_{\Omega_e} N_4 d\Omega = \frac{1}{24} \quad (3.199)$$

Como resultado:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega &= 6\Omega_e \left[\rho_1 \left(\frac{1}{24} \right) + \rho_2 \left(\frac{1}{24} \right) + \rho_3 \left(\frac{1}{24} \right) + \rho_4 \left(\frac{1}{24} \right) \right] \\ \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega &= 6\Omega_e \left[\frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4}{24} \right] \\ \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\rho} d\Omega &= \Omega_e \left[\frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4}{4} \right] = \Omega_e \rho_m^e \end{aligned} \quad (3.200)$$

sendo $\rho_m^e = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4}{4}$ a densidade média do elemento.

- Determinação do $\nabla f(\boldsymbol{\rho})_e$:

$$\nabla f(\boldsymbol{\rho})_e = \frac{\Omega_e}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.201)$$

- Determinação de $h(\boldsymbol{\rho})$ (Restrições de Estabilidade):

As restrições de estabilidade são empregadas visando: assegurar a existência de solução para o problema de otimização de leiaute, ver Bendsoe (1995) e Sigmund & Petersson (1998); evitar o problema de instabilidade de tabuleiro e reduzir a dependência da solução do leiaute ótimo com relação à malha inicial utilizada. Neste ponto é importante enfatizar que, para obter um alto desempenho computacional, é imprescindível a utilização de um elemento finito com baixa ordem de interpolação. Porém, a utilização de elementos de ordem baixa pode ocasionar, no caso da omissão da restrição de estabilidade, o aparecimento de instabilidade numérica. Como resultado, é imposta a seguinte restrição:

$$\left(\frac{\left\| \frac{\partial \rho}{\partial d} \right\|}{c_d} - 1 \right) = h_{ed}(\rho) \leq 0 . \quad (3.202)$$

na qual e é o número de elementos, d as direções em x , y e z . A constante c_d define os limites laterais para as componentes do gradiente da densidade relativa.

Considere um elemento genérico como mostrado na Fig.3.8, sendo $\mathbf{x}_n = (x_i, y_i, z_i)$, $p/ i = 1, \dots, 4$, as coordenadas dos vértices e $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m, z_m)$ as coordenadas do baricentro do elemento Tetra4.

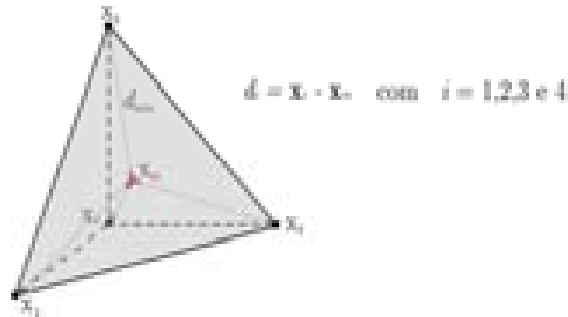


Figura 3.7 – Coordenadas da baricentro do Elemento Finito Tetra4.

Agora, denotando:

$$d_{\min} = \min_j \|\mathbf{d}_j\| \quad p/ i = 1, \dots, 4 \quad (3.203)$$

é definido,

$$c_x^e = c_y^e = c_z^e = \frac{1}{d_{\min}} \quad (3.204)$$

Calculando as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \rho_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \rho_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} \rho_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} \rho_4 \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{\partial N_1}{\partial y} \rho_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} \rho_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} \rho_3 + \frac{\partial N_4}{\partial y} \rho_4 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{\partial N_1}{\partial z} \rho_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} \rho_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} \rho_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} \rho_4. \end{aligned} \quad (3.205)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{[(y_k z_j) + (y_l z_k) + (y_j z_l) - (y_k z_l) - (y_l z_j) - (y_j z_k)]}{6V} \\
\frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{[(y_k z_l) + (y_l z_i) + (y_i z_k) - (y_k z_i) - (y_l z_k) - (y_i z_l)]}{6V} \\
\frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{[(y_j z_i) + (y_l z_j) + (y_i z_l) - (y_j z_l) - (y_l z_i) - (y_i z_j)]}{6V} \\
\frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{[(y_j z_k) + (y_k z_i) + (y_i z_j) - (y_j z_i) - (y_k z_j) - (y_i z_k)]}{6V}
\end{aligned} \tag{3.206}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{[(x_k z_l) + (x_l z_j) + (x_j z_k) - (x_k z_j) - (x_l z_k) - (x_j z_l)]}{6V} \\
\frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{[(x_k z_i) + (x_l z_k) + (x_i z_l) - (x_k z_l) - (x_l z_i) - (x_i z_k)]}{6V} \\
\frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{[(x_j z_l) + (x_l z_i) + (x_i z_j) - (x_j z_i) - (x_l z_j) - (x_i z_l)]}{6V} \\
\frac{\partial N_4}{\partial y} &= \frac{[(x_j z_i) + (x_k z_j) + (x_i z_k) - (x_j z_k) - (x_k z_i) - (x_i z_j)]}{6V}
\end{aligned} \tag{3.207}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial z} &= \frac{[(x_k y_j) + (x_l y_k) + (x_j y_l) - (x_k y_l) - (x_l y_j) - (x_j y_k)]}{6V} \\
\frac{\partial N_2}{\partial z} &= \frac{[(x_k y_l) + (x_l y_i) + (x_i y_k) - (x_k y_i) - (x_l y_k) - (x_i y_l)]}{6V} \\
\frac{\partial N_3}{\partial z} &= \frac{[(x_j y_i) + (x_l y_j) + (x_i y_l) - (x_j y_l) - (x_l y_i) - (x_i y_j)]}{6V} \\
\frac{\partial N_4}{\partial z} &= \frac{[(x_j y_k) + (x_k y_i) + (x_i y_j) - (x_j y_i) - (x_k y_j) - (x_i y_k)]}{6V}
\end{aligned} \tag{3.208}$$

Então:

$$h_{e_x}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2}}{c_x} - 1, \quad h_{e_y}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2}}{c_y} - 1 \quad \text{e} \quad h_{e_z}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2}}{c_z} - 1 \tag{3.209}$$

- Determinação de $\nabla_{\rho_n} h_{ed}$.

$$\nabla_{\rho_n} h_{ed} = \left[\frac{\partial h_{ed}}{\partial \rho_n} \right] \quad (3.210)$$

Sendo, e o número de elementos, d as direções em x , y e z e $n = 1, \dots, 4$.

Desta forma, teremos, na direção x :

$$\nabla_{\rho_n} h_{ex} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_1} \\ \frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_3} \\ \frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_4} \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

mas,

$$\frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_1} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}}{c_x} - 1 \right] = \frac{1}{c_x \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right) \quad (3.212)$$

De modo análogo:

$$\frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_2} = \frac{1}{c_x \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \quad (3.213)$$

$$\frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_3} = \frac{1}{c_x \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \right) \quad (3.214)$$

$$\frac{\partial h_{ex}}{\partial \rho_4} = \frac{1}{c_x \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_4}{\partial x} \right) \quad (3.215)$$

Logo:

$$\nabla_{\rho_n} h_{\epsilon x} = \left[\frac{1}{c_x \left\| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \right) \right], \quad \text{com } n = 1, \dots, 4 \quad (3.216)$$

De maneira análoga, temos:

Na direção y :

$$\nabla_{\rho_n} h_{\epsilon y} = \left[\frac{1}{c_y \left\| \frac{\partial \rho}{\partial y} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_n}{\partial y} \right) \right], \quad \text{com } n = 1, \dots, 4 \quad (3.217)$$

Na direção z :

$$\nabla_{\rho_n} h_{\epsilon z} = \left[\frac{1}{c_z \left\| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\|} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial N_n}{\partial z} \right) \right], \quad \text{com } n = 1, \dots, 4. \quad (3.218)$$

Capítulo 4

4.1 Procedimento Computacional

De modo geral, a implementação computacional de um problema de otimização estrutural pode ser dividido em três fases: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

A fase de pré-processamento compreende duas etapas: na etapa 1 é feita a caracterização do problema, a qual inclui informações sobre as características geométricas do modelo a ser analisado, propriedades do material, condições de contorno e geração da malha de elementos finitos; na etapa 2 o pré-processador gera um arquivo de entrada de dados (*inputF.dat*) para ser utilizado na fase de processamento. O arquivo *inputF.dat* contém todas as informações referentes ao problema, tais como: número de elementos, número de nós, coordenadas dos nós, conectividade dos elementos, graus de liberdade dos nós, condições de contorno e propriedades do material. Neste trabalho utilizou-se o programa comercial FEMAP, versão 10.1.0, nos trabalhos de pré-processamento.

A fase de processamento é composta das etapas 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Nesta fase foi utilizado um código computacional formado por um conjunto de programas escritos em linguagem Fortran90/95, o qual teve como ponto de partida uma estrutura de dados desenvolvida para o estudo de problemas termoelásticos 2D, Silva (2007).

Na fase de pós-processamento, etapa 11, utilizou-se o programa comercial GID, versão 10.0.5, para visualizar e analisar o arquivo de saída de dados gerado na fase de processamento.

As três fases do trabalho de processamento, juntamente com suas respectivas etapas, estão ilustradas no fluxograma exibido na Fig. 4.1 da página seguinte.

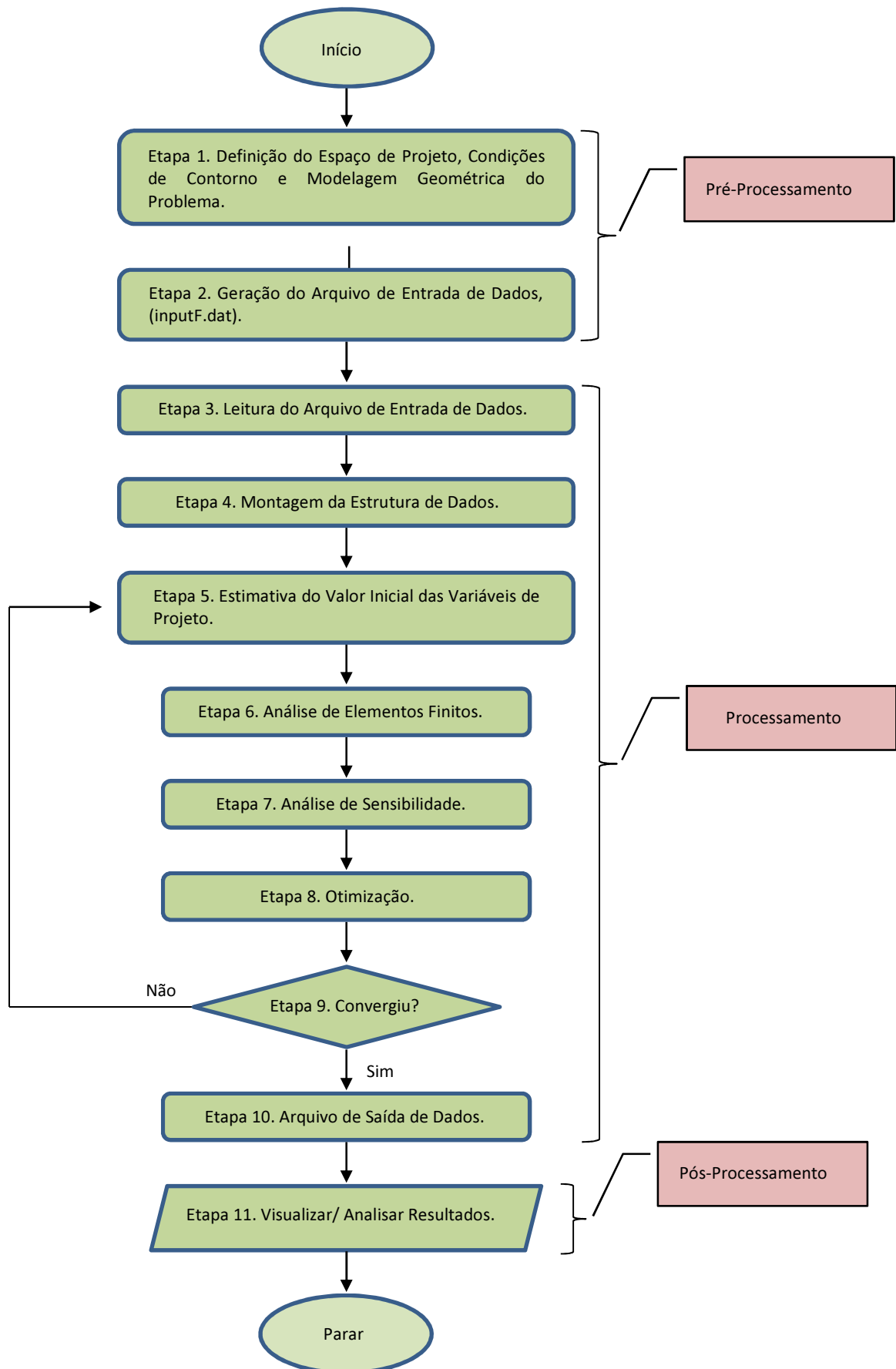


Figura 4.1 - Fluxograma do Processo de Otimização Topológica.

Resultados

4.2 Descrição Geral das Propriedades dos Materiais Utilizados nos Problemas de Validação

Objetivando verificar a validade da abordagem em estudo será considerada a solução de um conjunto de problemas de otimização topológica de estruturas termoelásticas 3D. Os modelos são supostos constituídos de um único material e, para tanto, utilizou-se o aço inox AISI 304 cujas propriedades mecânicas e térmicas seguem abaixo:

Aço Inox AISI 304: Módulo de Young $E_0 = 193,0$ GPa; coeficiente de condutividade térmica $k = 16,60$ (W. $^{\circ}$ C)/m; coeficiente de transferência convectiva de calor $h = 10,00$ W/(m 2 . $^{\circ}$ C); coeficiente de expansão/dilatação térmica do material $\beta = 17,00 \times 10^{-6}$ m/(m. $^{\circ}$ C); tensão de escoamento (para tração e compressão) $\sigma_y = 207.000,0$ kN/m 2 ; tensão de escoamento (cisalhante) $\tau_y = 138.000,0$ kN/m 2 e coeficiente de Poisson $\nu_0 = 0,29$. Para a parte térmica do problema, consideraremos uma temperatura prescrita $\bar{T} = 100^{\circ}$ C, temperatura inicial da superfície do sólido sob convecção livre $T_0 = 20^{\circ}$ C e a temperatura do fluido sendo $T_{\infty} = 25^{\circ}$ C.

Em todos os casos, o modelo geométrico, os carregamentos, as condições de contorno e a malha de elementos finitos foram gerados utilizando-se o programa comercial FEMAP v10.1.0. Malhas não estruturadas foram utilizadas visando minimizar qualquer influência devido à orientação da malha inicial na determinação do leiaute ótimo final. Além disso, malhas com um número crescente de elementos são exibidas a fim de mostrar a convergência das topologias “ótimas” intermediárias para o leiaute final ótimo.

O pós-processamento dos resultados foi realizado através do programa comercial GID v.10.0.5.

4.3 Apresentação dos Resultados

Problema 4.1

Consideremos um cubo com $0,05\text{ m}$ de lado, submetido a uma carga distribuída $F = 207 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ aplicada no centro da superfície superior. O cubo está fixado nos quatro cantos da base inferior e possui uma temperatura prescrita $\bar{T} = 100^\circ\text{C}$ aplicada nas fixações, conforme Fig. 4.1(a). A área de aplicação da carga é $0,02 \times 0,02 \text{ m}^2$ e a área de cada fixação é $0,01 \times 0,01 \text{ m}^2$.

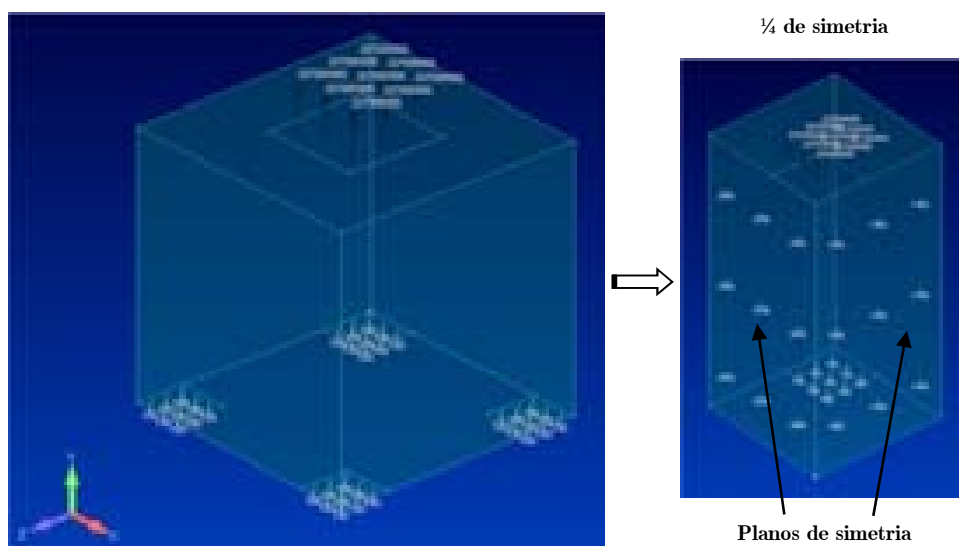
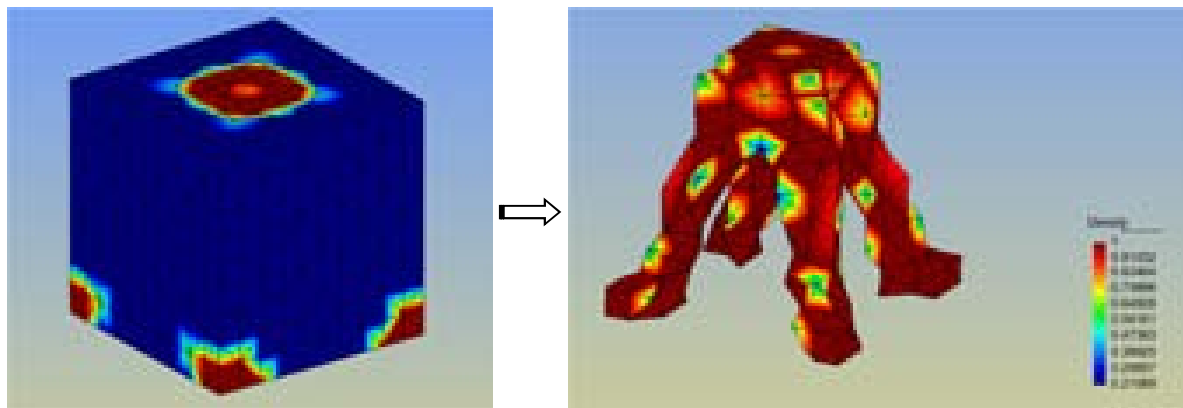


Figura 4.1(a) – Descrição do problema 4.1

Devido à simetria do modelo e objetivando a redução do tempo de processamento analisou-se apenas $\frac{1}{4}$ do modelo, Fig. 4.1(a). A análise foi realizada utilizando-se três malhas com número de nós e elementos gradualmente crescentes. A primeira malha fez uso de 594 nós e 2504 elementos, segunda 850 nós e 3629 elementos e, finalmente, a terceira utilizou uma malha com 1034 nós e 4557 elementos.

As Figs. 4.1(b),(d) e (f) exibem o modelo completo do exemplo em estudo juntamente com a evolução dos leiautes ótimos. Pela análise das figuras verifica-se a convergência dos leiautes ótimos parciais para o leiaute ótimo final, bem como a boa resolução dos seus contornos. Nas Figs.4.1(c),(e) e (g) estão ilustradas as distribuições do critério de falha.

Refino 1: malha com 594 nós e 2504 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.1 (b) – Resultado refino 1 do problema 4.1

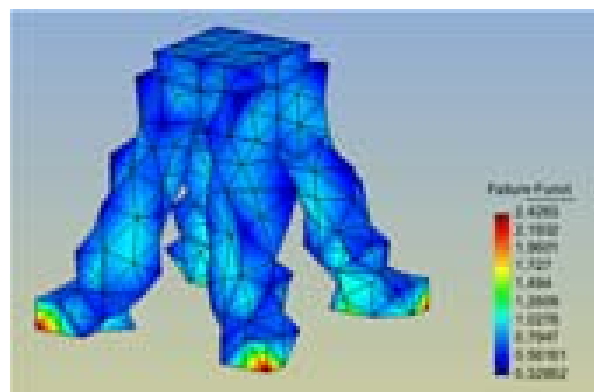
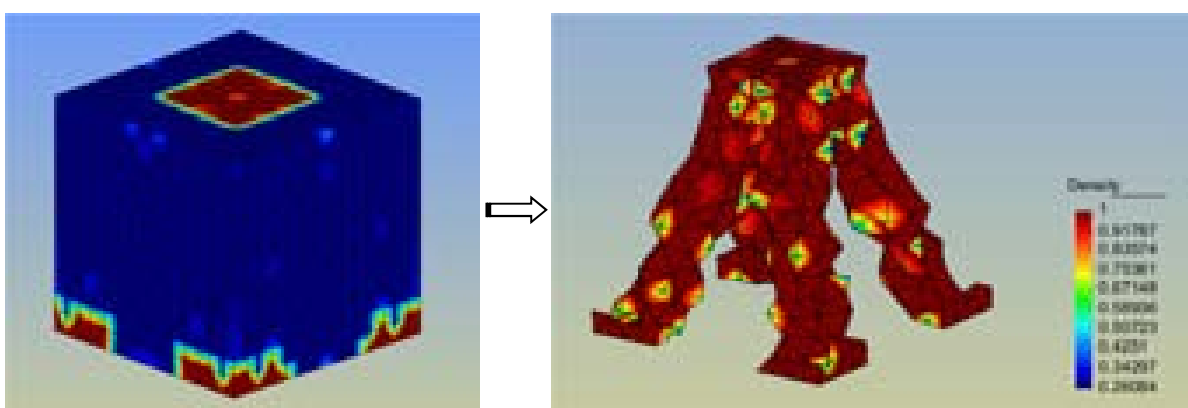


Figura 4.1 (c) – Função de falha refino 1 do problema 4.1

Refino 2: malha com 850 nós e 3629 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.1 (d) – Resultado refino 2 do problema 4.1

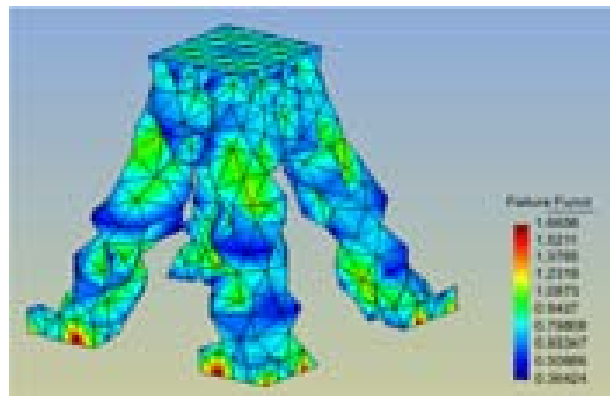
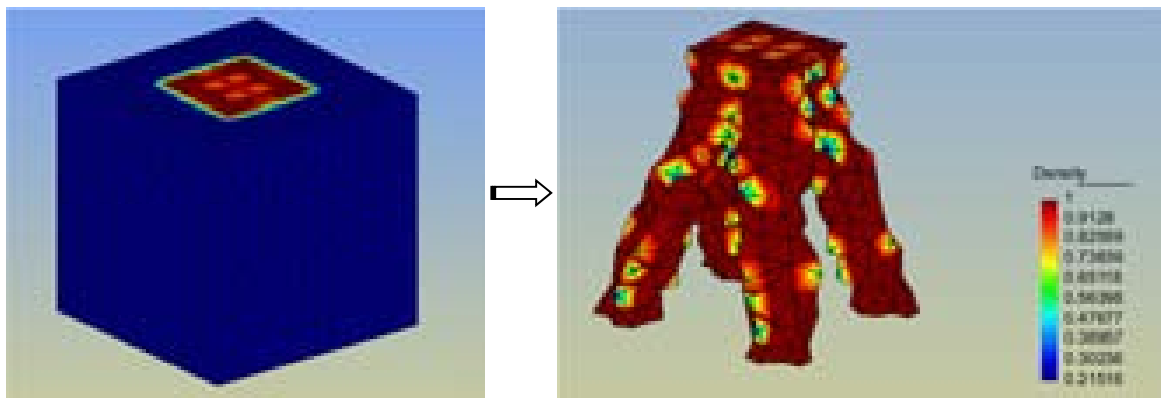


Figura 4.1 (e) – Função de falha refino 2 do problema 4.1

Refino 3: malha com 1034 nós e 4557 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.1 (f) – Resultado refino 3 do problema 4.1

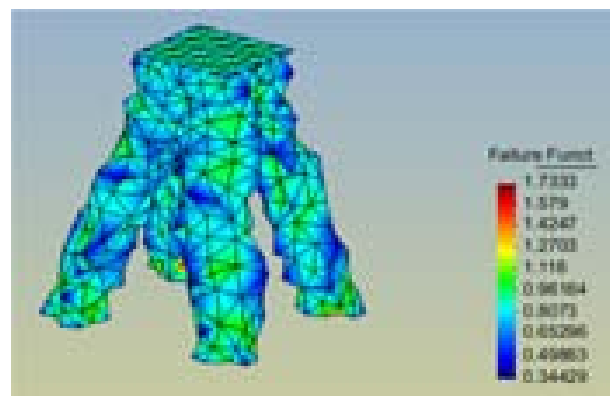


Figura 4.1 (g) – Função de falha refino 3 do problema 4.1

Neste último refino o percentual de volume material do leiaute ótimo final representa 20,3% do material presente no modelo original.

Problema 4.2

Neste caso, o problema consiste em um bloco retangular possuindo $0,10m$ de comprimento, $0,04m$ de altura e $0,01m$ de espessura. O bloco encontra-se apoiado nos cantos da base inferior e está submetido a uma carga distribuída na face superior, de intensidade $F = 207 \times 10^6 N/m^2$, e a uma temperatura prescrita $\bar{T} = 100^\circ C$ em toda a base inferior, Fig. 4.2(a). A área do carregamento mecânico é $0,01 \times 0,02 m^2$ e a área de cada apoio $0,01 \times 0,01 m^2$.

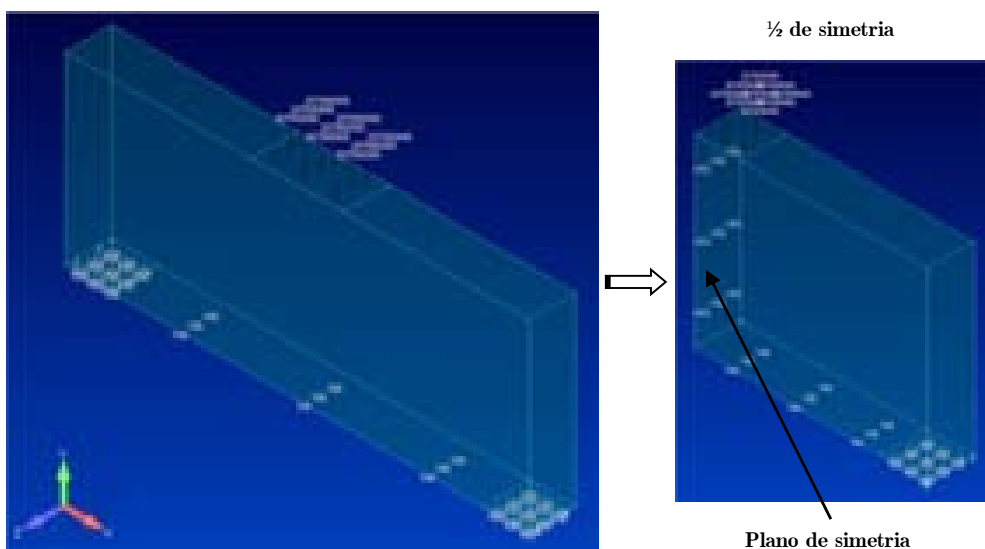
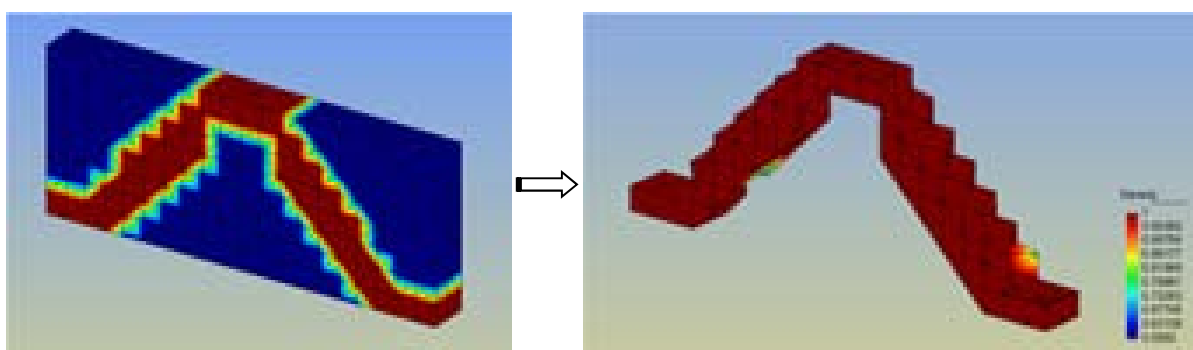


Figura 4.2(a) – Descrição do problema 4.2

Afim de reduzir o tempo de processamento e devido à simetria do modelo foi analisada apenas $\frac{1}{2}$ do modelo, conforme Fig. 4.2(a). Três processamentos foram realizados, como ilustrado nas figuras abaixo.

Refino1: malha com 354 nós e 1302 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.2 (b) – Resultado refino 1 do problema 4.2

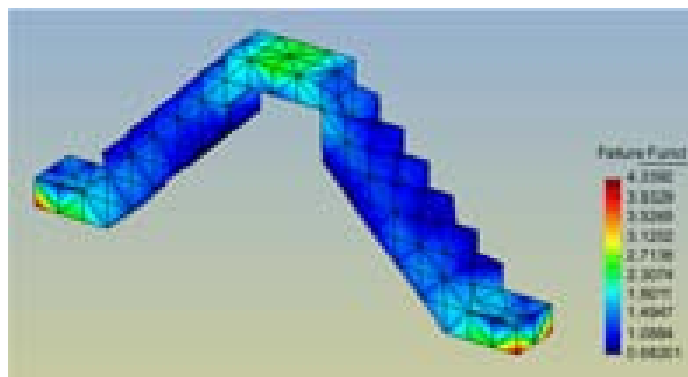


Figura 4.2(c) – Função de falha refino 1 do problema 4.2

Refino2: malha com 781 nós e 3154 elementos.

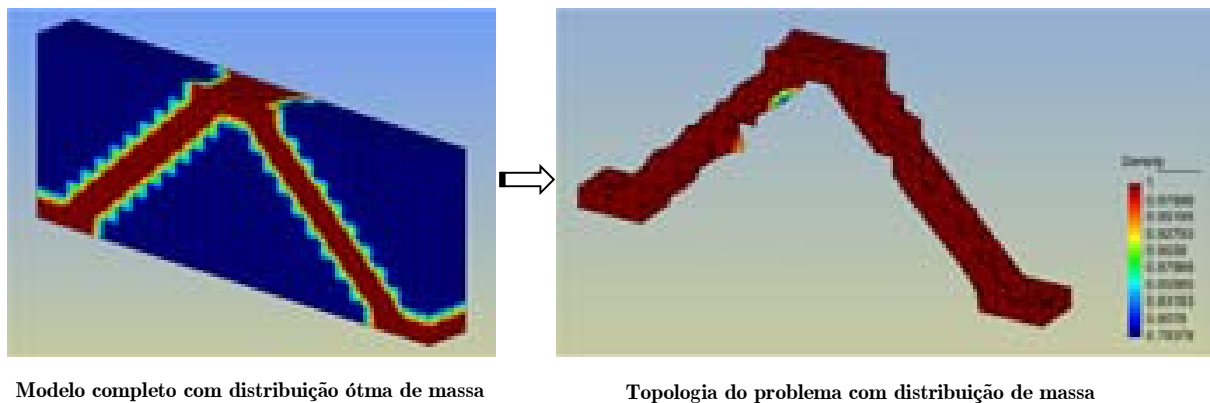


Figura 4.2 (d) – Resultado refino 2 do problema 4.2

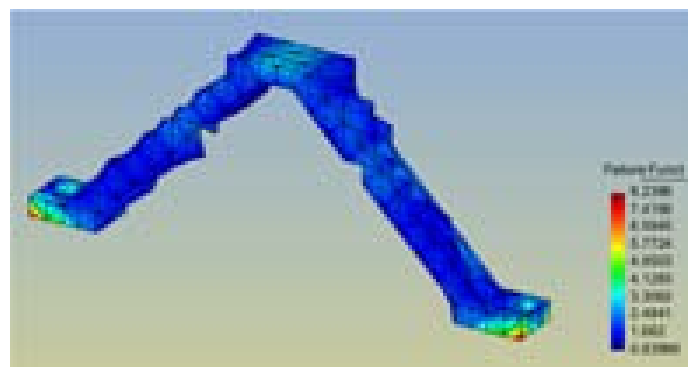


Figura 4.2 (e) – Função de falha refino 2 do problema 4.2

A sequência de figuras representando a evolução dos leiautes ótimos converge para o leiaute ótimo final indicado na Fig. 4.2 (f), o qual possui uma interface material/vazio nitidamente definida e redução de massa da ordem de 75%.

Refino3: agora com uma malha de 1588 nós e 7071 elementos.

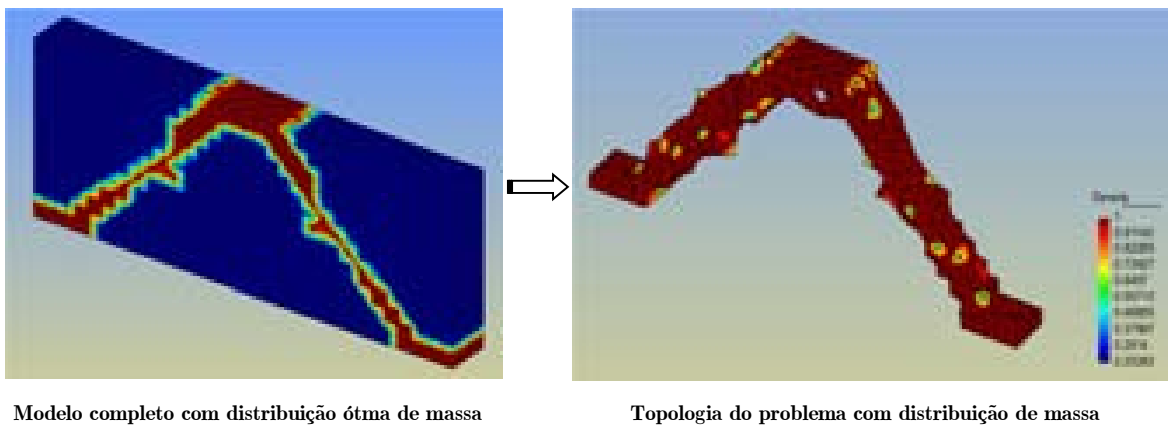


Figura 4.2 (f) – Resultado refino 3 do problema 4.2

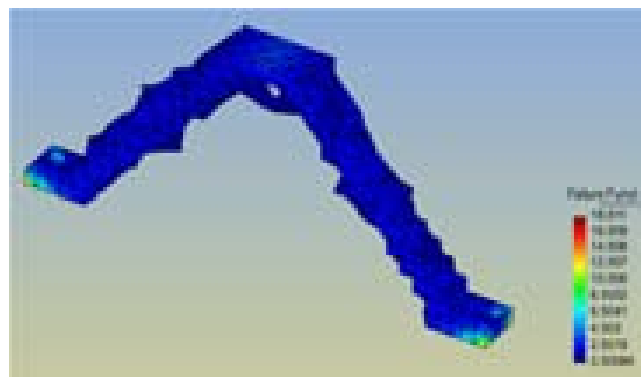


Figura 4.2 (g) – Função de falha refino 3 do problema 4.2

Problema 4.3

Aqui considera-se uma viga fixada na face esquerda e submetida a uma carga cisalhante na face direita além de uma temperatura prescrita na fixação. A viga tem $0,10m$ de comprimento, $0,07m$ de altura e $0,01m$ de espessura. A estrutura está submetida aos seguintes carregamentos: $F = 119\,511 \times 10^3 N/m^2$ e $\bar{T} = 100^\circ C$. A área do carregamento é de $0,01 \times 0,02m^2$ e a área da fixação é $0,01 \times 0,07m^2$, Fig.4.3 (a).

Foi analisada $\frac{1}{2}$ da estrutura para efeito de redução do tempo de processamento, conforme Fig.4.3 (a). Dois refinamentos foram realizados e a evolução dos layouts ótimos é mostrada nas Figs. 4.3(b) e (d).

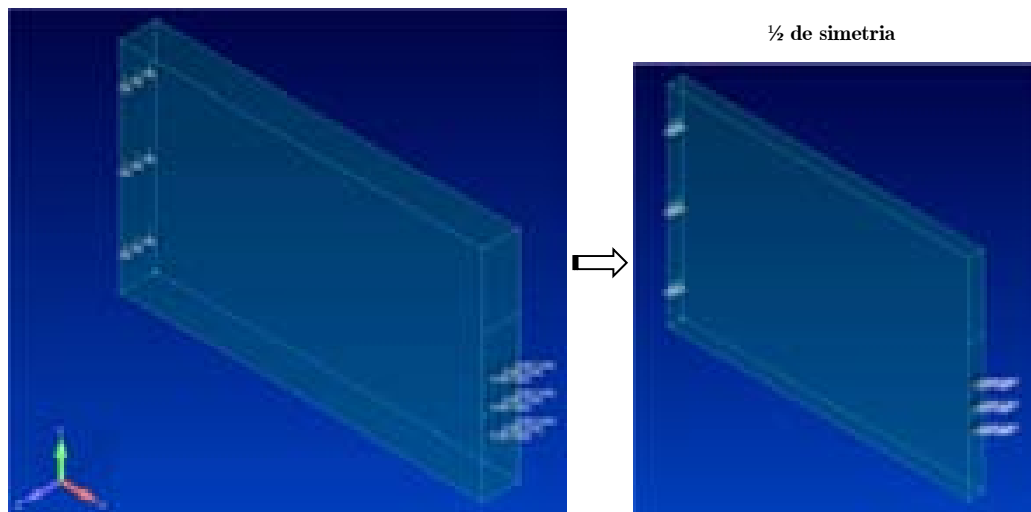
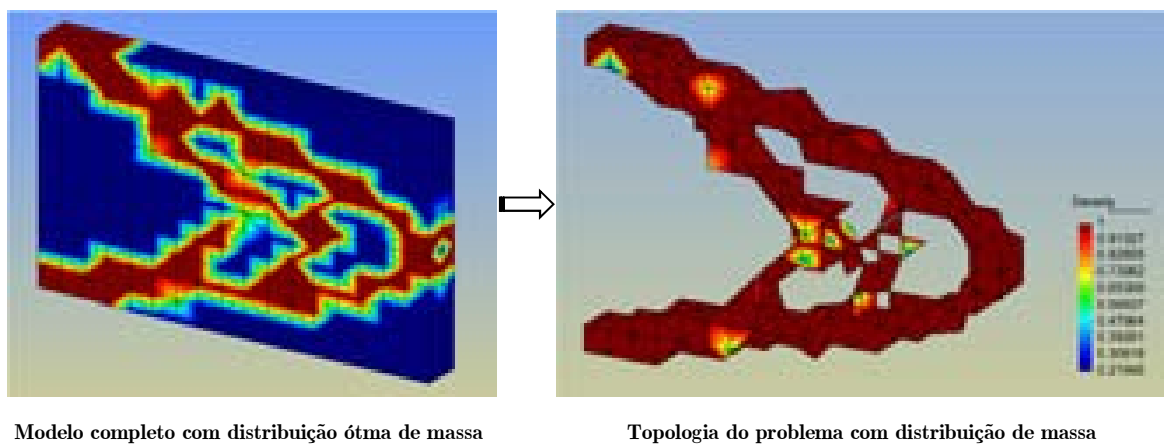


Figura 4.3 (a) – Descrição do problema 4.3

As Figs. 4.3(c) e (e) representam a distribuição do critério de falha.

Refino1: malha com 625 nós e 2130 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.3 (b) – Resultado refino 1 do problema 4.3

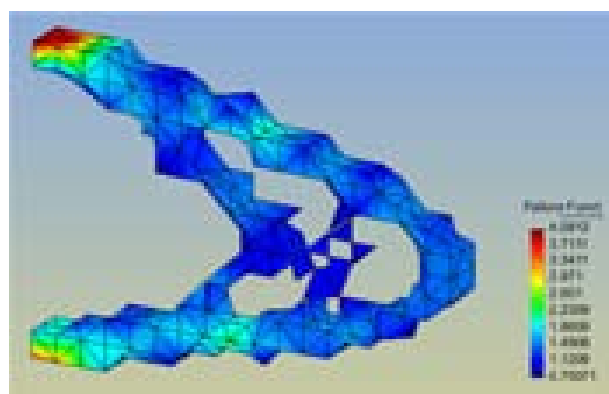


Figura 4.3 (c) – Função de falha refino 1 do problema 4.3

Refino2: malha com 910 nós e 3360 elementos.

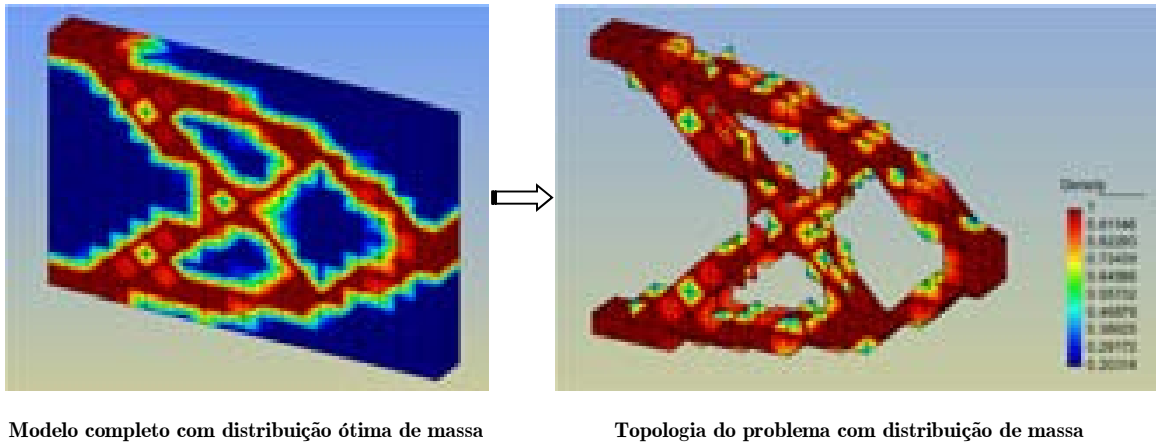


Figura 4.3 (d) - Resultado refino 2 do problema 4.3.

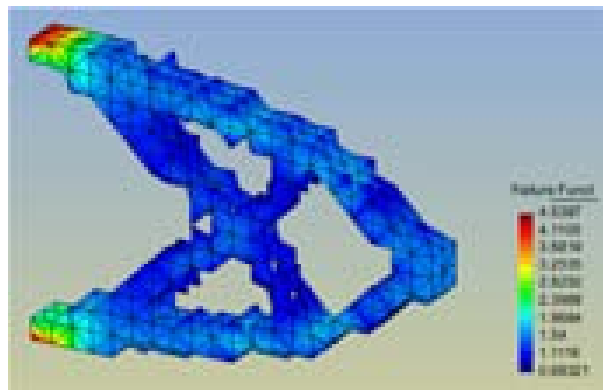


Figura 4.3 (e) - Função de falha refino 2 do problema 4.3.

Neste caso, o percentual de volume material do leiaute ótimo final equivale a 39% do material do modelo original, Fig. 4.3 (d)

Problema 4.4

Considera-se agora o problema de uma viga L de dimensões $a = 0,09m$, $b = 0,03m$, $c = 0,06m$, $d = 0,01m$, $e = 0,03m$ e $r = 0,02m$ fixada na lateral esquerda e submetida a uma carga distribuída cisalhante $F = -119\,511 \times 10^3 N/m^2$ no centro da face lateral direita e a duas cargas térmicas: uma temperatura prescrita $\bar{T}_1 = 100^\circ C$ em toda a face curva e outra temperatura prescrita $\bar{T}_2 = 50^\circ C$ na fixação lateral esquerda. A área do carregamento é de $0,01 \times 0,01m^2$ e a área da fixação é $0,01 \times 0,09m^2$, Fig.4.4 (a). Neste exemplo foram realizados três processamentos, conforme Figs. 4.4(b), (d) e (f).

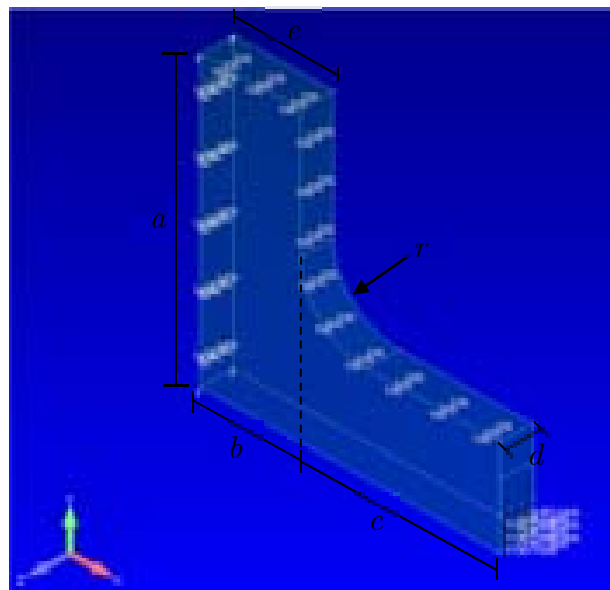
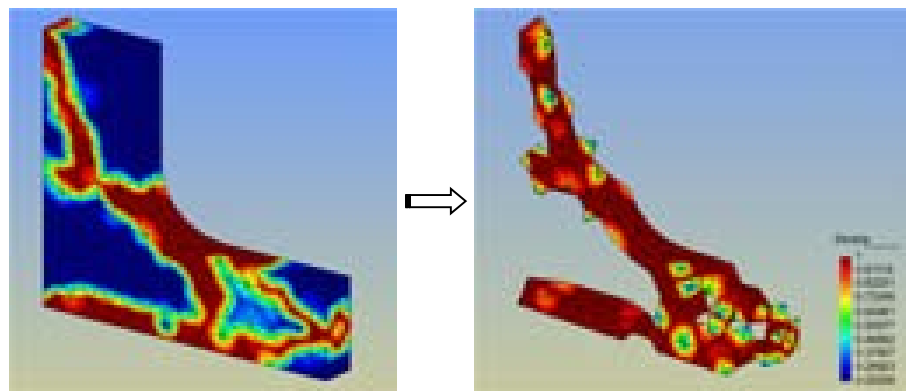


Figura 4.4 (a) – Descrição do problema 4.4

Refino 1: malha com 559 nós e 1913 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.4 (b) - Resultado refino 1 do problema 4.4.

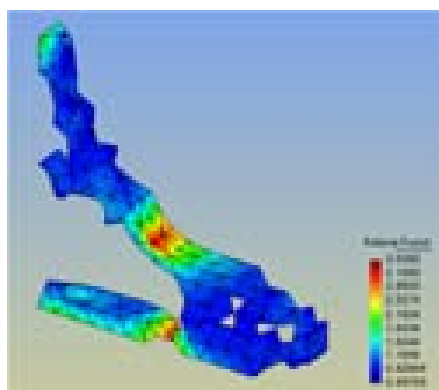
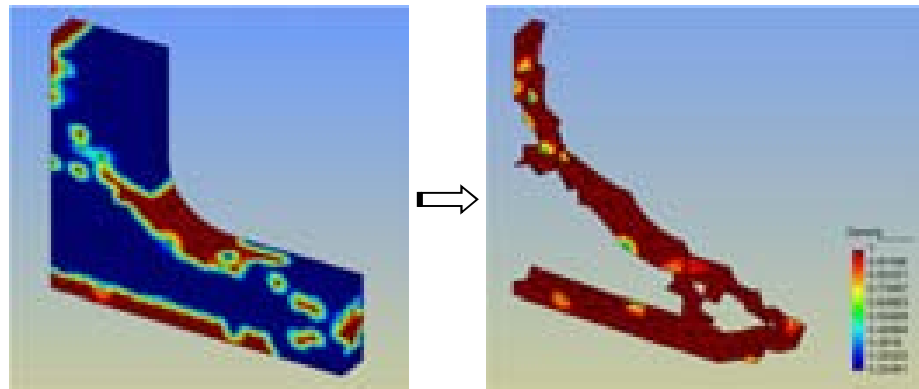


Figura 4.4 (c) - Função de falha refino 1 do problema 4.4.

Refino 2: malha com 992 nós e 3832 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.4 (d) - Resultado refino 2 do problema 4.4.

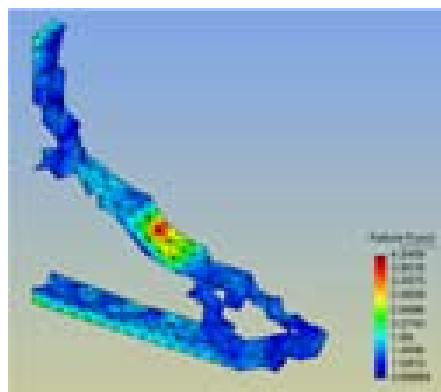
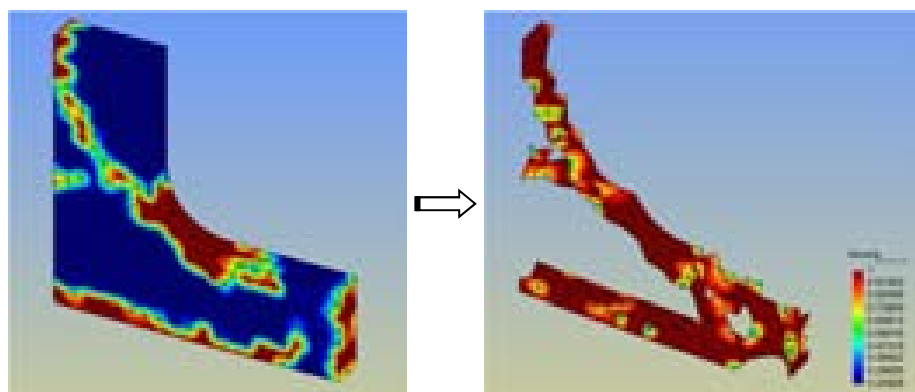


Figura 4.4 (e) - Função de falha refino 2 do problema 4.4.

Refino 3: malha com 1029 nós e 4012 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.4 (f) - Resultado refino 3 do problema 4.4.

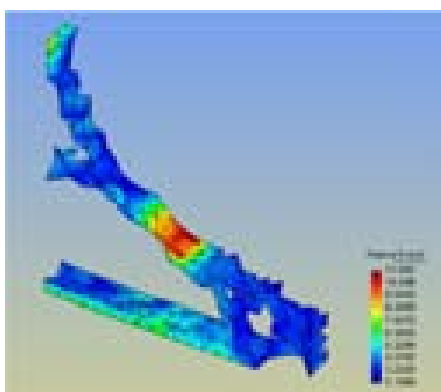


Figura 4.4 (g) - Função de falha refino 3 do problema 4.4.

Neste exemplo o volume de material do leiaute ótimo final, Fig.4.4(f), representa 36.9% do material presente na estrutura original.

Problema 4.5

Uma vez que os trabalhos sobre otimização de estruturas termoelásticas disponíveis na literatura e utilizados na revisão bibliográfica da presente pesquisa versam apenas sobre problemas 2D, para efeito de comparação será considerado o Problema 4.3 formulado e resolvido em Silva, (2007). Trata-se de uma estrutura 2D bi-apoiada, cuja figura ilustrativa é abaixo reproduzida:

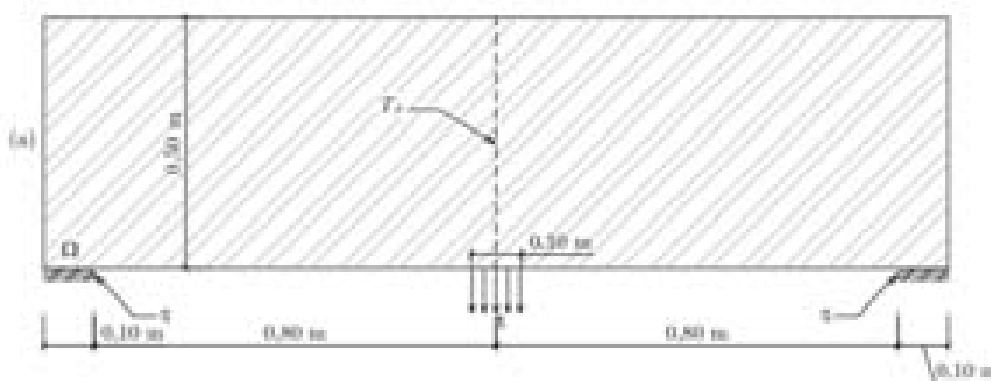


Figura 4.5 (a) – Estrutura 2D, Silva (2007).

A comparação foi realizada com uma estrutura 3D possuindo $0,20m$ de comprimento, $0,05m$ de altura e $0,01m$ de espessura. Como mostra a figura 4.5 (a) acima, a estrutura é apoiada nos cantos da base e submetida a uma carga distribuída vertical $F = 207 \times 10^6 N/m^2$ no centro da base e a uma temperatura prescrita

$\bar{T} = 100^{\circ}C$ no eixo vertical central. O modelo 3D utilizado na comparação está representado na Fig. 4.5 (b) abaixo, sendo o eixo vertical original substituído por um plano vertical central.

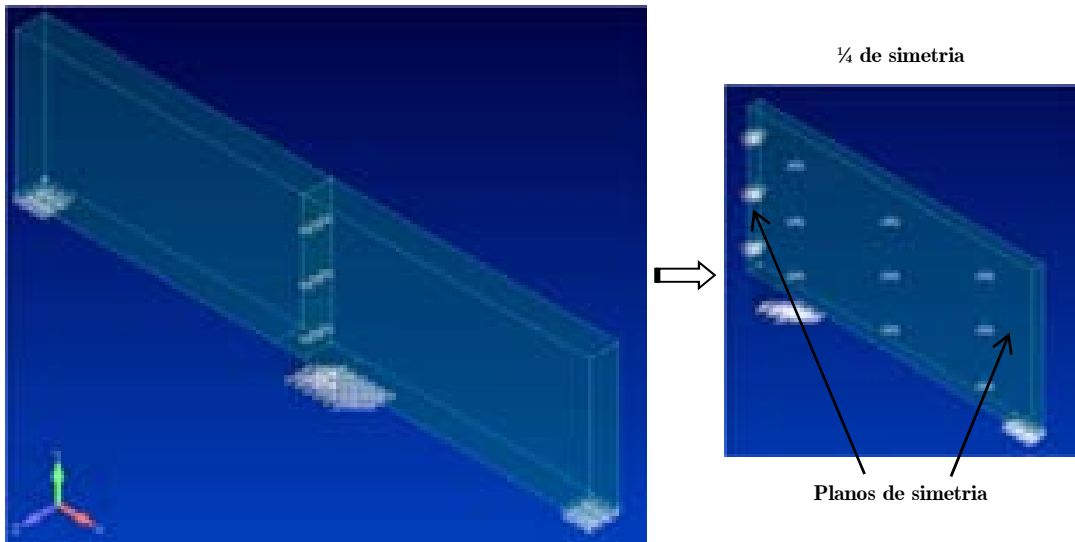


Figura 4.5(b) – Descrição do problema 4.5.

Nesse modelo as áreas de cada apoio são iguais a $0,01 \times 0,01 m^2$ e a área de aplicação da carga é igual a $0,01 \times 0,02 m^2$ e há uma carga térmica de $\bar{T} = 50^{\circ}C$ aplicada nos apoios.

Considerando a simetria do modelo e objetivando reduzir o custo computacional, utilizou-se um modelo representando $\frac{1}{4}$ da estrutura sob análise e, para tanto, dois processamentos foram realizados: inicialmente foi utilizada uma malha com 753 nós e 2618 elementos e em seguida uma malha com 1262 nós e 4704 elementos. Os resultados estão ilustrados nas Figs. 4.5 (c) - (f).

Refino1: malha com 753 nós e 2618 elementos.

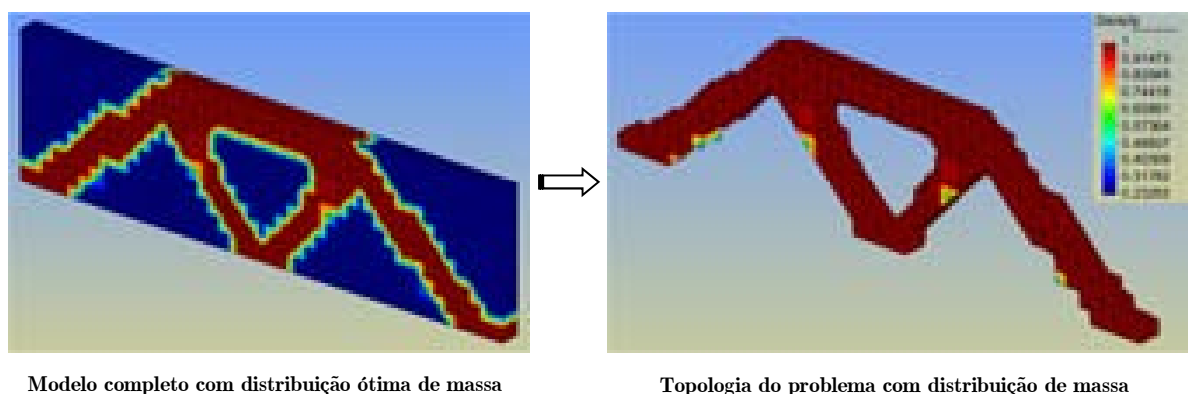


Figura 4.5 (c) - Resultado refino 1 do problema 4.5.

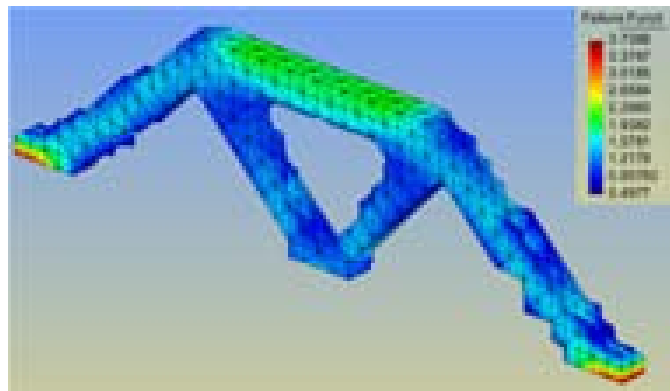
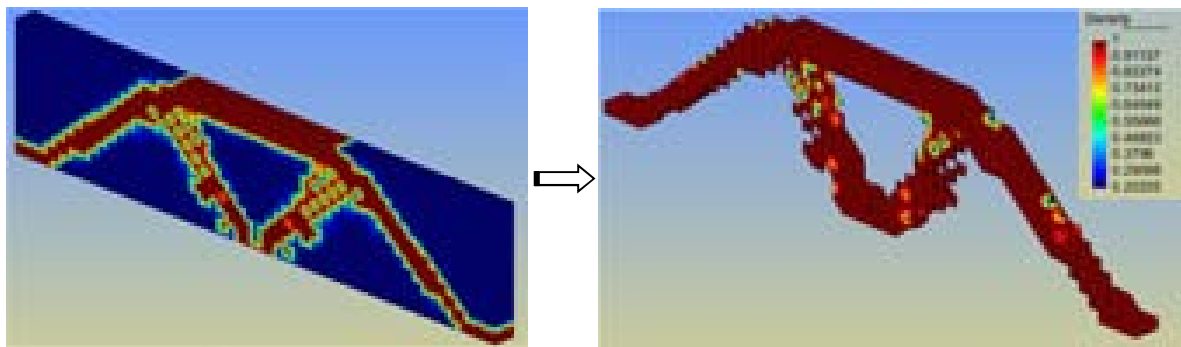


Figura 4.5(d) - Função de falha refino 1 do problema 4.5.

Refino2: malha com 1262 nós e 4704 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.5 (e) - Resultado refino 2 do problema 4.5.

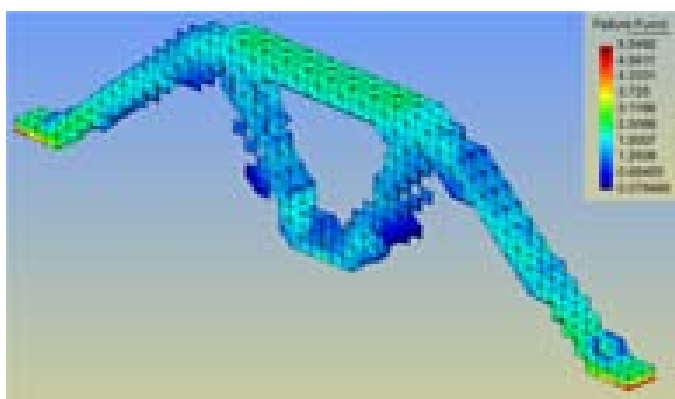


Figura 4.5(f) - Função de falha refino 2 do problema 4.5.

Comparando os resultados obtidos no modelo 3D com o seu análogo 2D, formulado e resolvido por Silva (2007), Fig. 4.5(g), verifica-se a concordância dos layouts ótimos. No presente caso 3D o volume de material da topologia ótima, Fig.4.5(e), representa 34.3% da massa da estrutura original.



Figura 4.5(g) - Resultado problema 4.3 formulado e resolvido por Silva, (2007).

Problema 4.6

Ainda para efeito de comparação com resultados 2D disponíveis na literatura, considera-se agora Problema 4.7 também formulado e resolvido por Silva, (2007). Trata-se de uma estrutura 2D fixada nas laterais, submetida a uma carga vertical $F = 207 \times 10^6 N/m$ no centro da base inferior e a uma temperatura prescrita $\bar{T} = 100^\circ C$ em ambas as fixações, conforme figura reproduzida abaixo:

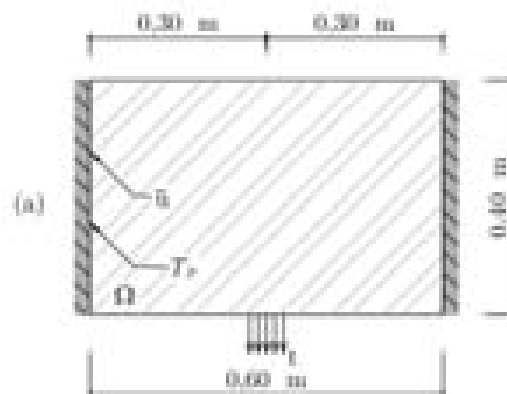


Figura 4.6 (a) – Estrutura 2D, Silva (2007).

Objetivando reduzir o tempo de processamento e manter a proporcionalidade das dimensões da estrutura original foi utilizado um modelo 3D com $0,06m$ de comprimento, $0,04m$ de altura e $0,01m$ de espessura. A estrutura está fixada nas duas laterais e submetida a uma carga distribuída $F = 207 \times 10^6 N/m^2$ no centro da base e a uma temperatura prescrita $\bar{T} = 100^\circ C$ nas duas fixações. A área do carregamento mecânico é de $0,005 \times 0,01m^2$, enquanto a área de cada fixação é de $0,01 \times 0,04m^2$, Fig.4.6(b).

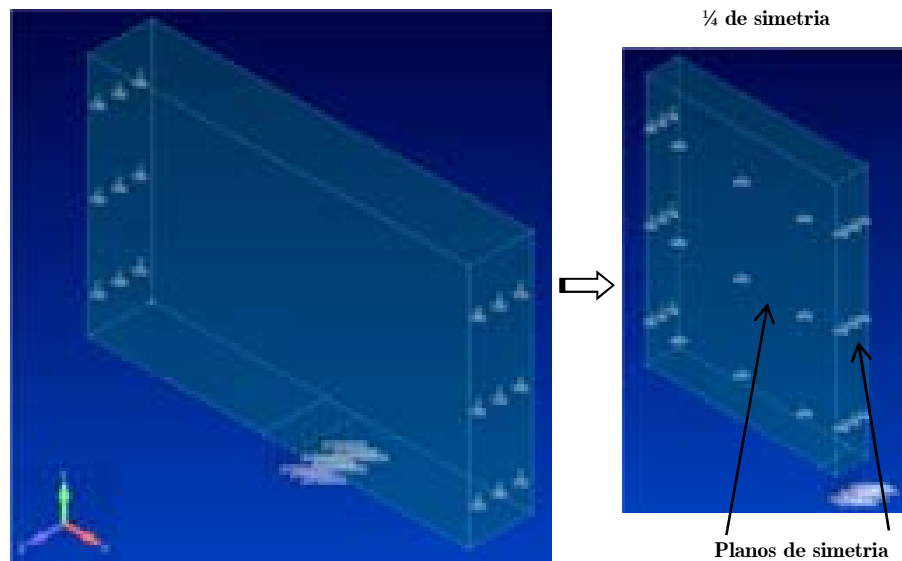


Figura 4.6(b) – Descrição do problema 4.6.

Também buscando a redução do custo computacional foi analisada $\frac{1}{4}$ de simetria do modelo, Fig. 4.6 (b), em três processamentos. O primeiro com 367 nós e 1291 elementos; o segundo com 757 nós e 2873 elementos; o terceiro com 1137 nós e 4662 elementos. A sequência de leiautes ótimos intermediários mostrando a convergência para o leiaute ótimo final é exibida nas Fig. 4.6 (c), (e) e (g). As Figs. 4.6 (d), (f) e (h) exibem a função de falha para cada caso.

Refino 1: malha com 367 nós e 1291 elementos.

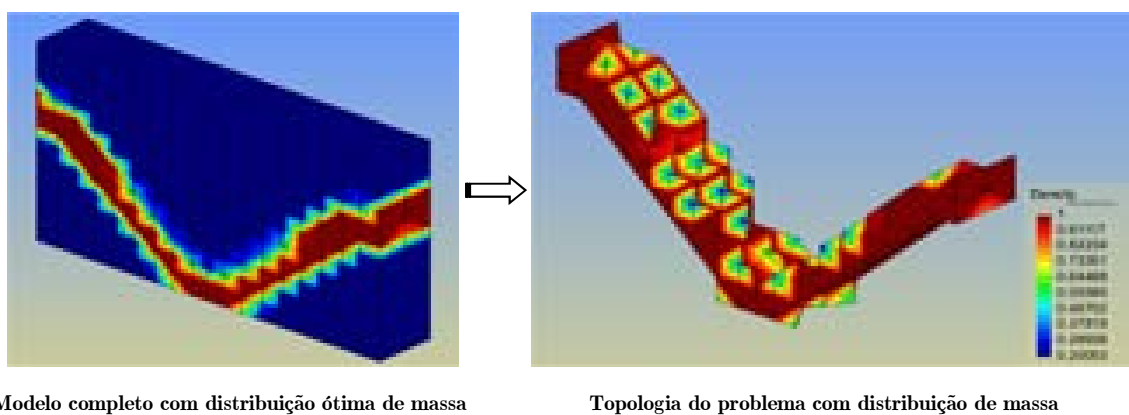


Figura 4.6(c) - Resultado refino 1 do problema 4.6.

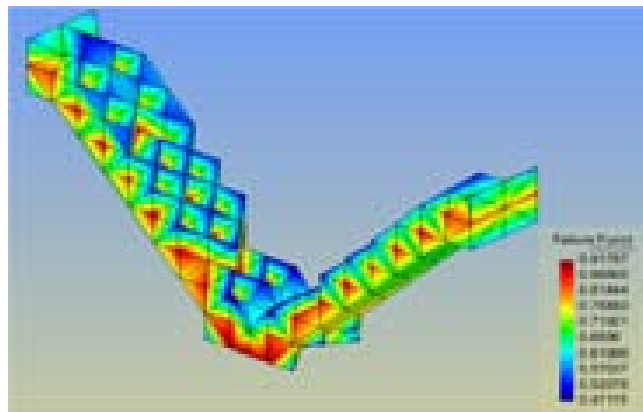
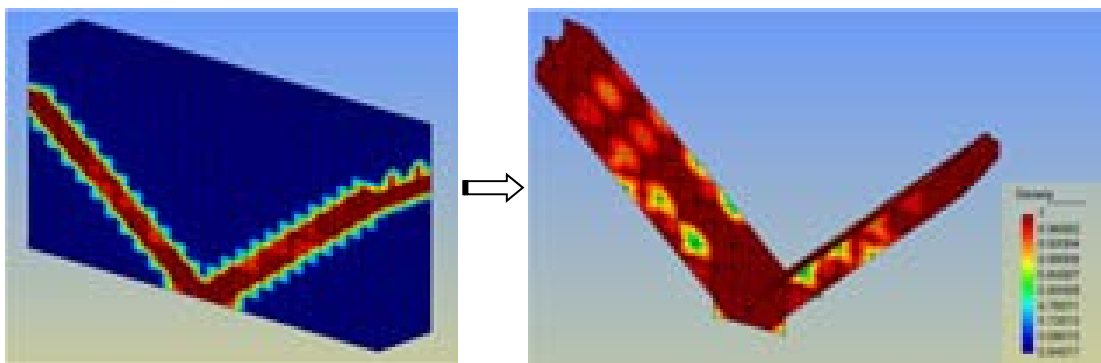


Figura 4.6(d) - Função de falha refino 1 do problema 4.6.

Refino 2: malha com 757 nós e 2873 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.6(e) - Resultado refino 2 do problema 4.6.

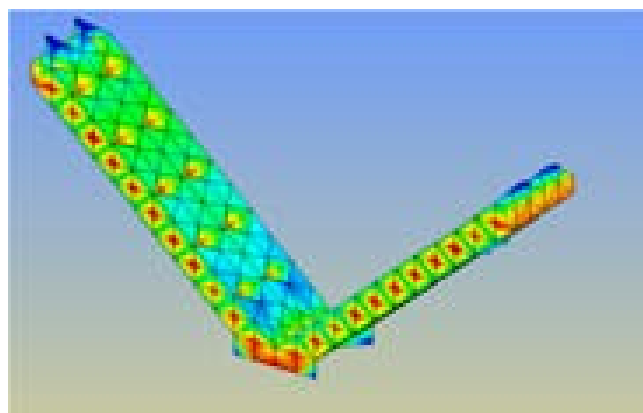
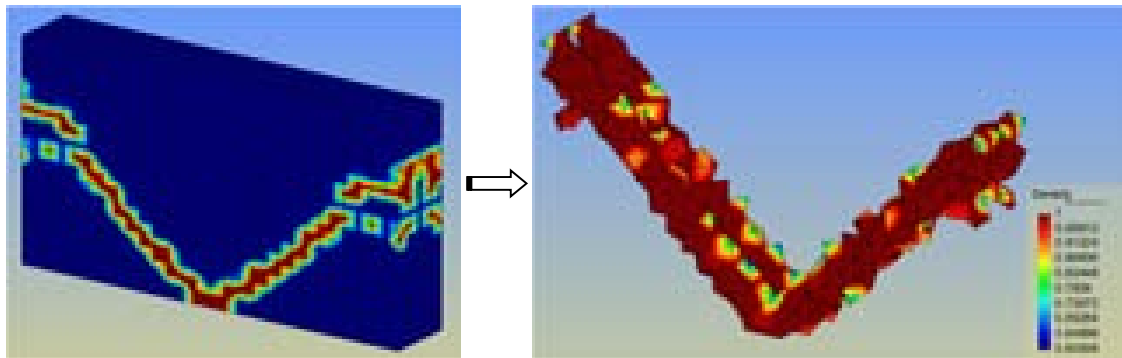


Figura 4.6(f) - Função de falha refino 2 do problema 4.6.

Refino 3: malha com 1137 nós e 4662 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.6(g) - Resultado refino 3 do problema 4.6.

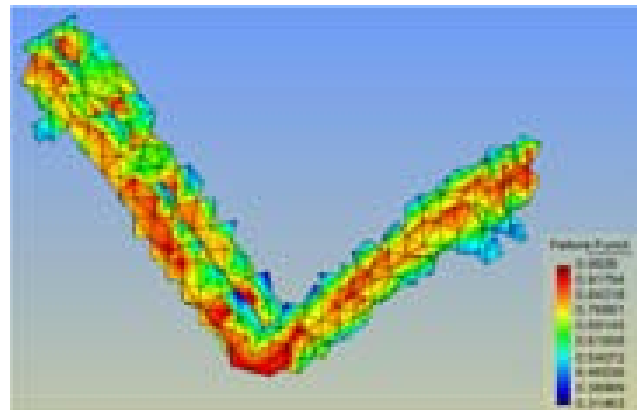


Figura 4.6(h) - Função de falha refino 3 do problema 4.6.

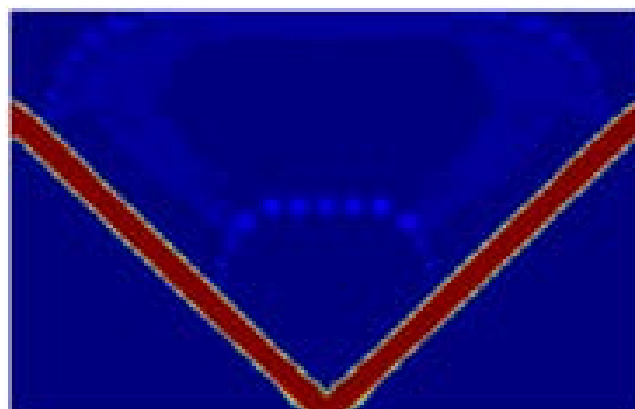


Figura 4.6(i) - Resultado problema 4.7 formulado e resolvido por Silva, (2007).

A sequência dos leiautes ótimos exibidos nas Figs. 4.6 (c) e (e) mostram a evolução da qualidade do contorno material e a convergência para o leiaute ótimo, bem como

sua concordância com o seu análogo 2D. Na Fig. 4.6(g), apesar do contorno material não se apresentar de maneira bem definida, novamente é observado o mesmo padrão obtido no modelo 2D resolvido por Silva, (2007). Aqui o volume de material da topologia ótima final, Fig.4.6(h), representa 20% da massa da estrutura original.

Problema 4.7

Considera-se agora um bloco retangular com um furo circular centrado no centro do bloco. O bloco tem $0,16m$ de comprimento, $0,08m$ de altura e $0,01m$ de espessura, sendo $r = 0,02m$ o raio do furo. A estrutura está submetida a uma tração distribuída $F = 207 \times 10^6 N/m^2$ no meio das laterais opostas e a uma temperatura prescrita $\bar{T} = 100^\circ C$ no contorno do furo, sendo as áreas do carregamento mecânico iguais a $0,005 \times 0,01m^2$. A Fig.4.7(a) abaixo exhibe o modelo da estrutura juntamente com $\frac{1}{4}$ da mesma, na qual foi aplicado o processo de otimização.

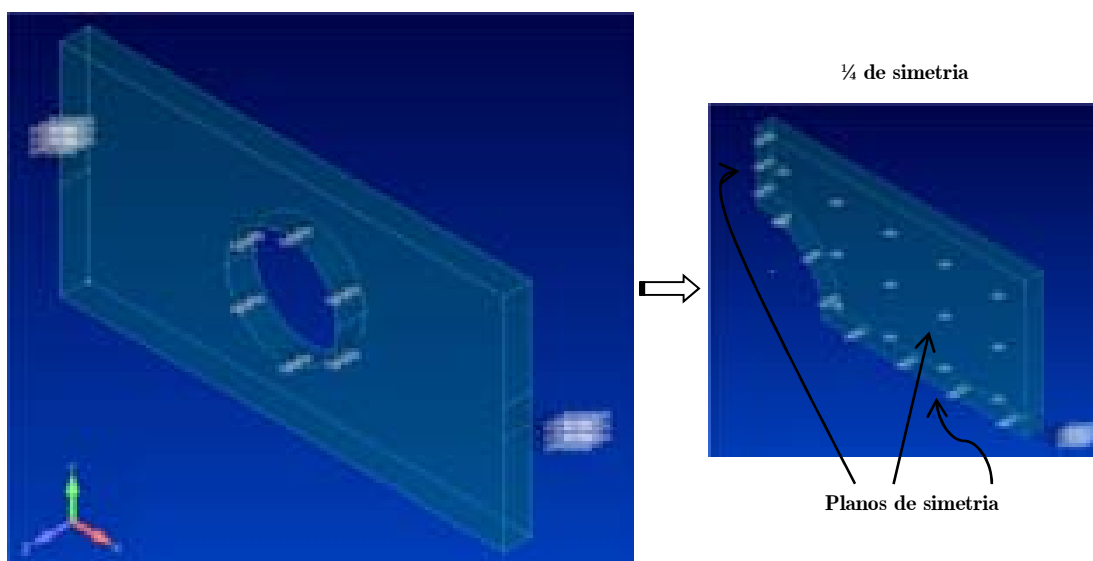


Figura 4.7(a) – Descrição do problema 4.7.

Foram realizados três processamentos. O primeiro utilizou uma malha com 301 nós e 803 elementos, o segundo uma malha com 606 nós e 2123 elementos e o terceiro fez uso de uma malha com 836 nós e 3008 elementos. A sequência de figuras abaixo mostra a evolução dos leiautes ótimos.

As Figs. 4.7(b) – (g) exibem os leiautes ótimos para cada caso.

Refino 1: malha com 301 nós e 803 elementos.

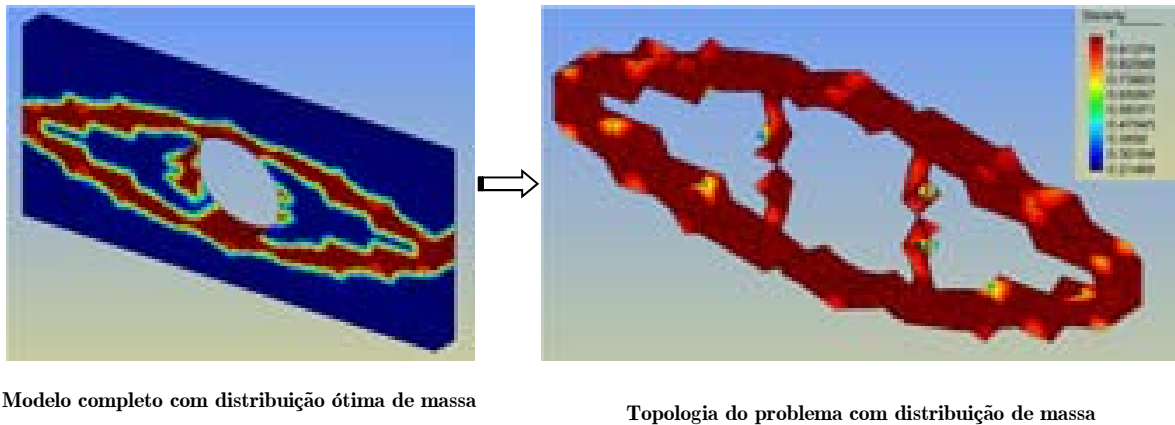


Figura 4.7(b) - Resultado refino 1 do problema 4.7.

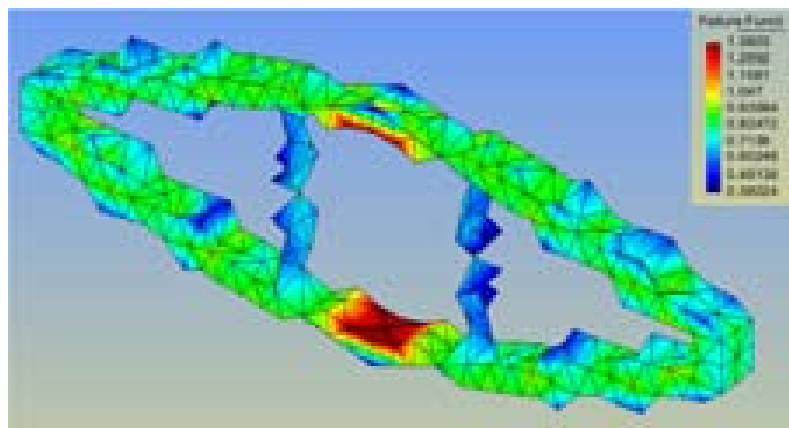


Figura 4.7(c) - Função de falha refino 1 do problema 4.7.

Refino 2: malha com 606 nós e 2123 elementos.

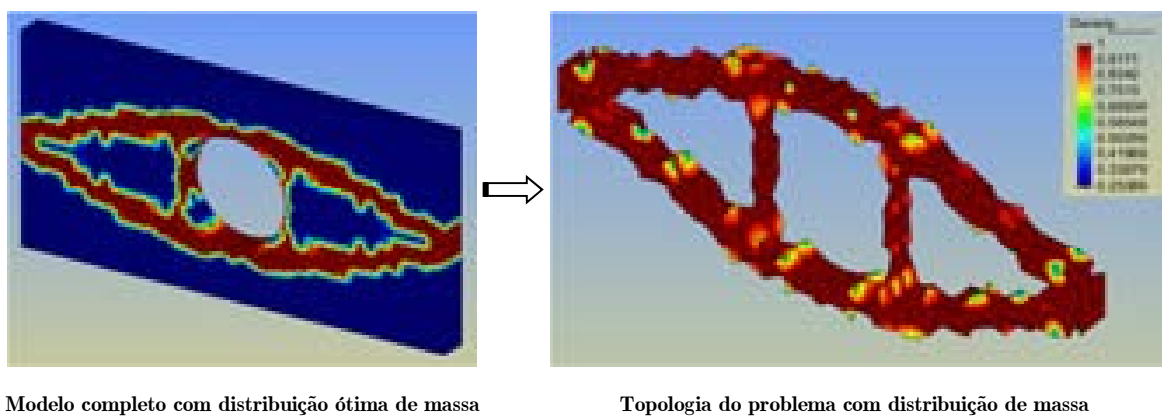


Figura 4.7(d) - Resultado refino 2 do problema 4.7.

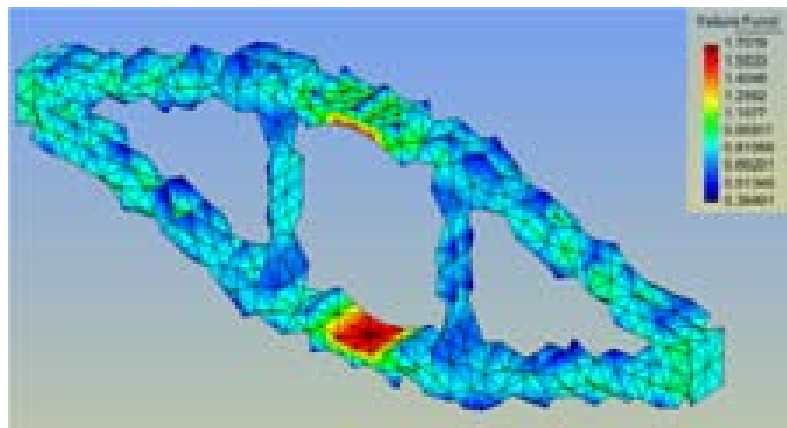
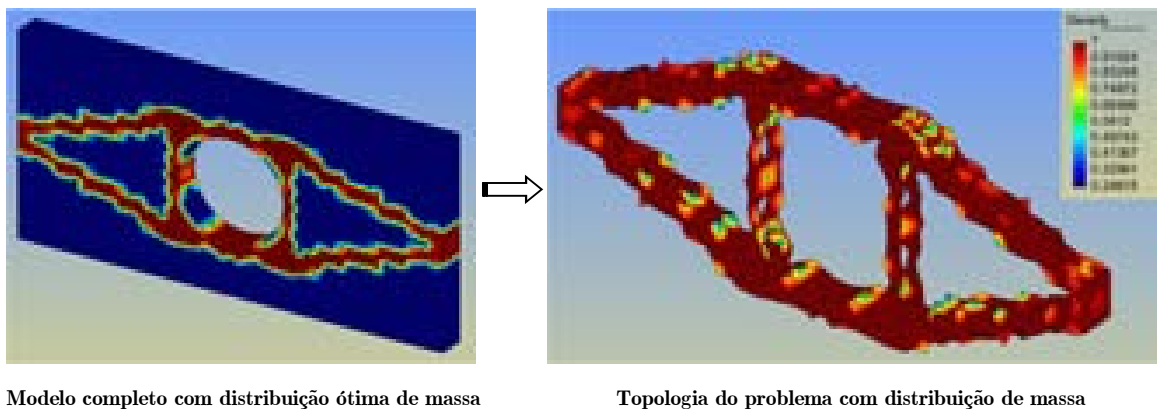


Figura 4.7(e) - Função de falha refino 2 do problema 4.7.

Refino 3: malha com 836 nós e 3008 elementos.



Modelo completo com distribuição ótima de massa

Topologia do problema com distribuição de massa

Figura 4.7(f) - Resultado refino 3 do problema 4.7.

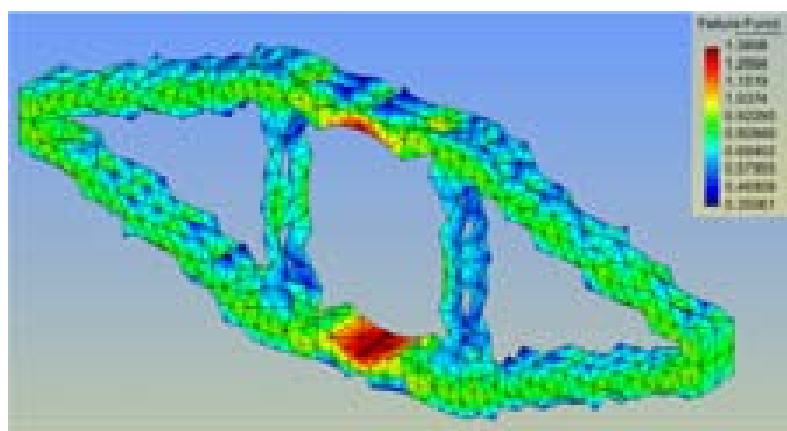


Figura 4.7(g) - Função de falha refino 3 do problema 4.7.

Neste último processamento vale destacar a excelente definição da interface material/vazio e a significativa redução no volume de material da topologia ótima final, Fig.4.7(f), a qual equivale a apenas 22.7% da massa da estrutura em estudo.

Problema 4.8

Consideremos agora uma viga simplesmente apoiada como mostra a Fig. 4.8 (a). A viga possui $0,20m$ de comprimento, $0,05m$ de altura e $0,01m$ de espessura e está apoiada nos cantos da sua base. Ela está submetida a uma temperatura prescrita aplicada em uma superfície medindo $0,10m \times 0,01m$ posicionada no centro da face superior e está sujeita a uma carga distribuída $F = -207 \times 10^6 N/m^2$, aplicada no centro da base inferior. Além disso, há uma temperatura prescrita $\bar{T} = 50^\circ C$ aplicada nos apoios. A área de aplicação da carga é de $0,01 \times 0,01m^2$.

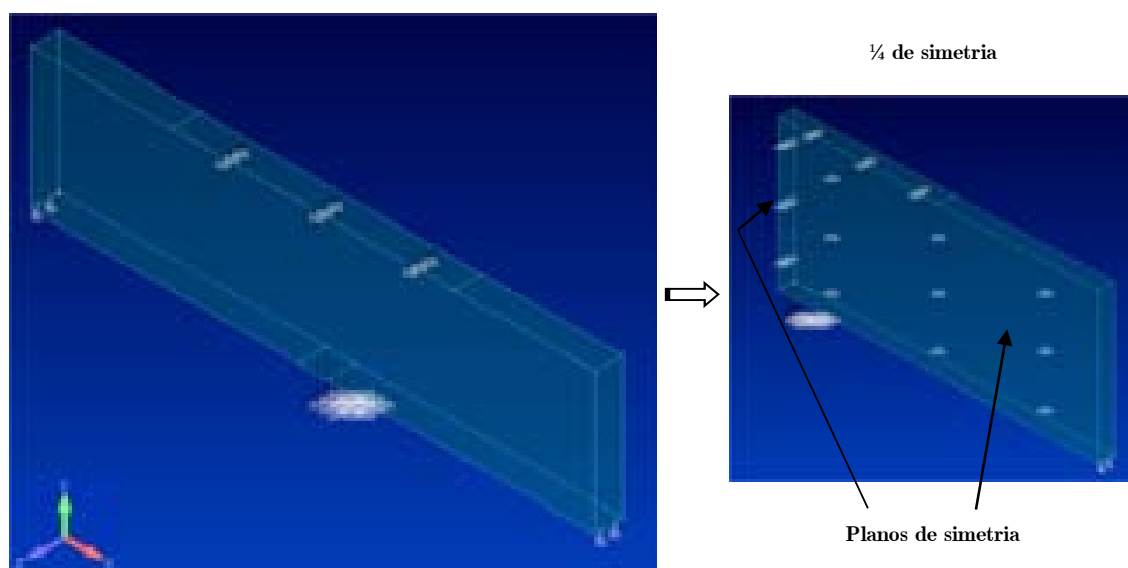


Figura 4.8(a) – Descrição do problema 4.8.

Neste exemplo pretende-se mostrar que o método proposto é sensível à variação de temperatura. Para tanto, foram processados quatro casos nos quais a malha de elementos finitos, o carregamento mecânico e a temperatura nos apoios mantiveram-se constantes e procedeu-se à variação da temperatura na superfície acima descrita. Quatro situações foram estudadas: $\bar{T} = 100^\circ C$, $\bar{T} = 300^\circ C$, $\bar{T} = 500^\circ C$ e $\bar{T} = 600^\circ C$. Os resultados são mostrados na sequência de Figuras 4.8 (b), 4.8 (c), 4.8 (d) exibidas abaixo:

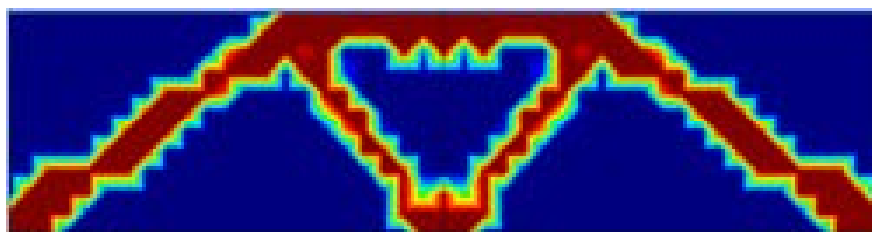


Fig 4.8(b) – Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 100^{\circ}C$.

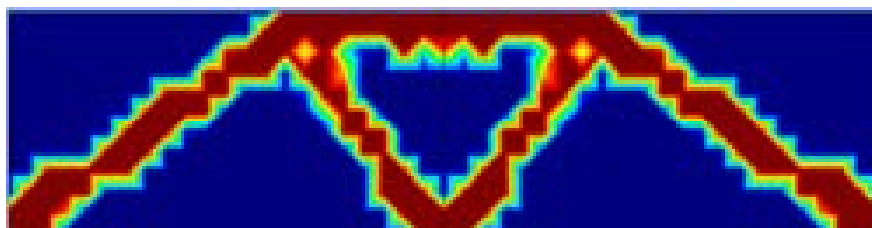


Fig 4.8(c) – Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 300^{\circ}C$.

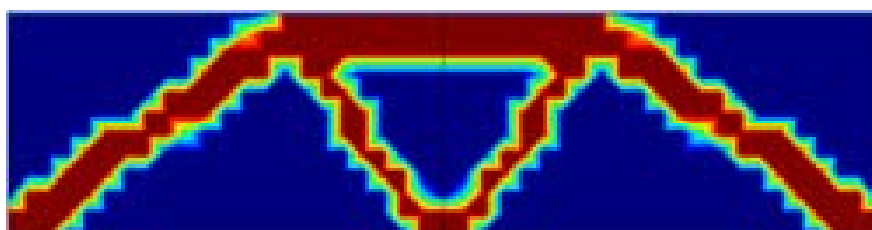


Fig 4.8(d) – Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 500^{\circ}C$.

Com o aumento da magnitude da temperatura verifica-se, Figs. 4.8 (b), (c) e (d), pequenas variações na interface material/vazio nas proximidades da superfície submetida à temperatura prescrita, sendo estas mais acentuadas quando a temperatura passa de $300^{\circ}C$ para $500^{\circ}C$, o que confirma a capacidade da presente proposta em captar os efeitos termoelásticos em estruturas 3D.

As pequenas variações observadas nas proximidades da superfície submetida à temperatura prescrita significam, entre outras coisas, que a carga mecânica tem efeito dominante sobre o efeito térmico, uma vez que o carregamento mecânico possui maior contribuição no cálculo das tensões do que a parcela de carga térmica. Assim, se a carga mecânica é dominante, como nos casos acima, a distribuição de material ao redor da fonte térmica é praticamente a mesma que aquela com somente carga mecânica. No entanto, com o aumento da temperatura prescrita, a carga térmica passa a ter efeito mais significativo e o material é distribuído de maneira a reforçar o entorno da região submetida a tal tipo de carga, modificando, desta forma, a configuração do leiaute ótimo nas proximidades da fonte térmica. Este fato fica

evidente quando comparamos as Figs. 4.8 (b)-(c) com as Figs. 4.8 (d)-(e) e verificamos que nestas últimas há uma maior distribuição de material no entorno da fonte térmica.

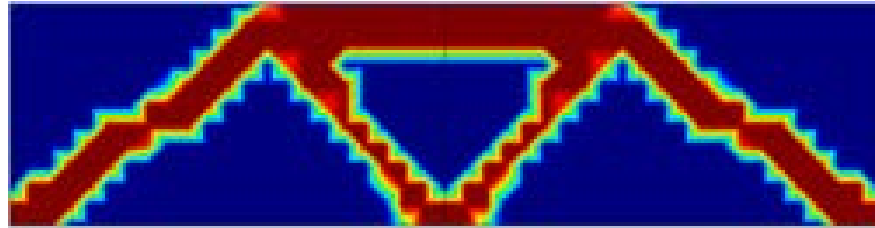


Fig 4.8(e) – Leiaute frontal: 759 nós, 2659 elementos e $\bar{T} = 600^{\circ}C$.

Vale salientar, entretanto, que a presente proposta está habilitada a trabalhar apenas com pequenas variações de temperatura e que, sob temperaturas elevadas, as deformações extrapolam o regime linear e, assim, a proposta em estudo perde a sua validade. Nas Figs. 4.8 (f)-(n) são mostrados os leiautes ótimos para cada caso, juntamente com a respectiva distribuição do critério de falha.

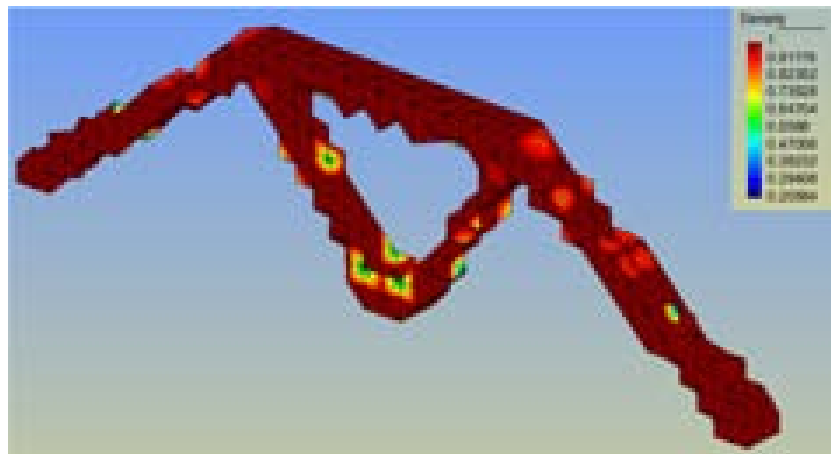


Fig 4.8(f) – Topologia do problema com distribuição de massa, $\bar{T} = 100^{\circ}C$.

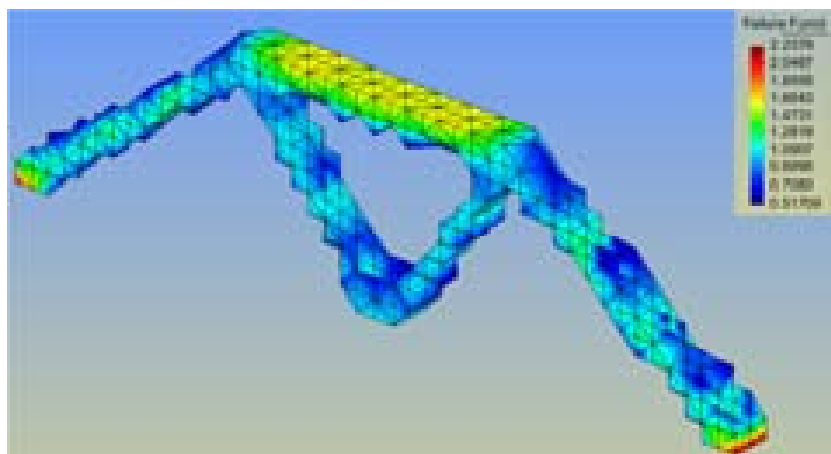


Fig 4.8(g) – Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 100^{\circ}C$.

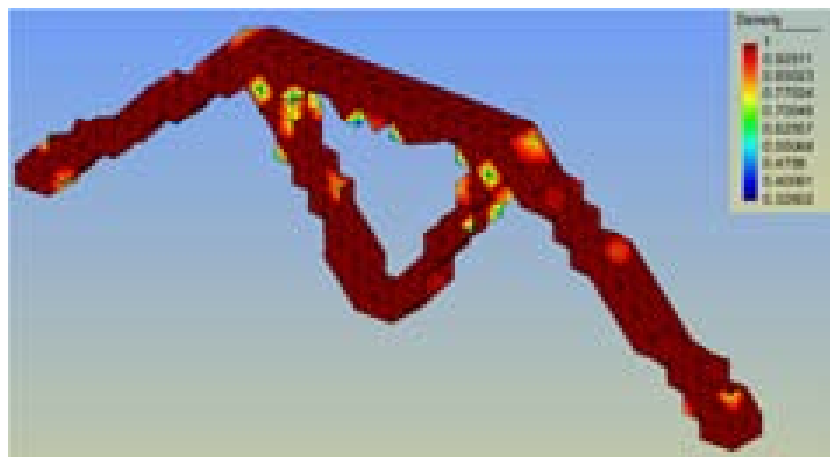


Fig 4.8(h) – Topologia do problema com distribuição de massa, $\bar{T} = 300^{\circ}C$.

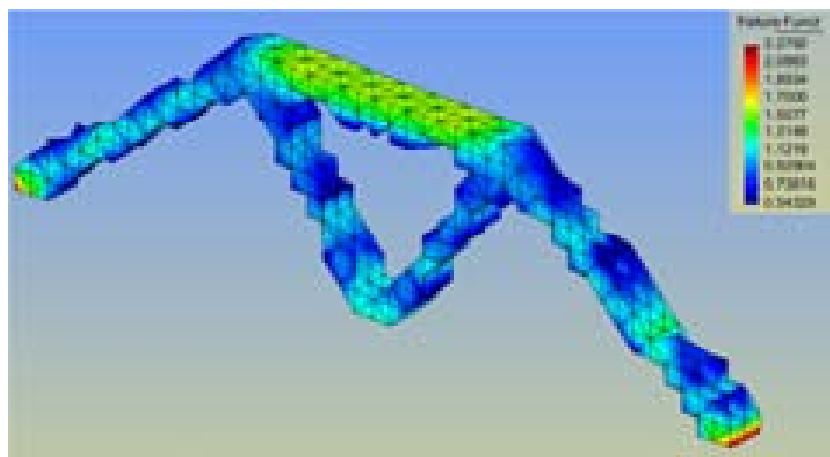


Fig 4.8(i) – Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 300^{\circ}C$.

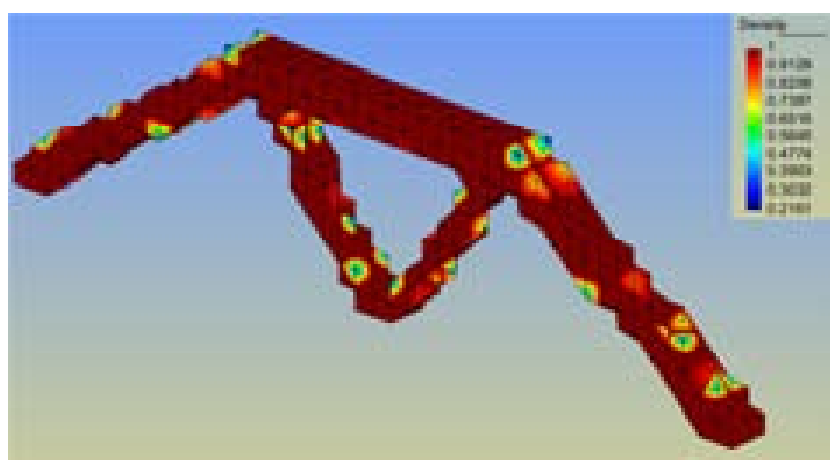


Fig 4.8(j) – Topologia do problema com distribuição de massa, $\bar{T} = 500^{\circ}C$.

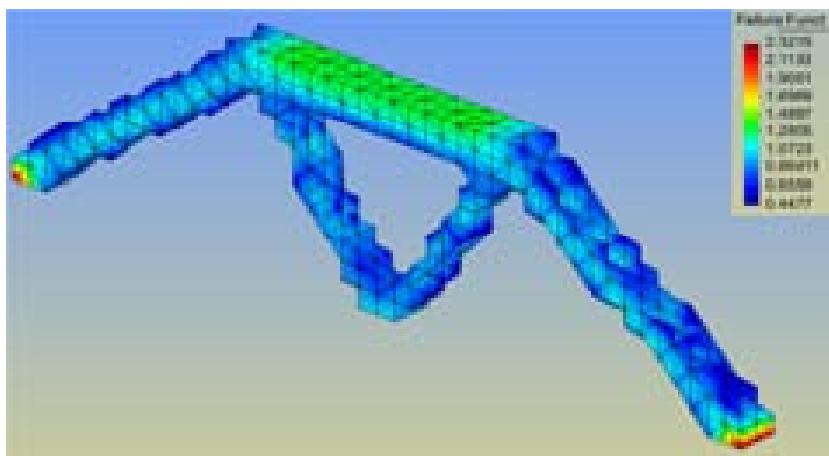


Fig 4.8(l) – Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 500^{\circ}C$.

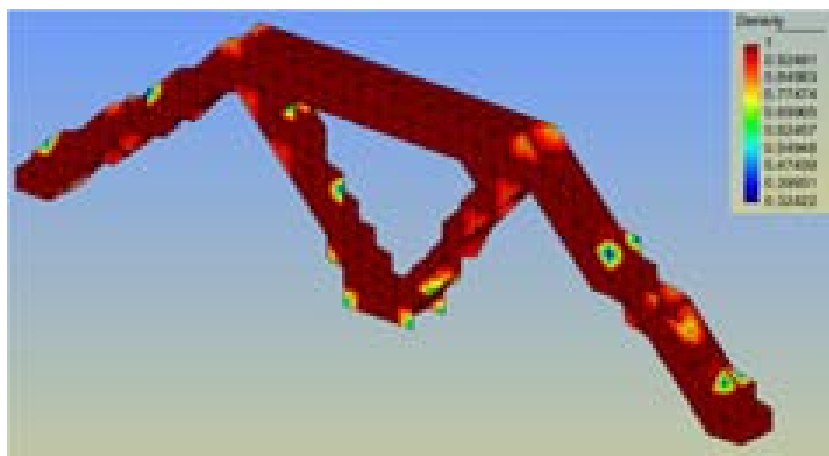


Fig 4.8(m) – Topologia do problema com distribuição de massa, $\bar{T} = 600^{\circ}C$.

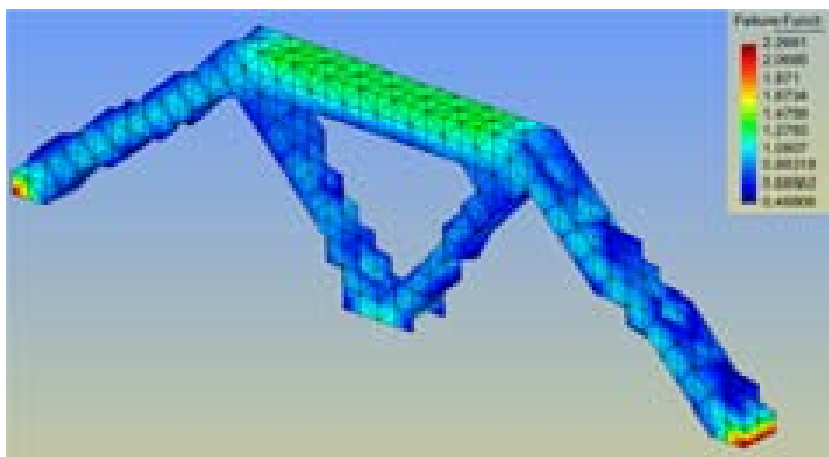


Fig 4.8(n) – Função de falha problema 4.8, $\bar{T} = 600^{\circ}C$.

4.4 Conclusão

O método desenvolvido neste trabalho, otimização de estruturas termoelásticas 3D sob um critério de tensão, mostrou ser bastante eficiente na geração de leiautes estruturais ótimos. A abordagem do problema através da utilização de uma única equação de estado, acoplando em uma só expressão os campos térmico e mecânico, possibilitou a descrição do fenômeno em um domínio comum. Este fato, juntamente com a utilização de um critério de tensão global e o uso de um elemento finito de baixa ordem, possibilitou uma significativa redução no tempo de processamento.

Além da redução do custo computacional destacada acima, deve-se frisar ainda que foi possível contornar os problemas de tabuleiro de xadrez, bem como evitar problemas de dependência da topologia ótima final em relação à malha inicial, através da imposição de restrições do tipo caixa às componentes do gradiente de densidades relativas.

Outro aspecto digno de nota é o fato de a abordagem aqui desenvolvida utilizar o Método do Lagrangiano Aumentado, o qual trás, como parte de sua formulação, o Método da Penalidade Exterior. Assim sendo, a solução ótima é obtida por meio de aproximações que violam o espaço de projeto original, o que explica o fato de a violação das funções de falha ocorrer em apenas alguns elementos da malha.

Verificou-se também a sensibilidade do método frente a variações de temperatura, uma vez que é possível avaliar a definição do leiaute final ótimo quando há um aumento da temperatura dentro da margem linear de deformações.

A abordagem proposta resulta, portanto, em uma ferramenta bastante promissora na obtenção de leiautes ótimos possuindo alta resolução nas interfaces matéria/vazio.

Capítulo 5

Sugestões de Trabalhos Futuros

5.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

Com base nas pesquisas bibliográficas e nos resultados alcançados no presente trabalho, consideram-se promissoras as seguintes possibilidades de trabalhos futuros:

- Incorporação dos efeitos da radiação no estudo de otimização topológica de estruturas termoelásticas 3D.
- Abordagem do problema de otimização topológica de estruturas termoelásticas 3D via método h -adaptativo de refino de malha.
- Aplicação do método de otimização topológica ao estudo de estruturas termoelásticas 3D sob regime transiente.
- Combinação do método de otimização topológica com o método conjunto nível no estudo de estruturas termoelásticas.
- Otimização topológica de estruturas termoelásticas sujeitas a múltiplos carregamentos térmicos.

Referências Bibliográficas

1. ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A.M. **A level-set method for shape optimization.** Comptes Rendus Mathematique v. 334 (12), p. 1125–1130, 2002.
2. ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A.M. **Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method.** Journal of Computational Physics, v. 194, p. 363–393, 2004.
3. ANSOLA, R.; CANALES, J.; TÁRRAGO, J.A. **An efficient sensitivity computation strategy for the evolutionary structural optimization (ESO) of continuum structures subjected to self-weight loads.** Finite Elements in Analysis and Design, v. 42, p. 1220–1230, 2006.
4. ANSOLA, R.; CANALES, J.; TÁRRAGO, J.A. **An efficient sensitivity computation strategy for the evolutionary structural optimization (ESO) of continuum structures subjected to self-weight loads.** Finite Elements in Analysis and Design, v. 42, p. 1220–1230, 2006.
5. ANSOLA, R. *et al.* **A simple evolutionary topology optimization procedure for compliant mechanism design.** Finite Elements in Analysis and Design, v.44, p. 53–62, 2007.
6. BELYTSCHKO, T.; XIAO, S.P.; PARIMI, C. **Topology optimization with implicit function and regularization.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 57, p. 1177–1196, 2003.
7. BENDSOE, M. P. **Optimization shape design as a material distribution problem,** Structural Optimization, v. 1, p. 193-202, 1989.
8. BENDSØE, M.P.; KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. v. 71, p. 197–224, 1988.
9. BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications.** Berlin, Heidelberg, Springer, 2003.

10. BOBARU, F.; MUKHERJEE, S. **Meshless approach to shape optimization of linear thermoelastic solids**. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 53, p. 765–796, 2002.
11. BOURDIN, B. **Filters in topology optimization**, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* v. 50, (9), p. 2143–2158, 2001.
12. BRUNS, T. E. **Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems**. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 50, p. 2859–2873, 2007.
13. CHEN, B.; TONG, L. **Thermomechanically coupled sensitivity analysis and design optimization of functionally graded materials**. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* v. 194 p. 1891–1911, 2005.
14. CHEN, S. **A level set approach for optimal design of smart energy harvesters**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, p. 2532–2543, 2010.
15. CHENG, K. T., OLHOFF, N. **An investigation concerning optimal design of solid elastic plates**, *Int. J. Solids Structures*, v. 17, p. 305-23, 1981.
16. CHENG, G. D.; GUO, X. **ϵ -Relaxed approach in structural topology optimization**, *Structural Optimization*, v. 13, p. 258-66, 1997.
17. CHO, S.; CHOI, J.Y. **Efficient topology optimization of thermo-elasticity problems using coupled field adjoint sensitivity analysis method**, *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 41, p. 1481–1495, 2005.
18. COSTA Jr., J. C. A. **Otimização Topológica com Refinos H -adaptativos**. 2003. 156 p. Tese (Doutorado em Engenharia). Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003. Orientador: Marcelo Krajnc Alves.
19. COSTA Jr., J. C. A., Alves M. K. **Layout optimization with h -adaptivity of structures**, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 58(1), p. 83-102, 2003.

20. Costa Jr. J. C. A., Alves M. K. **Topology optimization with h -adaptivity of thick plates**. In: GIMC-third joint conference of italian group of computational mechanics and ibero-latin american association of computational methods in engineering, Italy, CD Rom media, 2002.
21. COUTINHO, K. D. **Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais**. 2006. 96p. Dissertação(Mestrado em Engenharia). Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006. Orientador: João Carlos Arantes Costa Junior.
22. COX, H. L. **The theory of design**, Aeronaut. Res. Council Rep. No. 19791, 1958.
23. DIAZ, A.R.; SIGMUND, O. **Checkerboard patterns in lay-out optimization**. Struct. Optim. v. 10, p. 40–45, 1995.
24. ESCHENAUER, H.A.; KOBELÉV, H.A.; SCHUMACHER, A. **Bubble method for topology and shape optimization of structures**. Structural Optimization, v. 8, p. 142–151, 1994.
25. FOX, R. L. **Constraint surface normals for structural synthesis techniques**, AIAA J. v. 3, n.8, p. 1517-18, 1965.
26. GAO, T. **Topology optimization of heat conduction problem involving design-dependent heat load effect**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 44, p. 805-813, 2008.
27. GERSBORG-HANSEN, A.; BENDSØE, M.P.; SIGMUND, O. **Topology optimization of heat conduction problems using finite volume method**, Struct. Multidiscip. Optimiz., v. 31, p. 251–259, 2006.
28. GIBIANSKY, L. V.; CHERKAEV, A. V. **Microstructures of composites of external and exact estimates of provided energy density**, Technical Report, Ioffe Science and Technology Institute, Leningrad (in Russian), (1987); Also in Kohn RV (ed.), Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials, Birkhauser, New York, USA, 1994.

29. GIUSTI, S.M. *et al.* **Sensitivity of the macroscopic thermal conductivity tensor to topological microstructural changes.** *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 198, p. 727–739, 2009.
30. GUEDES, J. M.; KIKUCHI N. **Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods,** *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 83, p. 143-98, 1990.
31. HABER, E. **A multilevel level-set method for optimizing eigenvalues in shape design problems.** *Journal of Computational Physics* v. 198, p. 518–534, 2004.
32. HASSANI, B.; HINTON, E. **A review of homogenization and topology optimization II-analytical and numerical solution of homogenization equations.** *Computers and Structures*, v. 69, p. 719–738, 1998.
33. HEMP, W. S. **Optimum Structures**, Oxford: Claredon , 1973, 123 p.
34. JOG, C. **Distributed-parameter optimization and topology design for nonlinear thermoelasticity,** *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 132, p. 117–134, 1996.
35. JOG, C.S.; HABER, R.B. **Stability of finite element model for distributed parameter optimization and topology design.** *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* v.130, p.203–226, 1996.
36. KIM, J. H.; PAULINO, G. H. **Isoparometric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials,** *J. Appl. Mech.* v. 69, p. 502–514, 2002.
37. KIM, H.; QUERIN, O.M.; STEVEN G.P. **Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implementing fixed grid mesh.** *Struct. Multidisc. Optim.*, v. 24, p. 441–448, 2003.
38. KIRSCH, U. **Optimal Topologies of Structures.** *Appl. Mech. Rev.*, v. 42, n. 8, p. 223-239, 1989.
39. KOHN, R. V.; STRANG, G. **Optimal design and relaxation of variational problem,** *Comm. Pure. Appl. Math.*, 39, p. 1-25, 139-82, 353-77, 1986.

-
40. LEWIS, R.W.; RANSING, R.S. **The optimal design of interfacial heat transfer coefficients via a thermal stress model.** *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 34, p.193-209, 2000.
 41. LI, Q. *et al.* **Shape and topology optimization for heat conduction by evolutionary structural optimization,** *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 42, p. 3361–3371, 1999.
 42. LUO, Z.; TONG, L.Y; KANG, Z. **A level set method for structural shape and topology optimization using radial basis functions.** *Computers and Structures* v. 87, p. 425–434, 2009(a).
 43. LUO, Z. *et al.* **Design of piezoelectric actuators using a multiphase level set method of piecewise constants.** *Journal of Computational Physics*, v. 228, p. 2643–2659, 2009(b).
 44. LUO, Z. *et al.* **Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method.** *Journal of Computational Physics*, v. 227 (1), p. 680–705, 2007.
 45. LURIE, K.A.; CHERKAEV, A.V.; FEDOROV, A.V. **Regularization of optimal design problems for bars and plates.** I, II, III. *JOTA*, v. 37, p. 499–522, v. 37, p. 523–543, v. 42, p. 247–282, 1982.
 46. MICHALERIS, P.; TORTORELLI, D.A.; VIDAL, C.A. **Analysis and optimization of weakly coupled thermo-elasto-plastic systems with applications to weldment design.** *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, v. 38 (8), p. 1259–1285, 1995.
 47. MICHELL, A. G. M. **The limits of economy of material in framed structures,** *Philosophical Magazine, Series 6*, v. 8, p. 589-97, 1904.
 48. OLHOFF, N. *et al.* **Sliding regimes and anisotropy in optimal design of vibrating axisymmetric plates.** *Int. J. Solids Struct.* v. 17, p. 931–948, 1981.

49. OSHER, S.J.; SETHIAN, J.A. **Front Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations.** Journal Computational Physics, v. 78, p. 12-49, 1988.
50. OSHER, S.J.; SANTOSA F. **Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints. I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum.** Journal of Computational Physics, v. 171, p. 272–288, 2001.
51. PEDERSEN, P. **On optimal orientation of orthotropic materials.** Structural Optimization, v. 1, p. 101-06, 1989.
52. PRAGER, W.; ROZVANY, G.I.N. **Optimal layout of grillages,** Journal of Structural Mechanics, v. 5, n.1, p. 1-18, 1977(a).
53. PRAGER, W. A. **Note on discretized Michell structures,** Comput. Mechs. Appl. Mech. Engrg., v. 3, n. 3, p. 349-55, 1974.
54. QUERIN, O. M.; STEVEN G. P.; XIE, Y. M. **Evolutionary structural optimization using Additive Algorithm,** Finite Element Analysis and Design, v. 34, p. 291-308, 2000b.
55. QUERIN, O.M. *et al.* **Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structure optimization.** Comput. Methods Appl. Mech. Eng., v. 189, p. 559–573, 2000a.
56. REYNOLDS, D. *et al.* **Reverse adaptivity—A new evolutionary tool for structural optimization.** International Journal of Numerical Methods in Engineering, v. 45, p. 529–552, 1999.
57. ROZVANY, G.I.N. **Layout theory for grid-type structures.** In: Bendsoe M. P. and Soares C. A. M. (ed): Topology design of structures, NATO ASI Series (Kluwer Academic Publishers), p. 251-72, 1992.
58. ROZVANY, G.I.N. **Optimality criteria for grids, shells and arches, in Optimization of Distributed Parameter Structures** (eds E.J. Haug & J. Cea),

- Proceedings of NATO ASI, Iowa City, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan der Rijn, p. 112-51, 1981.
59. ROZVANY, G.I.N.; WANG, C. M. **Extensions of Prager's layout theory**, in: Eschenauer H. and Olhoff N., ed., Optimization in structural design (Wissenschaftsverlag, Mannheim), p. 103-10, 1983.
60. ROZVANY, G.I.N. **Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics**. Struct Multidisc Optim., v. 21, p. 90–108, 2001.
61. ROZVANY, G.I.N.; BIRKER, T. **On singular topologies inexact layout optimization**. Struct. Optim, v. 8, p. 228–235, 1994.
62. ROZVANY, G.I.N.; ZHOU, M.; SIGMUND, O. **Optimization of topology**. In: Adeli, H. (ed.) Advances in design optimization, p. 340–399, 1994.
63. SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non-homogeneous media and vibration theory**, Lecture Notes in Physics, document#127, Berlin: Springer-Verlag, 1980.
64. SCHMIT, L. A. **Structural design by systematic synthesis**, Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, New York, p. 105-22, 1960.
65. SETHIAN, J.A.; WIEGMANN, A. **Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods**. Journal Computational Physics, v. 163, p. 489-528, 1999.
66. SIGMUND, O.; PETERSSON, J. **Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima**, Structural Optimization, v. 16, p. 68-75, 1998.
67. SIGMUND, O. **A 99 line topology optimization code written in MATLAB**. Struct. Multidisc. Optim., v. 21, p. 120–127, 2001.
68. SILVA, P. S. R. **Estruturas Termoelásticas Sob Otimização Topológica e H-adaptividade**. 2007. 137p. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007. Orientador: João Carlos Arantes Costa Junior.

-
69. SLUZALEC, A.; KLEIBER, M. **Shape sensitivity analysis for nonlinear steady-state heat conduction problems**. *Int. Journal. Heat Mass Transfer*, v. 39, p. 2609–2613, 1996.
 70. SONG, J.; SHANGHVI, J.Y.; MICHALERIS, P. **Sensitivity analysis and optimization of thermo-elasto-plastic processes with applications to welding side heater design**. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v.193, p. 4541–4566, 2004.
 71. SUZUKI, K. **Shape and layout optimization using homogenization method**, PhD Thesis, University of Michigan, 1991.
 72. SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. **A homogenization method for shape and topology optimization**, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v. 93, p. 291-318, 1991.
 73. TORTORELLI, D.A.; HABER, R.B. **First-order design sensitivity analysis for transient conduction problems by an adjoint method**, *Int. J. Numer. Methods Eng.* v. 28, p. 733–752, 1989b.
 74. TORTORELLI, D.A.; HABER, R.B.; LU S.C. **Design sensitivity analysis for nonlinear thermal systems**, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* v. 77, p. 61–77, 1989a.
 75. VIGDERGAUZ, S. **Effective elastic parameters of a plate with a regular system of equal strength holes**. *Mech. Solids*, v. 21, p. 162–166, 1986.
 76. WANG, S.; WANG, M.Y. **Radial basis functions and level set method for structural topology optimization**. *International Journal of Numerical Method for Engineering*, v. 65, p. 2060–2090, 2006.
 77. WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. **A level set method for structural topology optimization**. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 192, p. 227–246, 2003.
 78. XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. **Evolutionary Structural Optimization**. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

-
79. YAMADA, T. *et al.* **A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy.** *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 199, p. 2876–2891, 2010.
 80. YANG, R.J. **Shape design sensitivity analysis of thermoelasticity problems.** *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 102, p. 41–60, 1993.
 81. YANG, X.Y.; XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. **Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization.** *AIAAJ*, v. 37, p. 1483–1488, 1999a.
 82. YANG, X.Y.; XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. **Topology optimization for frequency using an evolutionary method.** *J. Struct. Eng.*, v. 125, 1432–1438, 1999b.
 83. ZHOU, M.; ROZVANY, G.I.N. **On the validity of ESO type methods in topology optimization.** *Struct. Multidisc. Optim.*, v. 21, p. 80–83, 2001.
 84. ZHOU, M.; ROZVANY, G.I.N. **The COC algorithm, Part II: topological, geometry and generalized shape optimization.** *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* v. 89, p. 197–224, 1991.
 85. ZHU, J.H.; ZHANG, W.H.; QIU, K.P. **Bi-directional evolutionary topology optimization using element replaceable method.** *Comput. Mech.*, v. 40 (1), p. 97–109, 2007.
 86. ZHUANG, C.G.; XIONG, Z.H.; DING, H. **A level set method for topology optimization of heat conduction problem under multiple load cases.** *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 196, p. 1074–1084, 2007.

Bibliografia Complementar

As referencias listadas abaixo foram utilizadas na fundamentação teórica dos assuntos ligados à Otimização, Elementos Finitos, Resistência dos Materiais e Teoria da Elasticidade.

1. BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003
2. BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
3. RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. 3rd Edition. West Lafayette, Indiana: John Wiley & Sons, Inc, 1996.
4. FLETCHER, R. **Practical Methods of Optimization**. 2nd Edition. John Wiley & Sons, Inc, 1986.
5. HUANG, X.; XIE, Y.M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures Methods and Applications**. New Delhi, India: John Wiley & Sons, Inc, 2010.
6. ARORA, Jasbir S. **Introduction to Optimum Design**. 2nd Edition. USA: Elsevier Academic Press, 2004.
7. NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. 2nd Edition. Ithaca, N.Y, USA: Springer Science, 2006.
8. FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. USA: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
9. COOK, R. D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. USA: John Wiley & Sons, Inc, 1995.
10. BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**. USA: Prentice-Hall, Inc: 1996.

11. HUTTON, D. V. **Fundamentals of Finite Element Analysis**. USA: The McGraw-Hill, 2004.
12. INCROPERA, F. P.; WITT, D. P. Fundamentos de Transferência de Calor e Massa. Tradução Horácio Macedo, 3ª Edição. Rio de Janeiro-RJ: Guanabara-Koogan, 1992.
13. LIU, G. R; QUEK, S. S. **The Finite Element Method: A Practical Course**, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2003.
14. DHONDT, G. **The Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications**. England: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
15. ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, vol 1. Fifth Edition. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.
16. SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo-SP: Edusp, 2003.
17. SADD, M. H. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

Apostilas Eletrônicas

1. SOUZA, Remo Magalhães. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. in:
www.inf.ufes.br/~luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf
2. SILVA, Emílio Carlos Nelli. **PMR 5215: Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos**. in: www.poli.usp.br/d/pmr5215/a1-5215.pdf
3. SILVA, Emílio Carlos Nelli. **Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas**. in: www.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf
4. Azevedo, Álvaro F. M. **Método dos Elementos Finitos**. in:
www.fe.up.pt/~alvaro

Apêndice A

Com a aplicação do Método do Lagrangiano Aumentado, o problema de otimização de leiaute reduz-se a solução de uma seqüência de problemas de otimização com restrições de caixa, a qual é resolvida por um método de projeção de segunda ordem que usa um método de quasi-Newton sem memória. Sendo assim, aqui se faz uma descrição da direção de descida adotada no algoritmo de minimização.

A.1 Método do Gradiente Projetado

O método de projeção a ser considerado é caracterizado por iterações cujos movimentos são nas direções de descida, os quais são restringidos a residirem em domínios poliédricos. Conseqüentemente os pontos obtidos ao longo do processo iterativo são factíveis e o valor da função objetivo decresce constantemente.

Para descrever o processo, considera-se o seguinte problema de otimização com restrições do tipo caixa:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (\text{a.1})$$

sujeito a

$$x_i^{\text{inf}} \leq x_i \leq x_i^{\text{sup}}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{a.2})$$

Seja \mathbf{x}^k um ponto factível, da k -ésima iteração do problema de otimização, o qual tem associado q restrições de desigualdade ativas. Definem-se por restrições ativas, as restrições de desigualdade lateral que satisfazem:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_i - x_i^{\text{inf}}| < \text{tol}g \\ \text{ou} \\ |x_i - x_i^{\text{sup}}| < \text{tol}g, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (\text{a.3})$$

As restrições laterais podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} g_{2i-1}(\mathbf{x}) &= x_i^{\text{inf}} - x_i \leq 0; \\ g_{2i}(\mathbf{x}) &= x_i - x_i^{\text{sup}} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{a.4})$$

daí

$$\frac{\partial g_{2i-1}}{\partial x_j} = -\delta_{ij} \quad \therefore \quad \nabla \mathbf{g}_{2i-1} = -\mathbf{e}_i ; \quad (\text{a.5})$$

$$\frac{\partial g_{2i}}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \therefore \quad \nabla \mathbf{g}_{2i} = \mathbf{e}_i . \quad (\text{a.6})$$

Define-se também a matriz $[\mathbf{N}_q]$ composta pelos gradientes das restrições ativas, i.e.,

$$[\mathbf{N}_q] = [\pm \mathbf{e}_{i_1} \vdots \cdots \vdots \pm \mathbf{e}_{i_q}] = [\pm \nabla \mathbf{g}_{i_1} \vdots \cdots \vdots \pm \nabla \mathbf{g}_{i_q}] . \quad (\text{a.7})$$

O método do gradiente projetado consiste basicamente em partir de \mathbf{x}^k e determinar \mathbf{x}^{k+1} através de uma iteração do tipo direção de descida:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k \quad (\text{a.8})$$

onde α^k é o comprimento do passo ao longo da direção de descida \mathbf{s}^k , associada à k -ésima iteração. Desta forma, o problema consiste principalmente na determinação de uma direção de descida \mathbf{s} que produz a máxima diminuição em $f(\mathbf{x})$ para um passo unitário, ($\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}]\mathbf{s} \rangle} = 1$ - dependente da métrica utilizada), no subespaço das restrições ativas, i.e.

$$\min_{\mathbf{s}} \left\{ \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}]\mathbf{s} \rangle - 1) \right\} \quad (\text{a.9})$$

sendo que $[\mathbf{M}]$ é simétrica e positiva definida. Em adição, como o problema contém restrições, impõe-se que \mathbf{s}^k pertença à interseção dos hiperplanos associados às restrições ativas. Logo,

$$[\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0} . \quad (\text{a.10})$$

Como resultado, o conjunto de restrições ativas permanece ativo em \mathbf{x}^{k+1} . A direção de descida a que faremos uso será dada por

$$\mathbf{s}^k = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (\text{a.11})$$

onde $[\mathbf{P}_q]$ é o operador projeção oblíquo.

• **Determinação do operador projeção oblíquo - $[\mathbf{P}_q]$**

A função Lagrangiana associada ao problema de minimização com restrição, definido em (a.9) e (a.10), é dada por:

$$L(\mathbf{s}, \mu, \boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{s}, \nabla f \rangle + \mu (\langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}]\mathbf{s} \rangle - 1) + \langle \boldsymbol{\lambda}, [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} \rangle. \quad (\text{a.12})$$

Aplicando as condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker associadas ao problema obtêm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{s} = -\frac{1}{2\mu} [\mathbf{M}]^{-1} \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \}; \quad (\text{a.13})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad \therefore \quad \langle \mathbf{s}, [\mathbf{M}]\mathbf{s} \rangle = 1; \quad (\text{a.14})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0 \quad \therefore \quad [\mathbf{N}_q]^T \mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (\text{a.15})$$

Agora, de acordo com as eqs. (a.13) e (a.15) deriva-se:

$$\boldsymbol{\lambda} = \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} \right\} \nabla f. \quad (\text{a.16})$$

Além disso, $[\mathbf{M}]\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1$, substituindo o valor de \mathbf{s} dado pela eq. (a.13), tem-se que:

$$\mu = \frac{1}{2} \left\langle [\mathbf{M}]^{-1} \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \}, \{ \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \} \right\rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{a.17})$$

ou ainda,

$$\mu = \frac{1}{2} \left\| \nabla f - [\mathbf{N}_q] \boldsymbol{\lambda} \right\|_{[\mathbf{M}]^{-1}}, \quad (\text{a.18})$$

onde

$$\|\cdot\|_{[\mathbf{M}]^{-1}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{[\mathbf{M}]^{-1}}} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{M}]^{-1}} = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{a.19})$$

Substituindo as eqs. (a.16) e (a.18) na definição do vetor \mathbf{s} dado na eq. (a.13), obtêm-se:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2\mu} [\mathbf{P}_q] [\mathbf{M}]^{-1} \nabla f, \quad (\text{a.20})$$

onde o operador projeção oblíquo $[\mathbf{P}_q]$, ponderado por $[\mathbf{M}]^{-1}$, é dado por:

$$[\mathbf{P}_q] = [\mathbf{I}] - [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \left\{ [\mathbf{N}_q]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{N}_q] \right\}^{-1} [\mathbf{N}_q]^T. \quad (\text{a.21})$$

sendo $[\mathbf{I}]$ a matriz identidade.

A.2 Aproximação Quase – Newton

Aqui é considerado que a aproximação da matriz Hessiana é denotada por $[\mathbf{M}]$. A sua respectiva inversa $[\mathbf{S}] = [\mathbf{M}]^{-1}$ pode ser aproximada por:

$$[\mathbf{S}_{k+1}^{\text{BFGS}}] = [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] + \left(1 + \frac{\langle \mathbf{y}_k, [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] \mathbf{y}_k \rangle}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \right) \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{y}_k] [\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} - \frac{[\mathbf{S}_k^{\text{BFGS}}] [\mathbf{y}_k \otimes \mathbf{d}_k]}{\langle \mathbf{d}_k, \mathbf{y}_k \rangle} \quad (\text{a.22})$$

se $\langle \mathbf{d}^k, \nabla f^k \rangle \leq -(\textit{epsilon})^{1/2} \|\mathbf{d}^k\|_2 \|\nabla f^k\|_2$, caso contrário $[\mathbf{S}_{k+1}^{\text{BFGS}}] = [\mathbf{I}]$. Aqui, define-se $\mathbf{y}_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$ e $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$.

Apêndice B

B.1 Condições Necessárias e Suficientes de Karush-Kuhn-Tucker

Em 1951, Kuhn e Tucker propuseram as condições matemáticas para um dado ponto no espaço ser considerado um ponto ótimo. Como esses critérios matemáticos haviam sido anteriormente e independentemente propostos por Karush, essas proposições passaram a ser conhecidas como condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker.

As condições necessárias e suficientes de Karush-Kuhn-Tucker, se satisfeitas, garantem que um ponto \mathbf{x}^* é realmente um ponto extremo. Em seguida, as condições que determinam um ponto como sendo de mínimo (ou máximo) são definidas para um problema de otimização sem restrições.

Para o caso que $f(\mathbf{x})$ é um funcional tal que $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o qual define a função objetivo, $\mathbf{x} \in X$ um vetor que define as variáveis de projeto e considerando que \mathbf{x}^* é um ponto extremo do funcional $f(\mathbf{x})$. A expressão para $f(\mathbf{x})$ pode ser aproximada no ponto \mathbf{x}^* pela expansão em série de Taylor na forma multidimensional:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + R, \quad (\text{b.1})$$

sendo $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$.

Reescrevendo:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} + R. \quad (\text{b.2})$$

Sendo assim, ∇f deve ser não negativo, *i.e.*, $\nabla f \geq 0$ para que \mathbf{x}^* seja um ponto de mínimo local. Dessa forma, têm-se as seguintes condições de otimalidade:

- Condição necessária de primeira ordem:

Para que \mathbf{x}^* seja um mínimo (ou máximo) local da função $f(\mathbf{x})$, duas vezes diferenciável em \mathbf{x}^* , é necessário que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{b.3})$$

- Condição necessária de segunda ordem:

Para que seja um mínimo (ou máximo) local da função \mathbf{x}^* , duas vezes diferenciável em \mathbf{x}^* é necessário que a equação (b.3) seja satisfeita e que:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \equiv \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \quad (\text{b.4})$$

Seja positiva (ou negativa) semi-definida, sendo \mathbf{H} a matriz Hessiana.

Observa-se que estas condições são apenas necessárias porque os termos de primeira e segunda ordem podem ser nulos, deixando ainda dúvida sobre a natureza de \mathbf{x}^* .

- Condição suficiente:

Seja $f(\mathbf{x})$ duas vezes diferenciável em \mathbf{x}^* tal que a equação (b.3) esteja satisfeita e que $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ seja positiva ou negativa definida.

Dessa forma, \mathbf{x}^* é mínimo (ou máximo) local de $f(\mathbf{x})$.

Apêndice C

Os métodos de penalidade são procedimentos que visam aproximar problemas de otimização com restrições, por problemas sem restrição. Essa aproximação é obtida, adicionando-se à função objetivo uma parcela que estabelece uma penalidade pela violação das restrições. Esta parcela está associada a um parâmetro r_p que determina a severidade da penalidade.

Para descrever o processo, considera-se o seguinte problema de otimização com as seguintes restrições:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (\text{c.1})$$

sujeito a

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}) &\leq 0 & j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0 & k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{c.2})$$

Transformando o problema, tem-se:

$$\min \phi(\mathbf{x}, r_p) = f(\mathbf{x}) + r_p P(\mathbf{x}) \quad (\text{c.3})$$

onde ϕ é a função construída pelo aumento da penalidade; $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo original; r_p é o parâmetro de penalidade, sendo p o indicador de iteração e $P(\mathbf{x})$ a função de penalidade definida conforme o método empregado.

C.1 Método da Função de Penalidade Exterior

No Método da Função de Penalidade Exterior a função objetivo é penalizada fora da região factível. Tipicamente, a função $P(\mathbf{x})$ é definida por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \left\{ \max[0, g_j(\mathbf{x})] \right\}^2 + \sum_{k=1}^n [h_k(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{c.4})$$

Se todas as restrições são satisfeitas $P(\mathbf{x}) = 0$. A função construída, neste caso, pelo aumento da penalidade equivale à função objetivo original. Se uma ou mais restrições são violadas, o quadrado dessas funções é adicionado a função ϕ . As restrições são elevadas ao quadrado para assegurar que a tangente (inclinação) à

função de penalidade seja nula sobre a fronteira da região factível. Com isso pode-se assegurar a continuidade da derivada da função ϕ .

Nesta formulação da função penalidade, a derivada segunda da função ϕ não é contínua sobre a fronteira que limita a região factível. Isto é uma possível causa de mal-condicionamento numérico para o método de minimização de segunda ordem.

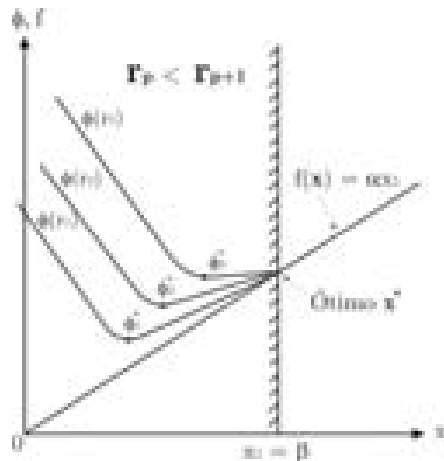


Figura b.1: Método da função de Penalidade Exterior.

• Algoritmo do Método da Função de Penalidade Exterior

- Entrar com o valor inicial de \mathbf{x}_1 e r_1 . Fazer $p = 1$.
- Determinar o vetor \mathbf{x}_p^* que minimiza a função: $\phi(\mathbf{x}, r_p)$
- Testar o ponto \mathbf{x}_p^* se satisfaz todas as restrições. Se \mathbf{x}_p^* é factível, ele é o ponto ótimo. Senão, seguir para o passo 4.

Encontrar o próximo valor do parâmetro de penalidade que satisfaz a relação: $r_{p+1} > r_p$. Incrementar o valor de p , com uma unidade, e seguir para o passo 2. Geralmente o valor de r_{p+1} é determinado de acordo com a relação $r_{p+1} = cr_p$, onde c é uma constante maior que 1.

C.2 Método da Função de Penalidade Interior

No Método da Função de Penalidade Interior a função objetivo é penalizada na região factível quando o ponto \mathbf{x} se aproxima da fronteira que limita esta região.

Tipicamente, a função $P(\mathbf{x})$ é definida por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (\text{c.5})$$

mas, para se obter um melhor condicionamento matemático, a função $P(\mathbf{x})$ pode ser determinada por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \log[-g_j(\mathbf{x})] \quad (\text{c.6})$$

A função de penalidade interior é utilizada apenas para as restrições de desigualdade. Desta forma, a função construída pelo aumento da penalidade é definida por:

$$\phi(\mathbf{x}, r_p) = f(\mathbf{x}) + r_p \sum_{j=1}^m \frac{-1}{g_j(\mathbf{x})} \quad (\text{c.7})$$

a função de penalidade interior tende ao infinito quando \mathbf{x} tende a zero.

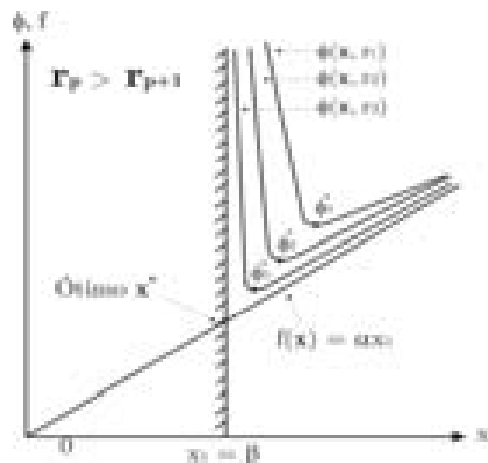


Figura b.2: Método da função de Penalidade Interior.

- **Algoritmo do Método da Função de Penalidade Interior**

- Entrar com o valor inicial factível de \mathbf{x}_1 satisfazendo todas as restrições, tal que, $g_j(\mathbf{x}_1) < 0$ para $j = 1, 2, \dots, m$, e um valor inicial para $r_1 > 0$. Fazer $p = 1$.
- Minimizar $\phi(\mathbf{x}, r_p)$ utilizando qualquer método de minimização sem restrição e obter a solução de \mathbf{x}_p^* .

-
- Testar se \mathbf{x}_p^* é a solução ótimo do problema. Se \mathbf{x}_p^* for a solução ótima, terminar o processo, Senão, seguir para o passo 4.
 - Determinar o valor do próximo parâmetro de penalidade, $r_{p+1} = cr_p$, com $c < 1$.

Incrementar um novo valor de $k = k + 1$, determinar o novo ponto $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_p^*$, e seguir para o passo 2.