



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – MEC
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE – UFRN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA – CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
NATURAIS E MATEMÁTICA – PPGECNM



ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES

ALIANÇA ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS VIA
OCTANTE REFLEXIVO DOS IRMÃOS HADLEY PARA O ENSINO DE
GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

NATAL/RN – 2024

ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES

**ALIANÇA ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS VIA
OCTANTE REFLEXIVO DOS IRMÃOS HADLEY PARA O ENSINO DE
GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – PPGECCNM/UFRN, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa

NATAL/RN – 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de
Arruda - CCET

Gomes, Anna Beatriz de Andrade.

Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais via octante reflexivo dos irmãos Hadley para o ensino de geometria na formação de professores / Anna Beatriz de Andrade Gomes. - 2024. 183 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação de Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Natal, RN, 2024.

Orientação: Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa.

1. História da matemática - Dissertação. 2. Octante reflexivo - Dissertação. 3. Conhecimentos de natureza geométrica - Dissertação. 4. Tecnologias digitais - Dissertação. 5. Formação inicial de professores - Dissertação. I. Sousa, Giselle Costa de. II. Título.

ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES

**ALIANÇA ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS VIA
OCTANTE REFLEXIVO DOS IRMÃOS HADLEY PARA O ENSINO DE
GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – PPGECONM/UFRN, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

Aprovada em: ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Giselle Costa de Sousa

Orientador(a) e Presidenta da banca

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN

Prof. Dra. Antonia Naiara de Sousa Batista

Membro externo

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

Prof. Gisele Pereira Oliveira

Membro externo

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DO CEARÁ

Prof. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

Membro interno suplente

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

AGRADECIMENTOS

O mestrado foi uma caminhada árdua e cheia de desafios e eu não conseguiria chegar até aqui sem a ajuda de muitas pessoas. Portanto, além de tudo, com todos os sentimentos, o que se sobressai é o de gratidão de modo que eu não poderia deixar de agradecer a todos que foram importantes na conclusão desse ciclo.

Agradeço primeiramente aos meus pais, que foram o meu suporte desde o início da minha vida. Obrigada por sempre me ensinarem a ser forte em momentos difíceis e me incentivarem a correr atrás dos meus sonhos, me mostrando que eu era capaz de qualquer coisa, desde que eu as quisesse. Eu amo vocês mais do que tudo nesse mundo.

Agradeço a toda a minha família, em especial, minha madrinha, Rosicléa, e as minhas tias Neta, Lucineide, Roseni e Rudcléia, que sempre foram um exemplo de mulheres fortes, cheia de resiliência e determinação, e aos meus primos, que tenho como irmãos, sempre me apoiando e incentivando durante esta jornada. Todos vocês me ensinaram a sempre seguir com Força, Fé e Coragem.

Agradeço ao meu namorado, Matheus, por se fazer presente e disponível a ajudar nos momentos de estresse e angústia, mas também ser responsável por muitos momentos felizes e de calma. Eu te amo imensamente. Obrigada por tudo.

Agradeço aos meus melhores amigos, em especial, a minha irmã acadêmica, Maria Luiza, na qual compartilhei muitos momentos de risadas, estresses e escritas durante o mestrado, e a Ana Beatriz, Gisele, Marcos Paulo e Sérgio, que me acompanham desde o início da graduação. Vocês são matemáticos incríveis e me inspiro em vocês todos os dias. Eu amo vocês demais. Obrigada por serem tanto para mim.

Agradeço a minha orientadora, Giselle Costa de Sousa, que sempre se mostrou determinada, paciente, dedicada e comprometida, tanto no mestrado quanto na graduação.

Agradeço também as professoras das bancas, Gabriela Lucheze, Antonia Naiara e Gisele Pereira, por todo olhar comprometido e cuidadoso, que auxiliaram na concretização deste trabalho.

Agradeço a instituição que trabalhei durante o meu mestrado, Colégio Link, pela disponibilidade e compreensão em momentos que precisei, e os meus amigos e

colegas de trabalho, que se mostraram tão apoiadores desse sonho que era me tornar mestre.

Por fim, a instituição UFRN, que me oportunizou cursos de qualidade durante minha vida acadêmica, bem como ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, pela contribuição na minha formação como mestre, e ao corpo discente da turma de Didática da Matemática II, que auxiliaram no processo de concretização do Produto Educacional, comprometidos com o progresso de pesquisas no âmbito do Ensino da Matemática.

RESUMO

Essa dissertação propõe um estudo histórico-matemático respaldado na aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais por meio do uso do instrumento Octante Reflexivo, que resulta em um Produto Educacional direcionado para formação de professores. Desse modo, se vincula a linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática do PPGECCM-UFRN e busca responder à questão-foco: Como a aliança entre HM e TD pode contribuir com a produção/elaboração do Produto Educacional, Octante Reflexivo, para formação de professores de matemática acerca do ensino de geometria? Nesta ótica, o objetivo da pesquisa é desenvolver um estudo histórico-matemático em torno do uso do Octante fundamentado na aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais para formação de professores para a produção de um PE. Para isso, utilizamos uma abordagem metodológica que se caracteriza consoante a pesquisa qualitativa, com procedimentos bibliográficos e documentais e ainda experimentais. Esclarecendo, foi realizado levantamento de dados sobre o Octante e os irmãos Hadley, na intenção de contextualizar o período em que o instrumento foi desenvolvido e compreender os conhecimentos de natureza matemática por trás do seu uso. Para tanto, utilizou-se dados bibliográficos e documentais de modo a catalogar as fontes e realizar estudo histórico-matemático. A partir desta caracterização, foi produzido um Produto Educacional, que buscou viabilizar a compreensão acerca das influências dos irmãos Hadley e da *The Royal Society* no desenvolvimento do Octante, bem como, entender como funciona a dupla reflexão, que depende da estrutura do instrumento e os conhecimentos de natureza matemática para acontecer, permitindo que tomadas de ângulos e distâncias sejam obtidas e direcionem a navegação. Além disso, num procedimento experimental foi realizada a aplicação do Produto Educacional em uma turma de Licenciandos em Matemática. Durante a aplicação na formação inicial de professores, foi possível perceber alguns pontos que podiam ser melhorados no PE, como erros de digitação e reformulação das questões para melhor entendimento, bem como as possíveis relações que surgem a partir da aliança entre HM e TD com conexões para o uso do instrumento Octante Reflexivo, fazendo assim sua validação e refinamento. Mais ainda, dados extraídos de instrumentos como questionário, diário de campo, fotos e outros nos mostraram que os licenciandos perceberam uma possibilidade de uso da HM aliada a TD; compreenderam que a construção e manipulação do Octante Digital

permitiu mobilizar conceitos como ponto, reta, semirreta, relação entre ângulos internos e externo de triângulos, bissetrizes, retas perpendiculares, e entre outros; também indicaram que o PE possa ser usado na graduação, educação básica; entre outros pontos que consideramos resultados desta pesquisa. Desta forma, esse estudo buscou contribuir na formação inicial de professores, bem como com pesquisas no âmbito da aliança entre HM e TD e o uso de Instrumentos Matemáticos.

Palavras-chave: Octante Reflexivo; Conhecimentos de natureza geométrica; História da Matemática; Tecnologias Digitais; Formação inicial de professores.

ABSTRACT

This dissertation proposes a historical-mathematical study supported by the alliance between History of Mathematics and Digital Technologies through the use of the Reflective Octant instrument, which results in an Educational Product directed to teacher training. In this way, it is linked to the research line Teaching and Learning of Natural Sciences and Mathematics of the PPGECONM-UFRN and seeks to answer the focus question: How can the alliance between HM and DT contribute to the production/elaboration of the Educational Product, Reflective Octant, for the training of mathematics teachers about the teaching of geometry? In this perspective, the objective of the research is to develop a historical-mathematical study around the use of the Octante based on the alliance between History of Mathematics and Digital Technologies for teacher training for the production of a EP. For this, we used a methodological approach that is characterized by qualitative research, with bibliographic and documentary procedures and also experimental. To clarify, a survey of data was carried out on the Octante and the Hadley brothers, with the intention of contextualizing the period in which the instrument was developed and understanding the mathematical knowledge behind its use. To this end, bibliographic and documentary data were used in order to catalog the sources and carry out a historical-mathematical study. From this characterization, an Educational Product was produced, which sought to enable the understanding of the influences of the Hadley brothers and The Royal Society in the development of the Octant, as well as to understand how the double reflection works, which depends on the structure of the instrument and knowledge of a mathematical nature to happen, allowing angles and distances to be taken and to direct navigation. In addition, in an experimental procedure, the application of the Educational Product was carried out in a class of Mathematics Undergraduates. During the application in the initial training of teachers, it was possible to perceive some points that could be improved in the EP, such as typing errors and reformulation of the questions for better understanding, as well as the possible relationships that arise from the alliance between HM and DT with connections for the use of the Octant Reflexivo instrument, thus validating and refining it. Furthermore, data extracted from instruments such as questionnaires, field diaries, photos and others showed us that the undergraduate students perceived a possibility of using HM in conjunction with DT; understood that the construction and manipulation of the Digital

Octante allowed the mobilization of concepts such as point, line, semi-line, relationship between internal and external angles of triangles, bisectors, perpendicular lines, and others; they also indicated that the EP can be used in undergraduate, basic education; among other points that we consider the results of this research. Thus, this study sought to contribute to the initial training of teachers, as well as to research within the scope of the alliance between HM and DT and the use of Mathematical Instruments.

Keywords: Reflective Octant, Knowledge of geometric nature; History of Mathematics; Digital Technologies; Initial teacher training.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GPEHM – Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática

HM – História da Matemática

TD – Tecnologias Digitais

IM – Investigação Matemática

PE – Produto Educacional

CNE – Conselho Nacional de Educação

BNC - Formação – Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica

PPGECNM – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

ESTMAT – Laboratório de Estatística e Matemática

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Alianças entre HM e TD.....	20
Figura 2 - O Sextante e o Octante.....	24
Figura 3 - Medição entre o astro e a linha do horizonte a partir de um simulador da balestilha no GeoGebra	26
Figura 4 - Página inicial da Fonte 1.....	39
Figura 5 - Figura II em anexo na Fonte 1.....	40
Figura 6 - Outro modelo de Octante proposto por John Hadley.....	41
Figura 7 - Página inicial da Fonte 2.....	42
Figura 8 - Página extraída da Fonte 2.....	44
Figura 9 - Capa da Fonte 3.....	45
Figura 10 - Imagem apresentada na página inicial da Fonte 3 com foco na legenda	46
Figura 11 - Imagem apresentada na página inicial da Fonte 3 com foco nas peças	47
Figura 12 - Exemplo/simulação do funcionamento de algumas peças na observação da tomada de ângulos.....	48
Figura 13 - Representação de uma reflexão no espelho E.....	51
Figura 14 - Relação entre os eixos incidentes e refletores nos espelhos E e F.....	52
Figura 15 - A reflexão nos espelhos do Octante Reflexivo.....	53
Figura 16 - A dupla reflexão no Octante Reflexivo.....	54
Figura 17 - Capa inicial do caderno de atividades.....	58
Figura 18 – Sumário e apresentação do Produto Educacional.....	59
Figura 19 – Seção <i>Vamos Explorar</i> e <i>Vamos Investigar</i> da Atividade 1.....	61
Figura 20 – Parte do texto e exercício da Atividade 2.....	62
Figura 21 – Seção <i>Vamos Explorar</i> e <i>Vamos Investigar</i> da Atividade 3.....	63
Figura 22 – Seção <i>Avaliando e Socializando</i> do PE.....	64
Figura 23 – Laboratório ESTMAT.....	67
Figura 24 – Apresentação da pesquisa e do TCLE.....	68
Figura 25 - Participantes realizando a seção <i>Vamos Explorar</i> da Atividade 1.....	69
Figura 26 – Participantes realizando a seção <i>Vamos Investigar</i> da Atividade 1.....	70
Figura 27 – Alunos construindo o Octante no GeoGebra.....	71
Figura 28 – Passos para construção do Octante na Atividade 2.....	72
Figura 29 – Imagem de parte dos passos para construção do Octante Digital com mudanças realizadas no PE refinado.....	73
Figura 30 – Bloco de tarefas 5 da Atividade 3.....	74
Figura 31 – Questões do bloco de tarefas 6 da Atividade 3.....	75
Figura 32 – Alunos/licenciandos utilizando Octante e construção final.....	76

Figura 33 – Alteração no cronograma sugerido no PE.....	77
Figura 34 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 1; Participante 2; Participante 3, 2024) a questão “Caso a resposta anterior tenha sido <i>SIM</i> , discorra brevemente sobre como foi sua experiência com a utilização da História da Matemática nas aulas de Matemática.”	78
Figura 35 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 4; Participante 5; Participante 6, 2024) a questão “Caso a resposta anterior tenha sido <i>SIM</i> ou <i>NÃO</i> , discorra brevemente sobre o uso de tecnologias digitais para o ensino da Matemática.”	79
Figura 36 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 1; Participante 4; Participante 7, 2024) a questão “Caso a resposta anterior tenha sido <i>SIM</i> ou <i>NÃO</i> , justifique”	81
Figura 37 – Trecho relatado pelo participante (Participante 8, 2024) “Caso a resposta anterior tenha sido <i>SIM</i> , o que você já sabia sobre?”	82
Figura 38 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 8; Participante 13; Participante 14, 2024) à pergunta “Que conhecimentos de natureza matemática identificou na manipulação digital do Octante Reflexivo?”	83
Figura 39 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 6; Participante 8; Participante 5, 2024) na questão “Descreva brevemente o que achou desta possibilidade de estudar Geometria a partir da manipulação digital do Octante Reflexivo.”	85
Figura 40 – Respostas apresentadas na questão “Caso a resposta tenha sido <i>SIM</i> ou <i>NÃO</i> , discorra um pouco sobre o software utilizado e/ou ajustes sobre este item.”	86
Figura 41 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 5; Participante 9; Participante 3, 2024) na questão “Caso a resposta tenha sido <i>SIM</i> ou <i>NÃO</i> , discorra um pouco sobre o software utilizado e/ou ajustes sobre este item.”	87
Figura 42 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 5; Participante 8; Participante 3; Participante 4, 2024) na questão “Justifique o item anterior (Questão 30)	88
Figura 43 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 7; Participante 10; Participante 1, 2024) na questão “Justifique o item anterior (Questão 32)”	89
Figura 44 – Trecho relatado pelos participantes (Participante 8; Participante 7; Participante 2; Participante 3, 2024) na questão “Sua contribuição é muito importante! indique mais alguma alteração, sugestão, melhorias e refinamentos ao Produto Educacional”	91
Figura 45 - Reformulação do Passo 13 no PE	92
Figura 46 - Bloco de tarefas 6	93
Figura 47 - Reformulação/alterações dos questionamentos no bloco de tarefas 6.....	94

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Elementos fundamentais das atividades-históricas-com-tecnologias	22
Quadro 2 - Organização das fontes bibliográficas catalogadas para a pesquisa em torno do Octante Reflexivo.....	33
Quadro 3 - Conceitos matemáticos identificados no PE pelos participantes	82
Quadro 4 - Sugestões dos participantes quanto ao PE.....	91

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTAÇÃO	19
2.1	Sobre a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais.....	19
2.2	Sobre uso de Instrumento no ensino.....	23
2.3	Sobre a formação de professores.....	27
2.4	Sobre fundamentação metodológica.....	29
3	CONTRIBUIÇÕES DOS IRMÃOS HADLEY PARA O USO DO OCTANTE REFLEXIVO NA NAVEGAÇÃO NOS SÉCULOS XVII E XVIII	32
3.1		
3.2	Fontes bibliográficas em torno do objeto de pesquisa.....	32
3.2.1	Estudos iniciais de documentos que tratam do uso do Octante Reflexivo.....	37
3.2.2	Apreciação do primeiro documento (fonte): J. Hadley (1731)	38
3.2.3	Apreciação do segundo documento (fonte): J. Hadley (1732)	42
	Apreciação do terceiro documento (fonte): G. Hadley (1734)	45
3.3	Conhecimentos matemáticos por trás do uso do Octante Reflexivo	50
4	UTILIZANDO O OCTANTE REFLEXIVO PARA UM ESTUDO DE CONHECIMENTOS DE NATUREZA GEOMÉTRICA POR MEIO DAS ATIVIDADES-HISTÓRICAS-COM-TECNOLOGIA: APRESENTAÇÃO, PROCESSO DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	57
4.1	Percurso de desenvolvimento e apresentação do Produto Educacional gerado pelo estudo histórico-matemático.....	57
4.2	Aplicação, refinamento e validação do produto.....	65
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
	REFERÊNCIAS	102
	APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL	107
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	168
	APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)	173

APÊNDICE D – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE VOZ E/OU REGISTRO IMAGEM.....	176
ANEXO A - PARECER CONSUBSTANCIADO (COM APROVAÇÃO) DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA DA UFRN.....	177

1 INTRODUÇÃO

Essa dissertação é fruto de uma pesquisa vinculada ao Programa de Pós-graduação no Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGCENM) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), relacionada à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática. Além disso, é desdobramento de um trabalho de iniciação científica (IC), realizado pela autora, sobre a aliança entre História da Matemática (HM) e Tecnologias Digitais (TD), entre os anos de 2018 e 2021.

Durante a realização das pesquisas de IC¹, houve o desenvolvimento do aporte ao fomento da aliança entre HM e TD. Esta é concebida por Sousa (2023) como uma tendência que alia a História da Matemática e as Tecnologias Digitais num processo que dá evidência a ambas. Mais detalhes são apresentados no capítulo 2 desta dissertação.

Nas investigações de IC, foram estudadas dissertações de mestrado que fizeram uso da referida aliança e, mais ainda, também houve a produção e alimentação de uma linha do tempo² online focada na história da geometria, abordando estudiosos que fizeram contribuições na área, com ênfase, no período em que viveram, trazendo ainda um pequeno tópico sobre estudos desenvolvidos por eles, juntamente com o nome de suas obras sobre geometria e onde podiam ser encontradas³.

Ainda no período da IC, a autora deste estudo teve a oportunidade de participar do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática Junior (GPEHM Jr.), destinado para pessoas que estão iniciando no campo da pesquisa em Educação e História da Matemática, sendo um grupo vinculado ao GPEHM⁴. No cenário de

¹ As referidas pesquisas de IC eram vinculadas ao projeto de pesquisa Conexões Potenciais entre História da Matemática e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, realizadas sob coordenação da Professora Doutora Giselle Costa de Sousa, orientadora dessa dissertação.

² Link de acesso à linha do tempo na plataforma *Timetoast Timeline*: <https://www.timetoast.com/timelines/2451093>

³ A citar: Gomes e Sousa (2021a) e Gomes e Sousa (2021b).

⁴ Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática responsável por desenvolver pesquisas e eventos na área da Educação e História da Matemática.

pesquisas desenvolvidas pelo grupo, há a produção de trabalhos sobre o uso de Instrumentos Matemáticos na formação de professores⁵.

Dessa forma, associando-se ao que se estava investigando com a aliança, viu-se a possibilidade de pesquisar o trabalho de um dos estudiosos catalogados, durante a produção da linha do tempo da geometria, com um olhar para o instrumento científico pensado por ele e por seus irmãos. O estudioso em questão é John Hadley (1682-1744) e os seus irmãos são George Hadley (1685-1768) e Henry Hadley (1697-1771). Os irmãos Hadley foram praticantes matemáticos⁶ que desenvolveram um instrumento, denominado Octante Reflexivo, capaz de encontrar a distância angular entre o horizonte e um astro ou entre dois astros por meio da dupla reflexão entre espelhos de no máximo 90°. Em seu contexto de produção, a finalidade desta função do Octante era auxiliar a navegação.

Observamos ainda, a partir de um levantamento realizado em repositórios como Google Acadêmico e banco de Teses e Dissertações da CAPES e ainda de sites de instituições federais e estaduais, que haviam poucos estudos voltados para instrumentos a partir da exploração de tecnologias digitais, um exemplo nesta direção são as pesquisas desenvolvidas por Oliveira (2023) e Pereira, Batista e Oliveira (2021), que propõem a utilização do instrumento balestilha no meio digital.

Portanto, diante deste percurso científico e frente às possibilidades vislumbradas com o trabalho de John Hadley e seus irmãos, com o Octante, surge a seguinte questão-foco: Como a aliança entre HM e TD pode contribuir com a produção/elaboração do Produto Educacional, Octante Reflexivo, para formação de professores de matemática acerca do ensino de geometria?

A fim de respondê-la, a presente pesquisa tem por objetivo desenvolver um estudo histórico-matemático em torno do uso do Octante fundamentado na aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais para formação de professores de matemática para a produção de um PE.

Para isto, temos como objetivos específicos:

- Apontar encaminhamentos para a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais a partir do uso do instrumento Octante Reflexivo;

⁵ A exemplo de Silva, Pereira e Batista (2021), Batista e Pereira (2018), Lima, Soares, Alves e Pereira (2022), Ribeiro e Oliveira (2022), e entre outros.

⁶ Estudiosos ou artesões que faziam uso das matemáticas, que seria o uso de conhecimentos de natureza matemática em diversas áreas conhecidas hoje como astronomia, geografia, física, engenharia, e entre outras (Saito, 2014).

- Conhecer aspectos contextuais, documentais e matemáticos em torno do Octante de Hadley no século XVIII;
- Criar um Produto Educacional (PE) pautado na manipulação do Octante Reflexivo para o ensino de conhecimentos geométricos;
- Aplicar o PE em uma turma com discentes do curso de Licenciatura em Matemática, no semestre de 2024.1, na UFRN;
- Refinar o material produzido com base na experiência vivenciada com os discentes em formação inicial.

Com este anseio utilizamos a metodologia qualitativa com aspectos bibliográficos, documentais e experimentais, apresentada com mais detalhes na subseção 2.4 do capítulo 2, para reunir o material necessário sobre os irmãos Hadley e o Octante Reflexivo e entender o contexto no qual se insere o instrumento, criando possibilidades de conexões com o ensino da geometria por meio da aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais e o uso de instrumentos para o ensino.

Diante da aspiração supracitada, essa dissertação se estrutura em cinco capítulos. O primeiro deles é a presente introdução, que apresenta a motivação por trás da pesquisa, bem como a questão foco, os objetivos e a metodologia utilizada, trazendo ainda um panorama geral deste texto dissertativo. A fundamentação caracteriza o segundo capítulo, determinando o aporte teórico-metodológico para a produção deste trabalho, bem como as conexões feitas entre a aliança e o uso de Instrumentos Matemáticos.

O terceiro capítulo refere-se ao estudo histórico-matemático em torno do instrumento, que apresenta o contexto histórico, científico e social em que viveram os irmãos Hadley e como era utilizado o Octante Reflexivo, bem como as propriedades e os conhecimentos mobilizados no seu uso.

O quarto capítulo se dedica a descrever a produção e as escolhas feitas para o Produto Educacional, explicando seus elementos e a experiência de sua aplicação que culminou em reflexões e refinamentos.

Por fim, no quinto capítulo são realizadas as considerações finais do trabalho dissertativo, apresentando as conclusões feitas, os possíveis ajustes e desdobramentos futuros. A partir dessa introdução sobre a dissertação, partimos para a fundamentação desta pesquisa, conforme capítulo que segue.

2 FUNDAMENTAÇÃO

Neste capítulo, iremos apresentar a fundamentação que respalda este trabalho, que se sustenta no uso da aliança entre História da Matemática (HM) e Tecnologias Digitais (TD). Considerando também que iremos dar enfoque no uso de instrumentos em sala de aula, por meio da aliança, para a formação inicial de professores, trazemos aqui fundamentação relativa ao uso de instrumentos e formação de professores.

Além disso, abordamos a fundamentação desta pesquisa no que se referem aos aspectos metodológicos de execução da investigação inquirida. Desta maneira, o capítulo foi separado em quatro seções, nas quais abordaremos sobre a aliança entre HM e TD, Instrumentos Matemáticos, Formação de Professores e a Fundamentação metodológica da pesquisa.

2.1 Sobre a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais

A aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais é uma tendência que vem se desenvolvendo no âmbito da Educação Matemática. Nesta seção, apresentaremos a fundamentação que embasa a pesquisa no que se diz respeito a referida aliança. Segundo Sousa (2020), as pesquisas referentes à aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais começaram com um projeto intitulado Conexões Potenciais entre História da Matemática e TDIC, coordenado pela Professora Doutora Giselle Costa de Sousa, docente do departamento de matemática da UFRN.

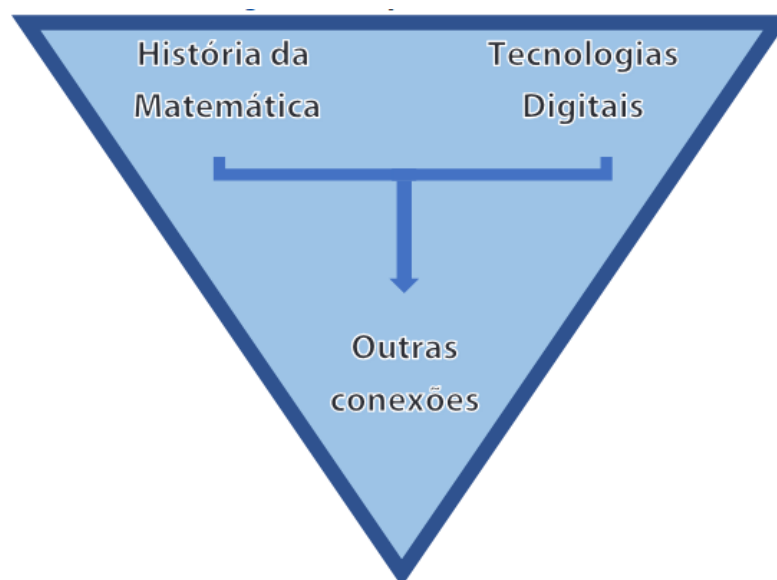
Sousa (2023, p. 5) define a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais como “uma tendência em Educação Matemática em desenvolvimento que alia História da Matemática e Tecnologias num processo uno de conexão que dá evidência a ambas as tendências”. Ou seja, é um processo que lança mão dos argumentos favoráveis ao uso da História da Matemática e ao uso de Tecnologias Digitais buscando apoio dessas duas tendências para potencializar para o ensino da matemática.

Por meio de um levantamento bibliográfico realizado em Anais de eventos nacionais e internacionais, Costa e Sousa (2018) delimitaram parâmetros que apareciam frequentemente em trabalhos que apresentavam a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais. Dessa forma, foram delimitados os seguintes parâmetros: o aspecto metodológico mais usado nos trabalhos estudados apontou

para a pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica; o parâmetro *tema* mais frequente que revelou ser Geometria; o parâmetro *software mais utilizado* indicou o *GeoGebra* e o parâmetro *cunho educacional* sinalizou para produtos educacionais do tipo sequências didáticas, de atividades ou tarefas. Vale salientar que Costa e Sousa (2018) também deixam claro que não é obrigatório seguir esses parâmetros para ter um trabalho na ótica da aliança, visto que pode haver variações, de modo que tais parâmetros foram definidos pela frequência em que apareciam no levantamento.

Levando em conta que a aliança é uma tendência em Educação Matemática em desenvolvimento, vale ressaltar que as conexões entre tendências propostas vêm se moldando à medida que a própria aliança vai se constituindo. Deste modo, Sousa (2020) coloca que houve uma aliança inicial, que conectou História da Matemática e Tecnologias Digitais por meio da Investigação Matemática. Contudo, esta aliança inicial se amplia em alianças, conforme podemos notar na Figura 1 adiante.

Figura 1 - Alianças entre HM e TD



Fonte: Sousa (2023, p. 5).

Segundo Sousa (2023), a aliança promove também a possibilidade de outras conexões, que se integram ao par inicial de tendências, História da Matemática e Tecnologias Digitais, uma delas é por meio do uso da Investigação Matemática, como já sinalizado, mas outras ligações, não necessariamente com outras tendências, podem emergir, a exemplo da aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais a partir do uso das histórias em quadrinhos no ensino⁷. Deste modo, são

⁷ Felipe (2023).

caracterizadas as alianças entre HM e TD. No presente trabalho, buscamos aliar a História da Matemática e Tecnologias Digitais, com enfoque no contexto e narrativa histórica do uso de um instrumento matemático na formação de professores.

Particularmente estudamos o instrumento conhecido como Octante Reflexivo, que é explorado por meio do uso do *software* GeoGebra⁸, de modo a mobilizar conhecimentos científicos, particularmente de natureza matemática/geométricos. Vale ressaltar que a escolha pelo GeoGebra se fundamenta no parâmetro *software* recorrente da aliança, bem como, a escolha do instrumento Octante se sustenta no parâmetro tema Geometria, tendo em vista a natureza dos conhecimentos matemáticos mobilizados em seu estudo histórico-matemático, conforme veremos com mais detalhes no capítulo 3 desta dissertação.

De acordo com Sousa (2020), além da *definição e dos parâmetros* constituintes, a aliança é composta por dois itens fundamentais, são eles: atividades-históricas-com-tecnologias e investigação-histórica-com-tecnologia. Esclarecendo, a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais pode se concretizar via o que concebe como atividades-históricas-com-tecnologias num processo de investigação-histórica-com-tecnologia.

Assim, as atividades-históricas-com-tecnologias são atividades/tarefas que estudam problemas históricos investigados utilizando tecnologias digitais (Sousa; Gomes, 2020). Num coletivo que atende o parâmetro cunho educacional da aliança, essas atividades podem compor uma sequência didática. De fato, na presente pesquisa dissertativa, ansiamos pela elaboração de um Produto Educacional, neste caso, atendendo a mais esse parâmetro da aliança, de forma que tal Produto é concebido como um caderno de atividades no formato de sequência didática. Uma sequência didática é uma maneira de organização de atividades de acordo com a seleção de temas para uma determinada área ou núcleo temático (Araújo, 2013).

Já a investigação-histórica-com-tecnologia consiste num processo de pesquisa e execução/exploração das atividades-históricas-com-tecnologia e que prevê fases. Neste sentido, a investigação-histórica-com-tecnologia aparece no momento em que se concebe e aplicam as atividades. Realmente, baseada na Investigação Matemática de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), inicialmente temos uma introdução ao tema, em

⁸ *Software* dinâmico que reúne possibilidades de trabalhar com geometria, álgebra, gráficos, planilhas, estatísticas e variados cálculos (Hohenwarter, 2016).

seguida o processo de exploração do mesmo (que no caso da investigação-histórica-com-tecnologia deve ocorrer acionado pela história com apoio de tecnologia) e por fim um momento de avaliação e socialização do que foi investigado (que também pode acontecer com apoio das Tecnologias Digitais).

Na proposta de contemplar este processo de investigação-histórica-com-tecnologia, as atividades-históricas-com-tecnologias precisam ser constituídas por *elementos essenciais*, conforme indica o Quadro 1 que segue.

Quadro 1: Elementos fundamentais das atividades-históricas-com-tecnologias

Elementos Fundamentais			
Elementos pré-textuais	Informações básicas	Desenvolvimento da atividade	Avaliação
Capa	Título/Objetivo	Textos exploratórios	Produções de relatórios
Sumário	Conhecimentos prévios	Perguntas reflexivas	Debates reflexivos
Apresentação	Cronograma/Recursos	Recortes históricos	Dinâmicas
	Recomendações ao professor/Procedimentos		

Fonte: Adaptado de Sousa (2020, p. 50-51)

No Quadro 1, podemos ver os elementos fundamentais para a produção de uma atividade-histórica-com-tecnologia, entretanto, Sousa (2020) salienta, que essa é apenas uma recomendação de estrutura e que esses elementos podem sofrer alterações dependendo da natureza do trabalho, objetivos e público.

Nesta dissertação, como já colocado, o Produto Educacional será caracterizado como uma sequência didática, incorporando o uso do Octante Reflexivo no formato digital de um simulador⁹. Assim, na ótica da aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, esta sequência didática será caracterizada como uma atividade-história-com-tecnologia.

A proposta é produzir uma sequência didática que apresente problemas históricos que possam ser explorados utilizando as propriedades do Octante Reflexivo por meio de uma construção usando a ideia da aliança entre História da Matemática

⁹ Segundo Clark, Nelson, Sengupta e D'Angelo (2009, p.4, tradução nossa), “simuladores digitais são modelos computacionais de situações reais ou hipotéticas de fenômenos que permitem os usuários explorar as implicações da manipulação ou modificação os parâmetros”.

e Tecnologia Digital. Portanto, considerando os conhecimentos de natureza geométricos mobilizados pelo instrumento (advindos do estudo histórico-matemático do capítulo 3), serão trabalhados problemas envolvendo ângulos complementares e suplementares, triângulos, ângulos internos, bissetrizes e retas concorrentes e perpendiculares.

Apoiando-se no que foi exposto anteriormente, agora partiremos para a fundamentação sobre o uso de Instrumento no ensino, interligando com a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, culminando no ensino de Geometria.

2.2 Sobre uso do Instrumento no ensino

O uso de instrumentos em sala de aula é uma área de estudo que vem sendo explorada devido suas possibilidades de entender diversos conhecimentos por eles acionados. Saito (2016, p. 4) define instrumentos matemáticos como sendo: “uma ferramenta ou aparato utilizado em laboratório para realizar observações e experimentos; ou ainda, como uma ferramenta que nos permite medir comprimento, peso, e outros fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, força, etc”. Ou seja, os referidos instrumentos constituem recursos que podem mobilizar diversos conceitos, como os de natureza matemática, física, astronômica, geográfica, e entre outras e tem bastante potencial no ensino, sobretudo em práticas investigativas exploratórias (por meio de simuladores por exemplo) como no caso dos experimentos a que se submeteram originalmente.

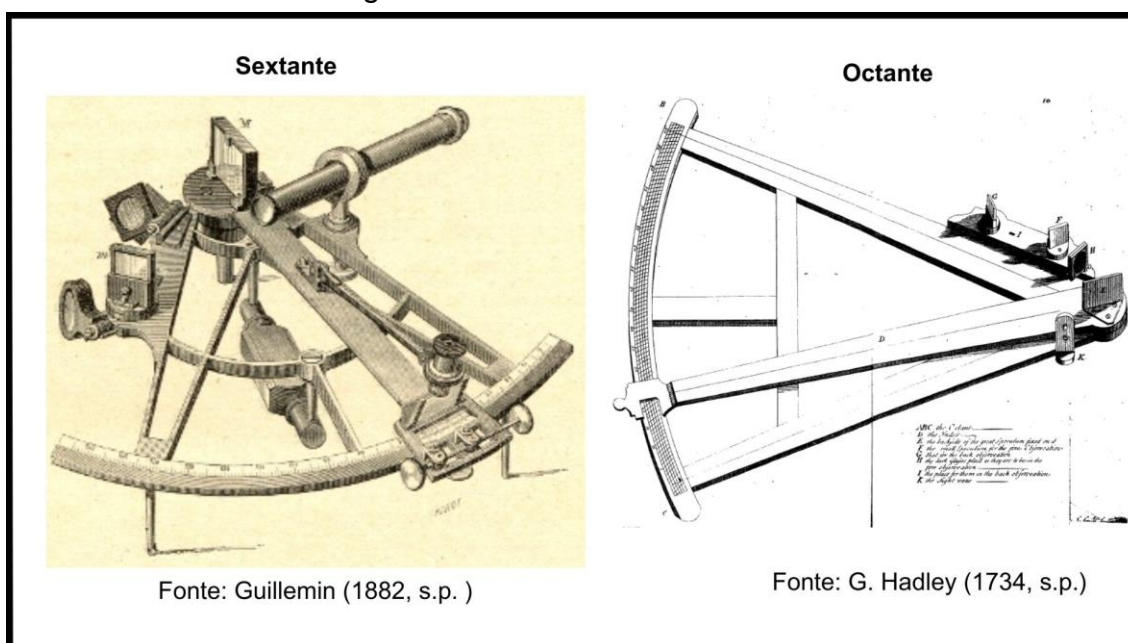
Além disso, Liba Taub (2009) traz que esses instrumentos não necessariamente foram utilizados por um cientista ou para o ensino de ciências, mas eram utilizados para interesses comerciais e dependiam de conceitos científicos para o seu funcionamento. Alguns exemplos desses instrumentos são: o astrolábio náutico, a balestilha, octante reflexivo, o sextante, o quadrante, báculo de Petrus Ramus (1515-1572), duas régua para cálculos, e outros.

Dos instrumentos citados anteriormente, todos eram utilizados para calcular a distâncias, porém, o báculo de Petrus Ramus e as duas régua para cálculos eram, geralmente, utilizados em terra, enquanto o astrolábio náutico, a balestilha, o octante,

o sextante e o quadrante eram utilizados em alto mar, durante a navegação¹⁰. Segundo Turner (1980), esses instrumentos, elaborados para o uso na navegação, tinham a finalidade de encontrar altitudes para facilitar a localização durante as viagens marítimas.

Particularmente, o octante e o sextante utilizavam do mesmo princípio de reflexão de espelhos, chamados por Liba Taub (2009) de instrumentos óticos, explicado com mais detalhes no capítulo 4. Entretanto, a diferença entre esses dois é que possuíam arcos com tamanhos diferentes, e, além disso, o sextante também possuía uma luneta equipada em sua estrutura, como mostra na Figura 2.

Figura 2 - O Sextante e o Octante



Fonte: Acervo da autora (2024).

Nesse interim, há diversas pesquisas que vem realizando a transposição didática do objeto histórico/instrumento para uso no ambiente escolar/acadêmico sendo feitas voltadas para uso de instrumentos na formação de professores de matemática. Dentre tais estudos, que inclusive realizados com alguns dos instrumentos citados anteriormente, podemos destacar Batista e Pereira (2017), Batista (2023), Pereira e Saito (2019), Oliveira (2023), Alencar e Pereira (2022), Lima, Soares, Alves e Pereira (2021), e entre outros. Nos limitamos a comentar a três dos trabalhos: Batista (2023), Pereira e Saito (2019) e Oliveira (2023).

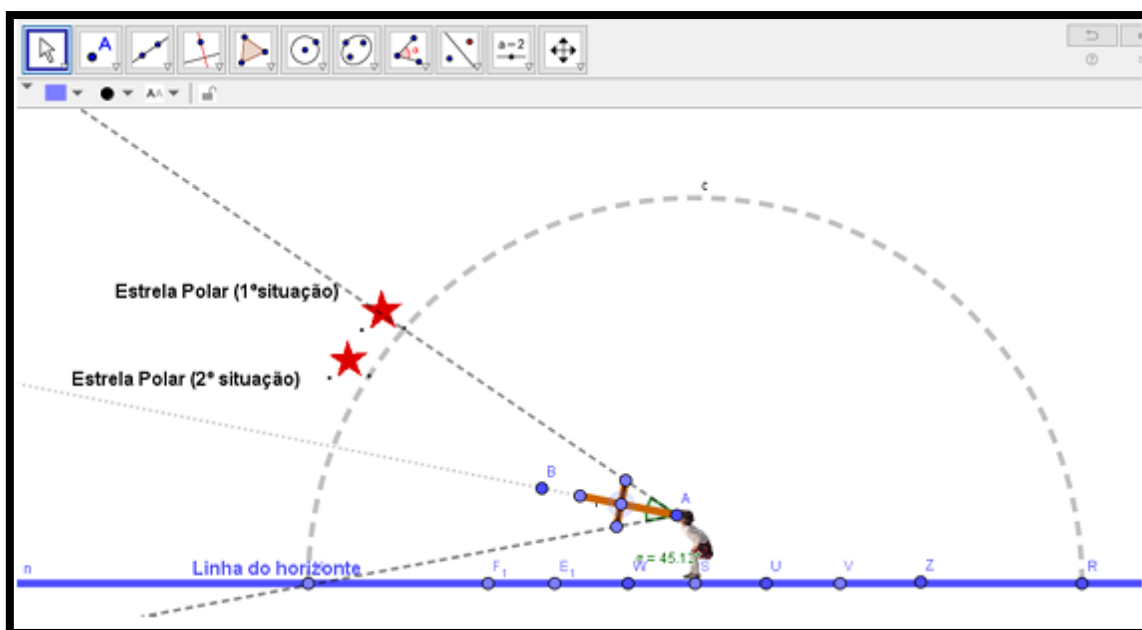
¹⁰ Como dito, todos os instrumentos citados eram utilizados para encontrar distâncias. Para mais informações sobre os instrumentos, ver: Batista e Pereira (2017), Pereira e Saito (2019), Alencar e Pereira (2022), e Lima, Soares, Alves e Pereira (2021).

O estudo realizado por Batista (2023) aborda a mobilização de conceitos de natureza geométrica a partir do uso do instrumento conhecido por balestilha. Durante o desenvolvimento do trabalho, nota-se que foi realizado em um curso de extensão universitária e, além de apresentar a balestilha e o que trabalha, as autoras tiveram também a preocupação de fazer com que os participantes entendessem o contexto histórico no qual foi usado o instrumento, por meio de aulas sobre a matemática no século XV e XVI e a navegação, além de outros tópicos que consideraram importantes.

Já a pesquisa feita por Pereira e Saito (2019) trata da reconstrução do Báculo de Petrus Ramus (1515-1572) à luz da interface entre História da Matemática e Ensino. O estudo teve o objetivo de identificar, na leitura de um tratado escrito por Petrus Ramus sobre a construção e utilização do báculo, possíveis elementos que auxiliassem no ensino da matemática baseados nos conhecimentos mobilizados durante o uso do instrumento.

Um exemplo de trabalhos voltados para a utilização de instrumentos matemáticos no meio digital são as pesquisas desenvolvidas por Pereira, Batista e Oliveira (2021) e Oliveira (2023). Nestes trabalhos, na ótica da aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais por meio da Investigação Matemática, proposta por Sousa (2020), foi feita a utilização do *software* GeoGebra para simular o uso do instrumento balestilha, em sua versão digital, submetida a transposição didática de seus elementos e funcionalidades, onde é possível encontrar a distância entre o horizonte e um astro ou entre dois astros por meio de uma manipulação digital do instrumento, como é mostrado na Figura 3.

Figura 3 - Medição entre o astro e a linha do horizonte a partir de um simulador da balestilha no GeoGebra



Fonte: Pereira, Batista e Oliveira (2021, p.13)

Segundo Saito (2014), a exploração dos instrumentos por meio de propostas que tratem além do conteúdo matemático, mas também o conteúdo histórico, social, econômico e cultural de uma determinada época, fornece ao aluno um conjunto de relações que auxiliam na construção do conhecimento. Ou seja, ao manipular esses instrumentos, acionando o contexto histórico e/ou social, é possível explorar diversas áreas do conhecimento com finalidades didáticas, sendo, nesta pesquisa, para o ensino da matemática.

De tal modo, a proposta da presente pesquisa será trazer diferentes conhecimentos mobilizados no uso do Octante Reflexivo, que foi um instrumento pensado por John Hadley (1682-1744), juntamente com os seus irmãos, George Hadley (1685-1768) e Henry Hadley (1697-1771) no século XVII. O instrumento, assim como os instrumentos de navegação da época, era utilizado para encontrar a altura do sol ou de outros astros em relação ao horizonte, ou seja, a altitude desses astros. Vale salientar que, quando falamos da altura, estamos nos referindo à distância angular entre os astros.

Ressaltamos que, em nosso caso, não houve uma reconstrução de maneira física do Octante Reflexivo previamente, mas, adotamos o diferencial de fazer a reconstrução diretamente no *software* GeoGebra (simulador), pois, diferentemente dos instrumentos reconstruídos com fins didáticos, citados anteriormente, o Octante é

um instrumento de reflexão, ou seja, precisaríamos de uma precisão muito maior em relação aos seus espelhos e, além disso, de materiais mais diferenciados para não empenar o instrumento. Em relação a isto, Saito (2014) ressalta que, ao tentar reconstruir o instrumento, não necessariamente temos a intenção de reconstruir o processo histórico em torno do instrumento, apenas (re)significar os conhecimentos mobilizados por ele.

Dias e Saito (2011, p. 6) afirmam que, “[...] a mobilização de conceitos na atividade pode proporcionar a reflexão do conhecimento sintetizado no próprio instrumento, diferente de outras abordagens didáticas com instrumento que visam somente o uso”. Ou seja, nesse processo de uso do Octante Reflexivo, dentre os conhecimentos geométricos mobilizados, temos os ângulos complementares e suplementares, triângulos, ângulos internos e externos e unidades de medida de ângulos, e desenvolver, por meio de um contexto histórico, os conceitos em sala de aula.

Portanto, a utilização do instrumento matemático em sala de aula não será apenas para entender como funciona o seu uso, mas sim, para além disso, perceber como o instrumento era utilizado entre os séculos XVII e XVIII, quais fatores contribuíram para a utilização deste instrumento em navegações, o contexto histórico em que foi utilizado, que conhecimentos permitem sua funcionalidade e são mobilizados em sua elaboração e uso, entre outros aspectos.

Além disso, sobre trabalhos com o enfoque para o uso de instrumentos em sala de aula, Pereira e Saito (2018, p.119) apontam que este tipo de pesquisa está em expansão, principalmente voltados para o uso didático na formação de professores. Considerando que a proposta da presente pesquisa é voltada para a formação de professores, seguiremos para a próxima seção do capítulo, apresentando embasamento teórico sobre a formação de professores de matemática.

2.3 Sobre a formação de professores

Na presente seção, iremos abordar um pouco mais sobre a formação dos professores de matemática. Para D’ Ambrosio (1993, p. 38) “dificilmente um professor de matemática formado em um programa tradicional estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares”. Além disso, o mesmo autor também diz que, na maioria das vezes, professores ensinam da maneira que os foi

ensinado. Ou seja, é necessário que professores em formação, seja inicial ou continuada, tenham acesso a atividades, cursos e oficinas que abordem um lado não tradicional do ensino da matemática, por meio de tendências da educação matemática, como o uso de tecnologias digitais, atividades dinâmicas, e entre outras.

A Resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE/CP) nº 2/2015 (Brasil, 2015, p. 3), documento que discorre sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior para cursos de licenciatura e cursos de formação pedagógica, apresenta que, a formação de professores, inicial e continuada, é destinada para a preparação e desenvolvimento do professor enquanto profissional da educação e sua função no ensino, assegurando a produção e construção do conhecimento de crianças, jovens e adultos na sociedade. Dessa maneira, vê-se a necessidade de inserir no currículo do professor de matemática, um processo de formação didática, baseando-se em estudos já efetivados ou em construção que auxiliem o futuro professor ou o professor já formado na sua atuação como docente.

Além disso, a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) apresenta orientações para cursos/práticas voltadas para a formação de professores de todas as áreas, dentre eles, destacamos: 1. Compromisso com metodologias de dinâmicas inovadoras que propiciem ao professor uma aprendizagem significativa alinhadas com a BNCC; 2. Emprego pedagógico de recursos digitais para a utilização tanto dentro da sala de aula como fora dela; e 3. Compromisso com a educação dos professores em formação, focando na constituição de conhecimentos, competências, habilidades, valores e formas de conduta que valorizem e respeitem a pluralidade e diversidade de ideias e concepções pedagógicas (Brasil, 2019).

Considerando o exposto sobre a formação de professores, a aplicação de nosso PE (procedimento experimental da pesquisa) será realizada em uma disciplina ofertada no curso de Licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. O Projeto Pedagógico do Curso de Matemática Licenciatura – PCC (UFRN, 2013) apresenta que, durante a formação de futuros professores de matemática dentro do curso, os alunos devem receber uma formação abrangente, tendo acesso aos avanços dentro do âmbito do ensino da matemática, quando possível, também fazendo intercâmbios com outras áreas do conhecimento¹¹.

¹¹ A exemplo da física, química, biologia, engenharia, informática, e entre outras.

Além disso, também cita que o perfil do formando deste curso deve ter um domínio quanto a diversidade de metodologias didático-pedagógicas, ou seja, as tradicionais, não tradicionais e as que ainda se encontram em construção. Assim, o resultado desta pesquisa, mais precisamente o Produto Educacional, além de abranger uma metodologia não tradicional, ainda é respaldado em uma tendência que se encontra em construção: a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais e, com contribuições para sua ampliação quando busca conexão da aliança com uso de Instrumentos Matemáticos no ensino da matemática.

A turma na qual nos referimos anteriormente é a Didática da Matemática II, com código MAT1516, ofertada pelo Departamento de Matemática da UFRN. Na ementa da disciplina no qual foi realizada a aplicação da sequência didática, um dos eixos que devem ser abordados é a aplicação das tendências em educação Matemática na sala de aula que condiz com a intenção de uma das fundamentações que respaldam o nosso Produto Educacional, a aliança entre essas duas tendências HM e TD.

Abordar a aliança entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais por meio de instrumentos pode auxiliar de diversas formas na formação de professores, pois, além de entender o conteúdo matemático, almeja-se que o futuro professor tenha formação suficiente para manejar aulas com História da Matemática e Tecnologias Digitais, a exemplo do que aponta Oliveira (2023), ao trabalhar com a aliança das duas tendências a partir do uso do simulador do instrumento Balestilha.

A partir do que foi exposto sobre a fundamentação que respalda a nossa pesquisa, na próxima seção, apresentamos a metodologia utilizada no decorrer da pesquisa e na produção e aplicação do Produto Educacional, de modo que partimos dos fundamentos teóricos para os metodológicos da pesquisa.

2.4 Sobre fundamentação metodológica

Nesta última seção deste capítulo, iremos apresentar a caracterização metodológica utilizada durante o caminhar da pesquisa. Como já mencionado, a presente pesquisa faz o uso de uma abordagem qualitativa por meio de procedimentos bibliográficos e documentais associando ainda elementos de pesquisa experimental em sua aplicação prática.

Para Neves (1996, p.1), na pesquisa qualitativa, é possível fazer o levantamento de dados descritivos por meio do contato direto entre o pesquisador e o objeto de estudo. Ou seja, ao utilizar de uma abordagem qualitativa, é possível ter uma análise a partir da perspectiva do pesquisador e do seu estudo em cima do objeto estudado, indo além de apenas coletar dados qualitativos. Nessa ótica, o presente estudo utiliza de uma metodologia qualitativa para entender os conhecimentos de natureza geométrica mobilizados durante o uso do Octante Reflexivo, abordando tais conhecimentos em um Produto Educacional voltado para o ensino de geometria na formação de professores.

Neste intuito, utilizamos de procedimento bibliográfico, que, segundo Severino (2010, p.122) é aquele

que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos com livros, artigos, teses, etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados.

Nesta perspectiva, foi realizado um levantamento de materiais, incluindo livros, artigos, vídeos, imagens, e outros dados oriundos de bibliografias que pudessem ter alguma relação com o Octante Reflexivo e/ou com os irmãos Hadley. Para isso, realizamos um levantamento¹² em bibliotecas *online*¹³, sites de busca, periódicos e plataformas de vídeo e imagem, tanto nacionais quanto internacionais. Todos os materiais levantados nesta pesquisa são mostrados com mais detalhes no capítulo 3 desta dissertação, onde foram separados em categorias, com descrições e reflexões sobre seu conteúdo.

Durante o levantamento destes materiais e dos estudos feitos com ele, as referências nos levaram a três documentos produzidos pelos irmãos Hadley. A partir daí, entramos no procedimento de pesquisa documental, para estudar e entender o conteúdo dos documentos e encontrar possíveis elementos que auxiliassem no ensino de geometria na formação de professores.

Segundo Oliveira (2007), o procedimento de pesquisa documental é caracterizado pelo levantamento de dados e informações em documentos que não receberam um tratamento científico, ou seja, documentos nos quais não foi realizada

¹² Durante as buscas, utilizamos as seguintes palavras chaves: Octante Reflexivo, Octante Reflexive, Hadley's quadrante, John Hadley, George Hadley, Henry Hadley, Hadley's Brothers, instruments.

¹³ A exemplo de: Biblioteca Britânica, Biblioteca Nacional de Portugal, Journal Storage, The Royal Society Publish, Biblioteca Gallica, Biblioteca Nacional da França, e entre outras.

uma análise ou estudo aprofundado, podendo livros, artigos, tratados, imagens, gravações de vídeo e áudio, e entre outros.

Dos documentos encontrados temos: 1. *The Description of a new instrument for taking angles*, artigo publicado em 1731, por John Hadley; 2. *An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles*, artigo publicado em 1732 por John Hadley; e 3. *A description of a new instrument for taking the latitude or Other altitudes at sea. With Directions for its use*, livro publicado em 1734 por George Hadley. Os dados coletados desta pesquisa documental estão todos descritos no capítulo 3 desta dissertação, separados por subseção.

Depois da investigação realizada a partir do material bibliográfico reunido e os estudos a partir dos documentos encontrados, partimos para a produção e aplicação do Produto Educacional, que consiste em uma sequência didática, mais especificamente, um caderno de atividades. A aplicação foi realizada numa turma de formação inicial de professores e, para isto, fizemos o uso da pesquisa experimental.

De acordo com De Luneta e Guerra (2023), a pesquisa experimental é entendida como uma participação direta do pesquisador na intenção de entender um fenômeno a partir de duas ou mais variáveis. Ou seja, na pesquisa experimental, o pesquisador atua como um agente ativo e não apenas como um observador. Para este estudo, utilizaremos a pesquisa experimental afim de ver a relação entre os participantes desta e o Produto Educacional observando como os participantes interagem com a sequência didática. Dessa forma, durante e depois da aplicação, com os resultados obtidos, podemos validar e melhorar o PE.

Considerando os aportes teóricos e metodológicos desta dissertação, seguimos no próximo capítulo com a realização de estudo histórico-matemático, que aciona tanto elementos da pesquisa bibliográfica quanto documental, sustentado pelos princípios de uma metodologia qualitativa, cujos resultados serão usados no capítulo 4 que tratará da concepção de nosso Produto Educacional, bem como, sobre sua aplicação, onde serão evidenciados procedimentos da pesquisa experimental.

3 CONTRIBUIÇÕES DOS IRMÃOS HADLEY PARA O USO DO OCTANTE REFLEXIVO NA NAVEGAÇÃO NOS SÉCULOS XVII E XVIII

Neste capítulo, separado em três seções, apresentaremos um estudo histórico-matemático em torno do instrumento Octante Reflexivo dos irmãos Hadley. Para tanto, adotamos abordagem de pesquisa com procedimentos bibliográficos e documentais, os quais são tratados ao longo das seções.

Assim, a primeira seção é constituída pelo levantamento bibliográfico feito em torno do objeto histórico que corresponde ao objeto de pesquisa (uso do Octante Reflexivo) classificando as bibliografias em três categorias relevantes e chegando aos documentos que tratam do referido objeto.

Já a segunda seção é composta da apreciação dos documentos encontrados, a partir do levantamento feito na primeira seção, de modo que mostramos sua estrutura e conteúdo em geral, dando início ao estudo histórico-matemático proposto.

Por fim, a terceira seção consiste nas ponderações acerca do uso do Octante Reflexivo por meio dos documentos investigados em confronto com as bibliografias, finalizando o estudo histórico-matemático cujos resultados são levados para elaboração do PE no próximo capítulo deste texto dissertativo.

3.1 Fontes bibliográficas em torno do objeto de pesquisa

Para o desenvolvimento desta etapa da pesquisa, organizamos o levantamento bibliográfico feito em três categorias:

- 1ª categoria: Fontes sobre os irmãos Hadley;
- 2ª categoria: Fontes sobre os trabalhos envolvendo o Octante Reflexivo;
- 3ª categoria: Fontes sobre o contexto histórico em que foi desenvolvido o Octante Reflexivo;

Nosso ponto de partida foi o *Mactutor: History of Math*¹⁴, um site que apresenta uma ordem cronológica com estudiosos de várias áreas que tiveram participação na História da Matemática. Para cada personagem há um texto que contém um pouco sobre sua biografia e referências relacionadas às informações apresentadas. Assim, consultando no *Mactutor* sobre John Hadley (1682-1744), buscamos as primeiras referências relativas a ele, seu contexto e produção, particularmente sobre o Octante Reflexivo, isto é, procuramos um documento de autoria de Hadley que fale do Octante.

¹⁴Link de acesso para o *Mactutor: History of math*: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>

A partir delas, utilizamos sites de buscas como o Google Livros e Google Acadêmico¹⁵; sites e contatos de bibliotecas, como a Biblioteca Britânica e Biblioteca Nacional da França¹⁶; e ainda sites de revistas e publicações, como a revista da *The Royal Society* e o JSTOR¹⁷ (*Journal Storage*). Como uma forma de organizar as bibliografias reunidas no levantamento em torno do instrumento em estudo, foi feito o Quadro 2.

Quadro 2 - Organização das fontes bibliográficas catalogadas para a pesquisa em torno do Octante Reflexivo.

Categorias de divisão	Nome do documento	Ano	Autor	Formato em que está preservado	Onde podem ser encontradas
Fontes sobre os irmãos Hadley	Biographical account of John Hadley, Esq. V.P.R.S., the inventor of the quadrant, and of his brothers George and Henry	1835	S.P. Rigaud	Ebook	Link do Ebook: https://play.google.com/books/reader?id=ACoG1RsxXsUC&pg=GBS.PP18&hl=pt
	History of the Telescope	1955	Henry C. King	Ebook	Link do Ebook: https://www.google.com.br/books/edition/The_History_of_the_Telescope/KAWwzHIDVksC?hl=pt-BR&gbpv=1
Fontes sobre os trabalhos envolvendo o Octante Reflexivo	New and Complete Epitome of Practical Navigation	1828	J. W. Norie	Ebook	Link do Ebook: https://play.google.com/books/reader?id=v1QpAAAAYA AJ&pg=GBS.PA174&hl=pt&q=octant
	Biographical account of John Hadley, Esq. V.P.R.S., the inventor of the quadrant, and of his brothers George and Henry	1835	S.P. Rigaud	Ebook	Link do Ebook: https://play.google.com/books/reader?id=ACoG1RsxXsUC&pg=GBS.PP18&hl=pt
	History of Astronomy: An Encyclopedia	1997	John Lankford	Ebook	Link do Ebook: https://books.google.com.br/books/ab

¹⁵ Link do Google Livros: <https://books.google.com.br/> e link do Google Acadêmico: <https://scholar.google.com.br/?hl=pt>.

¹⁶ Link do site da Biblioteca Britânica: <https://www.bl.uk/> e link do site da Biblioteca Nacional da França: <https://catalogue.bnf.fr/index.do>

¹⁷ Link do site da revista da *The Royal Society*: <https://royalsociety.org/journals/> e link do site da JSTOR: <https://www.jstor.org/>.

					out/History_of_Astronomy.html?id=flzMMe3VczkC&redirect_esc=y
	Nome do documento	Ano	Autor	Formato em que está preservado	Onde podem ser encontradas
	Animate It - Octant	2015	History of Science Museum	Vídeo	Link do vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=iiCY94LMBVg
	20150408 PredictionX MuseumofSciInstrumnts Octant Sextant Quadrant amy1	2017	Prediction X-Previews	Vídeo	Link do vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=gNaXKjvpNNA&t=232s
Fontes sobre o contexto histórico em que foi desenvolvido o Octante Reflexivo	The Mathematical Practitioners of Hanoverian England 1714-1840	1966	Eva Germaine Rimington Taylor	PDF	Disponível para compra em sites de venda
	The influence of the Royal Observatory at Greenwich upon the design of 17th and 18th century angle-measuring instruments at sea	1976	A. Stimson	PDF	Link para o PDF: http://coastalboating.net/Resources/Navigation/Celestial/pix/StimsonNav.pdf

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O Quadro 2 está organizado de acordo com as categorias citadas anteriormente, de modo que sua seleção promoveu uma melhor organização entre as referências que falavam sobre os irmãos Hadley¹⁸, sobre o instrumento matemático, Octante Reflexivo, e as que não necessariamente falam sobre nenhum dos dois, mas auxiliam no entendimento sobre o período em que o instrumento foi produzido e utilizado.

As fontes em cada categoria foram organizadas de maneira cronológica em relação ao seu ano de publicação. Além disso, também é possível perceber que, no caso de Rigaud (1835), há uma repetição de referência em mais de uma categoria, e isso se dá visto que a referência apresenta informações tanto sobre John Hadley quanto sobre o Octante Reflexivo.

¹⁸ Embora inicialmente o Octante estivesse associado apenas ao nome de John Haldley, neste momento da pesquisa, já temos ideia que John Hadley teve auxílio de seus irmãos, George Hadley e Henry Hadley, na elaboração e uso do Octante.

Ao que diz respeito à *primeira categoria*, fontes sobre os irmãos Hadley, temos: Rigaud (1835) e King (1955). No primeiro caso, é o livro *Biographical account of John Hadley, Esq. V.P.R.S., the inventor of the quadrant, and of his brothers George and Henry* (Relato sobre John Hadley, Esq. V. P. R. S.¹⁹, o inventor do quadrante e seus irmãos, George e Henry – Tradução nossa). Como o título já diz, o livro é sobre uma biografia de John Hadley e seus irmãos, George e Henry Hadley. Nesse livro, Rigaud (1835) apresenta a trajetória de vida dos irmãos Hadley, bem como sua árvore genealógica, além disso, traz estudos feitos por eles, profissões que seguiram na época e um pouco sobre seus estudos e realizações.

No segundo caso, temos a obra de King (1966) que se refere a um livro que apresenta um pouco da história do telescópio²⁰, não apenas mostrando a construção do instrumento em si, mas o desenvolvimento das peças ao longo do tempo, como das lentes e sua estrutura e, além disso, o livro trata da participação de alguns estudiosos, de diferentes áreas, que contribuíram para o que conhecemos hoje sobre os telescópios. Um desses estudiosos é John Hadley, que segundo Rigaud (1835) e King (1966), produziu pesquisas sobre a reflexão produzida por lentes de vidro e instrumentos refletoras, tal como o telescópio, o Octante e o Sextante²¹. No livro, King (1966) fala um pouco sobre a trajetória das pesquisas relacionadas a estes instrumentos desenvolvidas por J. Hadley.

Para a *segunda categoria*, fontes sobre os trabalhos envolvendo o Octante Reflexivo, temos as referências: Norie (1828), Rigaud (1835), Taylor (1966), Stimson (1976) e Lankford (1997). Como já mencionado, nota-se a inclusão de uma mesma bibliografia em mais de uma categoria, Rigaud (1835), isso se dá, pois em alguns casos, há informações tanto sobre John Hadley quanto sobre o Octante.

Norie (1828) apresenta a descrição e uso do Quadrante de Hadley e Sextante de J. Hadley nos capítulos dos seus livros sobre práticas de navegação e ajustes para serem feitos em alguns instrumentos utilizados na navegação. Autores como Rigaud (1835), King (1955) e Lankford (1997), em alguns momentos de suas pesquisas,

¹⁹ Na expressão Esq. V.P.R.S., temos que *Esq* significa um título de cortesia na Inglaterra e, a expressão V.P.R.S significa *vice-president of the Royal Society*, ou seja, Vice-presidente da *Royal Society*.

²⁰ Segundo Ávila (1997), o telescópio é um instrumento utilizado para ampliar objetos situados a longas distâncias a partir de lentes refletoras.

²¹ Segundo Norie (1828), o sextante é um instrumento de reflexão que mede a distância angular entre o horizonte e um astro ou entre dois astros, semelhante ao octante, porém, com um arco maior, com um sexto de um círculo.

intitulam o Octante Reflexivo como Quadrante de Hadley²² e isso ocorre, pois, segundo Dear e Kemp (2006), como o Octante utiliza o princípio de dupla reflexão, isso fazia com que um grau do arco do mesmo representasse o dobro do ângulo tomado entre os objetos observados, utilizando a demonstração apresentada na seção 3.3 mais à frente.

Já o Sextante é um sexto de círculo e, mesmo diferente do nosso objeto de estudo, apresenta um mecanismo semelhante de reflexão de espelhos. A referência Lankford (1997) refere-se a uma enciclopédia da história da astronomia. Sendo uma enciclopédia, o livro possui várias seções com algumas informações sobre contribuições feitas para a astronomia durante a história. Dessa forma, a pesquisadora Sara Schechner-Genuth trata do desenvolvimento do Octante e como o mesmo era utilizado no século XVIII.

As duas últimas referências da segunda categoria são vídeos de estudiosos falando sobre a utilização do Octante, por meio de uma demonstração com o próprio instrumento. O primeiro dos vídeos, publicado pelo canal *History of Science Museum*²³ faz parte de um projeto de vídeos mostrando a utilização de alguns instrumentos históricos da coleção do museu de Oxford, que normalmente são expostos para visitas, porém, não podem ser tocados ou utilizados por motivos de preservação. Nesse projeto, alguns estudiosos mostram como eram utilizados instrumentos, dentre eles, o Octante Reflexivo.

Nesse primeiro vídeo, o neurocientista e educador, James Cooke, explica sobre a utilização do Octante por meio de uma demonstração com o objeto físico e fazendo algumas explicações sobre suas características e informações, bem como, sobre como o instrumento era utilizado durante o século XVIII. Já o segundo vídeo, publicado pelo canal PredictionX-Previews²⁴, é apresentado pela pesquisadora Sara Schechner-Genuth, também responsável pela escrita da seção sobre o Octante no livro *History of Astronomy: An Encyclopedia*, já referenciado anteriormente.

Por fim, na terceira categoria, fontes sobre o contexto histórico em que foi desenvolvido o Octante Reflexivo, temos: Taylor (1966) e Stimson (1976). No caso da primeira fonte, Taylor (1966) refere-se a um livro que apresenta alguns praticantes

²² O nome quadrante de Hadley é em homenagem ao John Hadley, considerando que as primeiras publicações e motivações para este tipo de estudo partiram dele.

²³ Link do canal History of Science Museum: <https://www.youtube.com/@HistoryofScienceMuseum>

²⁴ Link do canal PredictionX-Previews: <https://www.youtube.com/@predictionx-previews2355>

matemáticos que fizeram produções no período de 1714 até 1840, incluindo uma seção falando sobre estudiosos das áreas conhecidas hoje por navegação e astronomia. John Hadley é citado, com um pouco da sua história e contribuições em estudos sobre instrumentos utilizados na navegação.

Já a segunda fonte, Stimson (1976), em seu artigo, fala sobre a influência do Observatório Real de Greenwich²⁵ para os avanços de instrumentos de medidas de ângulos utilizados entre os séculos XVII e XVIII. Um desses instrumentos, citados por Stimson (1976), é o Octante Reflexivo, exibido como um dos instrumentos que apresenta um diferencial de possuir uma incidência menor de erros do que os outros instrumentos da época, utilizados para calcular longitudes.

As diversas referências citadas antes contribuíram para iniciar a tecitura de uma malha histórica em torno de nosso objeto de pesquisa, isto é, o uso do Octante Reflexivo proposto por John Hadley com a contribuição dos irmãos. Neste sentido, buscamos entender o contexto em que foi produzido, conhecer sobre seu autor e sua produção, imersos num espírito de época que envolve seus contemporâneos e o contexto de sua época e região. Desse modo, obtivemos informações sobre a definição e contextualização do Octante Reflexivo, bem como encontramos documentos que nos permitem lançar mão de evidências sobre os trabalhos de J. Hadley e seus irmãos a respeito do uso do Octante. Para apreciação dos referidos documentos, destinamos a subseção a seguir.

3.2 Estudos iniciais de documentos que tratam do uso do Octante Reflexivo

Na presente seção faremos a apreciação (estrutura e conteúdo em geral), a partir da pesquisa documental, das *principais fontes/documentos* para esta pesquisa, encontradas a partir de pesquisa bibliográfica exposta na seção anterior deste capítulo. Em nosso caso são *três artigos*, dois deles escritos por John Hadley (1682-1744), em 1731 e 1732, e mais um artigo escrito, posteriormente, pelo seu irmão George Hadley (1685-1768), em 1734. Chamaremos esses documentos também de fontes no presente trabalho.

²⁵ Segundo a Enciclopédia Britânica, o Observatório Real de Greenwich foi fundado em 1675 pelo rei da Inglaterra da época, rei Carlos II, com o objetivo de desenvolver pesquisas na navegação. As pesquisas realizadas pelos estudiosos que participavam desta instituição científica publicaram na própria revista, intitulada *The Nautical Almanac*, e fez contribuições na área da navegação e astronomia.

Esclarecendo, as fontes em questão são: J. Hadley (1731), J. Hadley (1732) e G. Hadley (1734), que se referem a documentos escritos por alguns dos idealizadores do Octante Reflexivo, John Hadley e George Hadley (irmãos Hadley). Para melhor organização e entendimento da pesquisa, definiremos *J. Hadley (1731) como a Fonte 1*, *J. Hadley (1732) como a Fonte 2* e *G. Hadley (1734) como a Fonte 3*. Esta diferenciação se deu de acordo com a ordem em que os documentos foram encontrados durante a pesquisa, que também coincide com a ordem dos anos em que foram publicados.

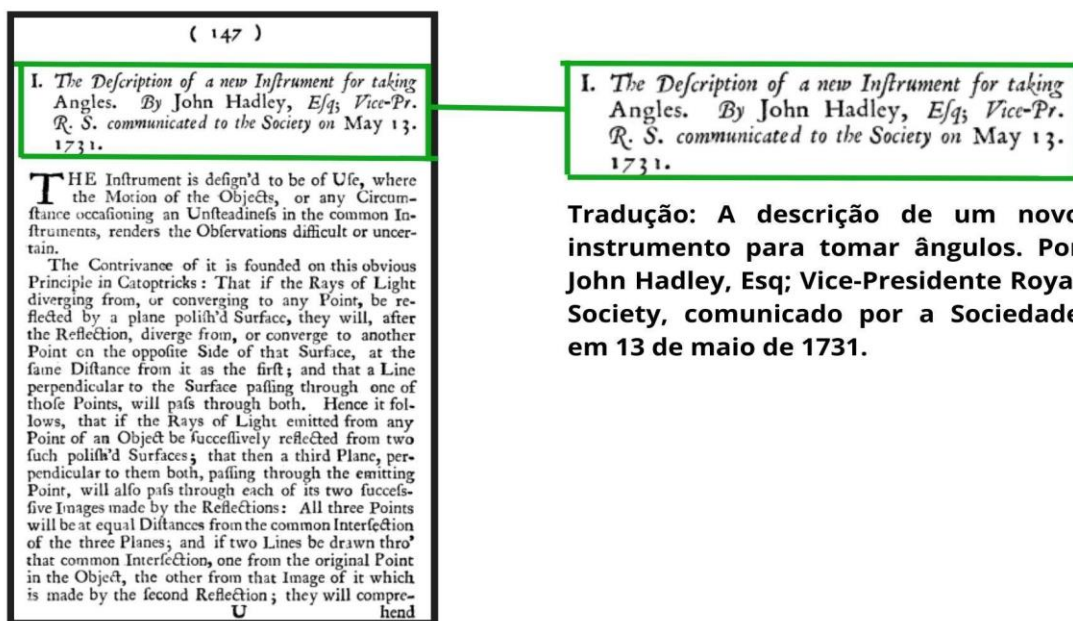
Além disso, para melhor entendimento, vale salientar que iremos convencionar que a notação usada para indicar as figuras anexadas nos documentos estudados será a mesma nomenclatura que John Hadley utilizou, com algarismos romanos (como Figura I, Figura II, entre outras) e para as imagens desta dissertação, utilizaremos os algarismos cardinais (como Figura 1, Figura 2, entre outras).

3.2.1 Apreciação do primeiro documento (fonte): J. Hadley (1731)

A *primeira fonte* citada, J. Hadley (1731), denominada como *Fonte 1*, refere-se ao artigo em língua inglesa intitulado *The Description of a New Instrument for Taking Angles*²⁶. Tratando de sua estrutura e conteúdo, podemos dizer que é um artigo de 14 páginas (147-157), produzido por John Hadley, publicado na revista *Philosophical Transactions*, edição de número 420, volume 37, onde o autor apresenta a descrição inicial de um instrumento para calcular altitudes durante a navegação. Das 14 páginas citadas antes, três delas são de figuras utilizadas como complementos do texto e as outras 11 são o corpo textual do artigo. Na Figura 4, a seguir, trazemos a primeira página do corpo do texto do artigo com destaque a algumas evidências dessas informações.

²⁶ Em português, corresponde a *A descrição de um novo instrumento para tomar ângulos* – tradução nossa.

Figura 4 - Página inicial da Fonte 1



Fonte: Adaptado de J. Hadley (1731, p. 147).

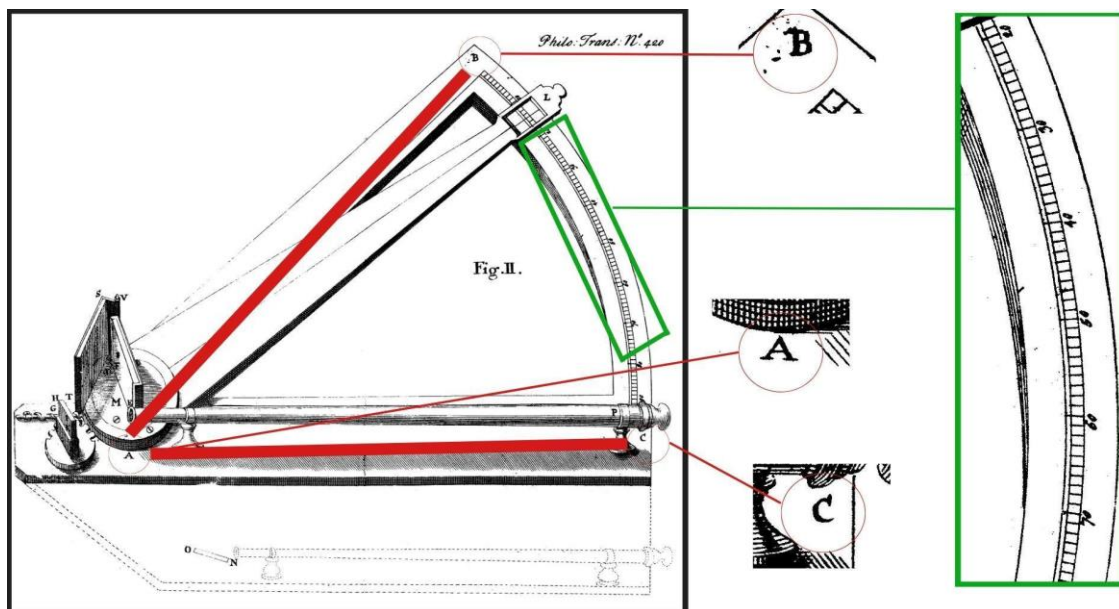
De fato, na Figura 4, podemos ver, em destaque, o título do artigo, o autor do documento, seu cargo na *The Royal Society* e a data de publicação do referido trabalho. Também é possível perceber que no título não tem o nome do instrumento a que seu conteúdo se destina, porém, um modo de descrevê-lo em formas gerais como a exposição de um instrumento para tomar ângulos. O termo Octante Reflexivo é observado a primeira vez no documento na página 150, onde o autor menciona:

Fig II. O Instrumento consiste em um Octante ABC, tendo em seu Membro BC um Arco de 45 Graus, dividido em 90 Partes ou Meio Grau; cada um dos quais corresponde a um Grau inteiro na Observação. (Hadley, 1731, p. 150, tradução nossa)²⁷

Na citação anterior, o autor faz a descrição da sua Figura II em anexo do documento, onde há uma representação do corpo do instrumento, no qual ABC consiste no arco de madeira formado por BÂC, como mostra nossa Figura 5, com o arco destacado em vermelho. Além disso, vendo a Figura 5, usando a citação anterior como referência, também é possível notar o arco de 45 graus dividido em 90 partes, tendo a marcação dos graus de 0 graus até 90 graus (como destacado em verde e na ampliação).

²⁷ Fig. II. *The instrument consists of na Octante ABC, having on its Lim B C na Arch of 45 Degrees, divided into 90 parts or half Degrees; each which answers to a whole Degree in the observation.*

Figura 5 - Figura II em anexo na Fonte 1

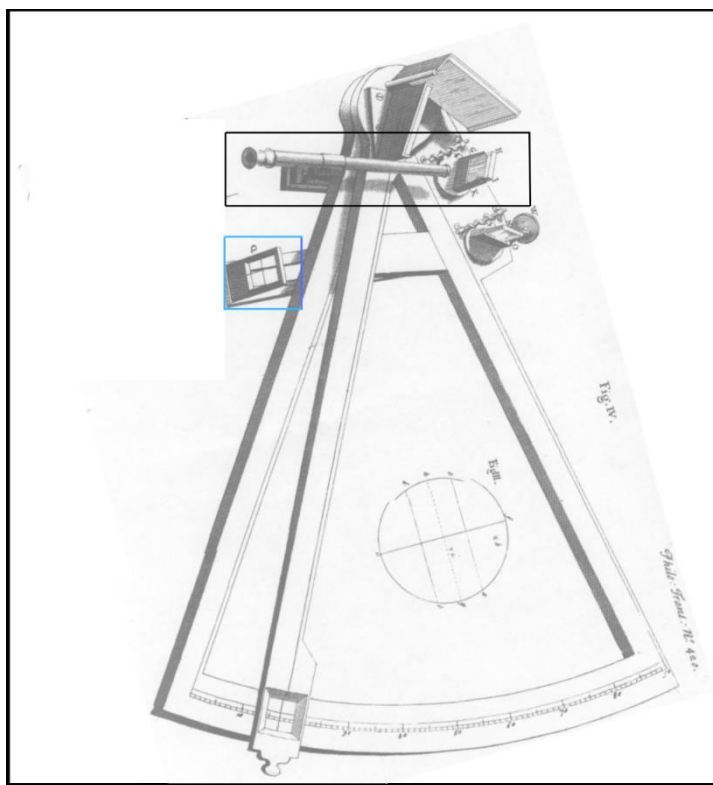


Fonte: Adaptado de J. Hadley (1731, s.p.).

Na Figura 5, é possível perceber as letras B, A e C nos destaques feitos em vermelho, formando o arco BÂC de 45 graus, mencionado na citação anterior. Além disso, no destaque feito em verde, podemos ver uma parte do membro BC, que, como é citado antes, é dividido em 90 partes. Na parte em verde, nota-se que não há uma numeração para todas as divisões, apenas para as dezenas, como destacado, de cima para baixo, os números 20, 30, 40, 50, 60 e 70. Além do mais, entre cada dezena, temos 9 separações, demarcando 10 divisões entre as dezenas. Ou seja, por exemplo, entre os ângulos 40° e 50° , temos também as demarcações, mesmo que sem números escritos, dos ângulos 41° , 42° , 43° , ..., 49° .

Ainda sobre os anexos presentes nesta fonte, John Hadley também apresenta uma outra figura, identificada pelo mesmo no corpo do texto como Figura IV. Ela também apresenta um Octante Reflexivo, porém, com alguns elementos da estrutura do instrumento posicionadas de maneira diferente. Para exemplificar, trouxemos a Figura 6, mostrando a maneira de posicionamento do Octante a partir deste outro modelo.

Figura 6 - Outro modelo de Octante proposto por John Hadley



Fonte: Adaptado de J. Hadley (1731, s.p.)

Neste outro modelo, mostrado na Figura 6, inicialmente, é possível ver que o instrumento é posicionado de uma maneira diferente da mostrada na Figura 2. Como o próprio autor apresenta, “[...] outra visão em Q perpendicular ao Instrumento deve ajudar o Observador a mantê-lo em uma Postura vertical”²⁸ (J. Hadley, 1731, p. 156). Isto é, o ponto Q, destacado em azul na Figura 6, é utilizado para manter o instrumento posicionado reto, com o arco voltado para baixo. Além disso, no retângulo em preto, também utilizado como destaque na figura supracitada, temos a luneta de aproximação posicionada na horizontal, em relação ao Octante.

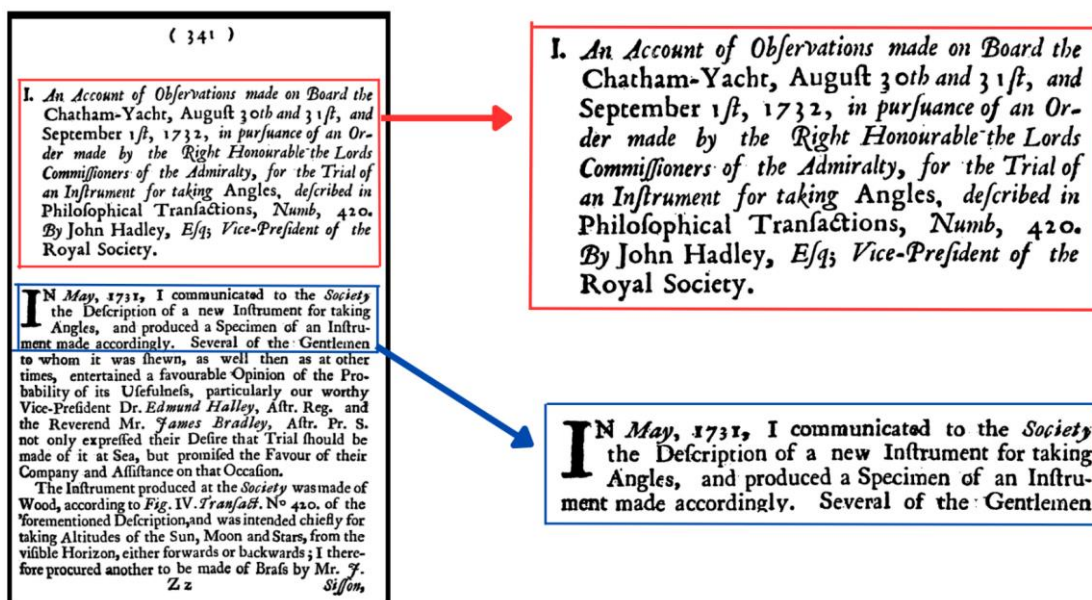
A seguir, iremos explorar um pouco mais do Octante, por meio das outras duas fontes/documentos. A partir dele, contextualizamos mais o uso do Octante durante o século XVII na navegação, bem como outras características e as mudanças que foram sendo feitas para suas melhorias.

²⁸ [...] other Sight at Q perpendicular to the Instrument is to assist the Observer in holding it in a vertical Posture.

3.2.2 Apreciação do segundo documento (fonte): J. Hadley (1732)

A segunda fonte documental, J. Hadley (1732), diz respeito a um artigo, também produzido em inglês por John Hadley, intitulado *An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles*²⁹. Sua estrutura envolve uma produção de John Hadley contendo 16 páginas (341-356) publicada na revista *Philosophical Transactions*, edição de número 425, volume 37. Tal artigo é publicado um ano após a Fonte 1. O conteúdo desse novo artigo (Fonte 2) trata agora de um relato sobre o uso do Octante Reflexivo em uma viagem marítima no período de 30 e 31 de agosto e 01 de setembro de 1732. Algumas evidências dessas informações estão na Figura 7 que segue.

Figura 7 - Página inicial da Fonte 2



Fonte: Adaptado de J. Hadley (1732, p. 341)

Na primeira página do referido artigo, como destacado em vermelho na Figura 7, temos uma apresentação do título, bem como o nome e a posição de vice-presidente do autor na *The Royal Society*, responsável pela publicação do trabalho. Já no título, é possível perceber que o artigo faz referência ao Octante Reflexivo como instrumento para tomar ângulos, descrito na *Philosophical Transactions*, destacado em vermelho na Figura 7. Na evidência feita em azul, na mesma figura, o autor já inicia

²⁹ Em português, *Um relato das observações feitas a bordo do Chatham-Yacht, 30 e 31 de agosto e 1 de setembro, 1732, em cumprimento a uma ordem feita pelos honoráveis Lordes Comissários do Almirantado, para o teste de um instrumento para tomar ângulos* – tradução nossa.

o texto exposto sobre a descrição do mesmo instrumento, feita em 1731, na mesma revista, fazendo referência ao artigo citado na subseção anterior, definido como a nossa Fonte 1.

Diferente da primeira fonte, que apresenta figuras ilustrativas do Octante e alguns de seus componentes juntamente com a descrição, evidenciando mais os conhecimentos de natureza física e matemática, a Fonte 2 traz a sua descrição no início, porém, faz mais relação com a sua experimentação em um navio, ou seja, usando o Octante Reflexivo para tomar distâncias angulares em condições reais de navegação.

Nas páginas 341 a 356, da Fonte 2, observamos que há uma separação entre as seções do artigo. A primeira diz respeito a anotações e observações sobre a viagem marítima realizada no período compreendido entre 30 de agosto a 1 de setembro de 1732, onde o autor apresenta alguns modos de uso e observações feitas durante a viagem e quadros com anotações de ângulos extraídas da utilização do instrumento, a exemplo da Figura 8. A segunda seção do artigo se refere a um texto intitulado de *postscript*, que são anotações feitas sobre o uso do Octante, como observações em relação ao erros dos ângulos tomados e propriedades da reflexão da imagem feita pelo instrumento. Além disso, no fim do documento, há uma correção do autor sobre a sua outra publicação (J. Hadley (1731), Fonte 1 desta pesquisa) com relação a escrita do texto, neste sentido, trata do acréscimo de uma vírgula na linha 24 da página 154 da Fonte 1.

Figura 8 - Página extraída da Fonte 2

The

Altitudes of the Sun, observed lying-by near the *Spile*, September the 11th, before Noon, with the Wooden Instrument backward, the Wind continuing to blow hard, as before, at North-East. The Instrument when used for the back Observation was so adjusted, as to allow for a Dip of the visible Horizon of two Minutes and a half; consequently that Dip being supposed, as before, three Minutes and a half, there remains only one Minute to be accounted for, in computing the Height of the Sun, which is accordingly subtracted in the third Column from the Altitudes found by Computation. The Watch now appeared to be 9' 30" too slow.

Altitudes observed by Mr. John Hadley.

(348)

Time by Watch.	True Time.	True Alt. of the Sun's upperLimb.	Refracti on, add.	App ^t Alt. of the Sun's upperLimb.	Alt. of the Sun's upper Limb observed.	Errors in the Divisi on. subtr.	Observed Altitude of the Sun's upper Limb corrected.	Errors of Observati on.
9 52 55	10 02 25	36 52 54	1 11 36	54 05 36	46 00	1 00	36 45 00	-9 05
10 02 07	11 37 37	43 37 04	1 08 38	44 46 37	44 00	1 00	37 43 00	-1 46
06 00	15 30 38	04 00 01	08 38	05 08 38	04 00	1 00	38 03 00	-2 08
08 53	18 23	19 00 01	08	20 08	22 00	1 00	21 00	+0 52
12 25	21 55	36 25 07	07	37 32	41 00	1 30	39 30	+1 58
16 30	26 00	56 09 06	06	57 15 39	00 00	1 30	58 30	+1 15
18 50	28 20 39	07 07 06	39	08 13 06	00 00	0 30	39 05 30	-2 43
20 40	30 10 15	26 01 06	06	16 32	14 00	0 30	13 30	-3 02

Fonte: J. Hadley (1732, p. 348).

A Figura 8 faz referência a página 348 da Fonte 2, onde o primeiro parágrafo trata de que maneira o instrumento foi ajustado para tomar os ângulos registrados no quadro após o parágrafo. Já em relação ao quadro, intitulado *Altitudes observadas por Mr. John Hadley* (Tradução nossa), podemos observar que o mesmo é dividido em nove colunas com as respectivas nomeações por coluna: Tempo de observação, Tempo real, Altitude real do sol sob a linha, Refração adicional, Apontamento da altitude do membro superior do sol, Erros subtraídos a divisão, Altitude do sol observada e Erros de observação.

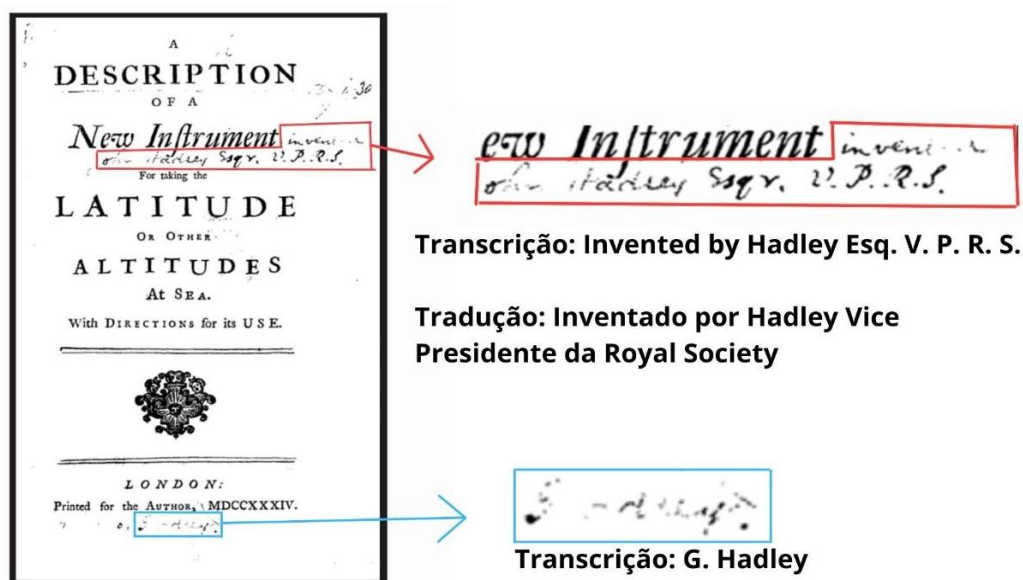
Segundo J. Hadley (1732), a embarcação *Chatham-Yacht* saiu em viagem unicamente para o teste do instrumento, ordenado pelos honoráveis Lordes Comissários do Almirantado³⁰ O autor faz menção aos participantes desta viagem marítima, o Mr. James Bradley (1693-1762), Dr. Edmond Halley (1656-1742) e os irmãos do John Hadley (1682-1744), George Hadley (1685-1768) e Henry Hadley (1697-1771). No decorrer do texto, o autor não explicita a função de cada um durante a viagem, porém, nas apresentações das tabelas, nota-se que os títulos fazem referência às pessoas que fizeram as tomadas dos ângulos utilizando o Octante, dentre eles, Mr. Bradley, John Hadley e Henry Hadley, citados anteriormente.

³⁰ Segundo Roskill (1954), os Lordes Comissários do Almirantado eram os membros do conselho do comando supremo, responsáveis pela marinha real britânica.

3.2.3 Apreciação do terceiro documento (fonte): G. Hadley (1734)

A terceira fonte documental sobre o Octante Reflexivo intitula-se *A description of a new instrument for taking the latitude or Other altitudes at sea. With Directions for its use*³¹. Trata-se de um artigo produzido em Londres, no ano de 1734, como podemos evidenciar a partir de informações da Capa do documento, apresentada na Figura 9.

Figura 9 - Capa da Fonte 3



Fonte: Adaptado de G. Hadley (1734, s.p.)

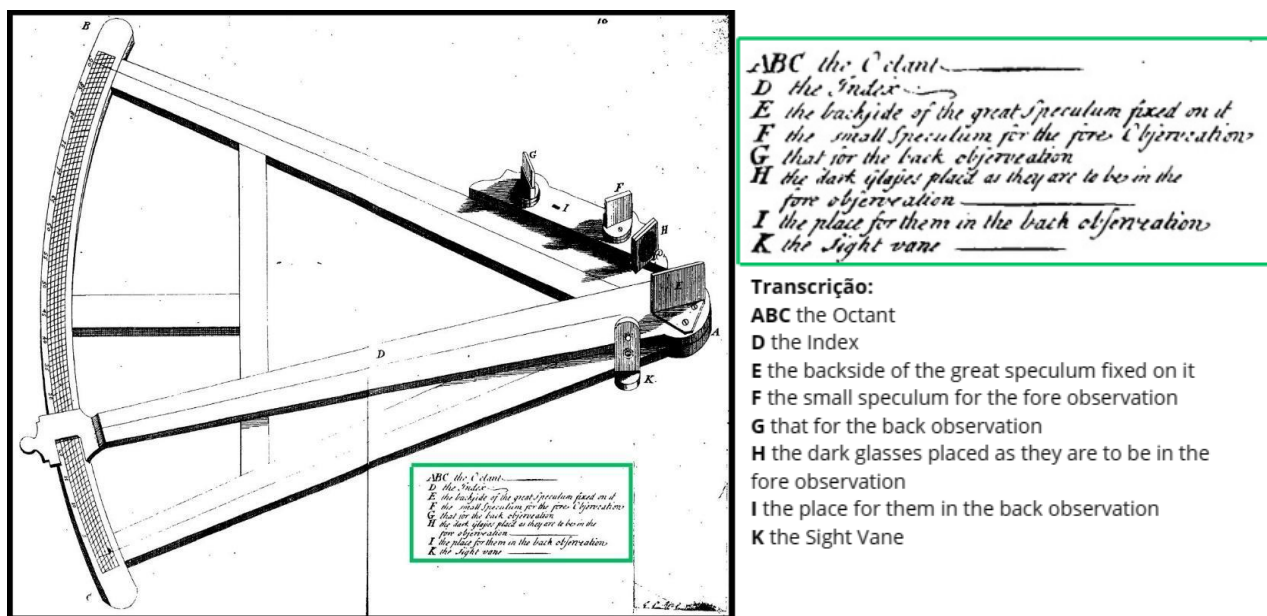
Em vermelho e em azul, temos uma escrita à mão, diferente das outras palavras da capa. No primeiro caso, em vermelho, após a ampliação da imagem, é possível perceber que está escrito: “Inventado por Hadley Vice Presidente da Royal Society” (G. Hadley, 1734, sem página), ou seja, referindo-se a John Hadley, vice-presidente da *The Royal Society* na época. Já em azul, temos, não tão visível, escrito G. Hadley, logo abaixo da frase *Printed by the autor* (Impresso pelo autor), fazendo referência a George Hadley como autor desta fonte. De fato, ao fazer uma busca em sites, como Google Pesquisa, e em bibliotecas virtuais, como a Biblioteca Britânica, Biblioteca de Gale e Biblioteca Francesa, verificamos que todas apontam George Hadley como autor deste documento.

O documento é um livro composto de 30 páginas, sendo a primeira, uma imagem do Octante Reflexivo, apresentada mais à frente na Figura 10, a segunda, a capa inicial mostrada na Figura 9, e as outras páginas são o corpo do texto. O corpo

³¹ Em português, *A descrição de um novo instrumento para tomar a latitude ou outras altitudes no mar. Com direções para o uso* – tradução nossa.

do texto é separado em duas partes, sendo a primeira, na página 3, definida com o título de capa do documento e a segunda iniciando na página 26 com a frase: “Aqui segue, para maior comodidade daqueles que podem usar este instrumento, as instruções para ajustar os óculos e fazer uma observação, extraída das folhas anteriores”³² (G. Hadley, 1734, p. 26). Ou seja, na primeira parte do texto, o autor comenta mais sobre a ideia do Octante e suas vantagens e, na segunda parte, apresenta maneiras de ajustar as lentes do Octante para uma melhor observação.

Figura 10 - Imagem apresentada na página inicial da Fonte 3 com foco na legenda

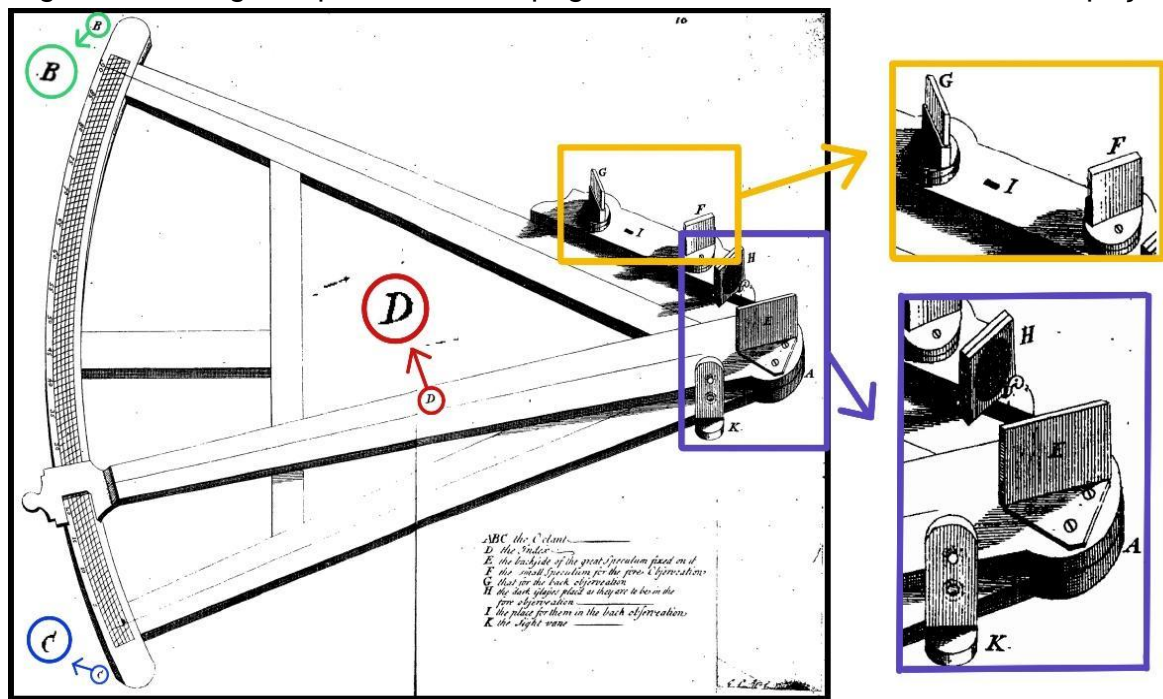


Fonte: Adaptado de G. Hadley (1734, s.p.)

Na Figura 10, exibimos em destaque a legenda presente na mesma, bem como sua transcrição, para melhor entendimento. Nela, o autor, G. Hadley usa letras para identificar as peças presentes no Octante Reflexivo, ilustrado na figura. Na intenção de identificar estas peças, em confronto com a legenda da Figura 10, segue a Figura 11.

³² Here follows, for the more ready convencience of those who may use this instrument, the directions for adjusting the glasses, and taking an observation, extracted from the foregoing sheets.

Figura 11 - Imagem apresentada na página inicial da *Fonte 3* com foco nas peças



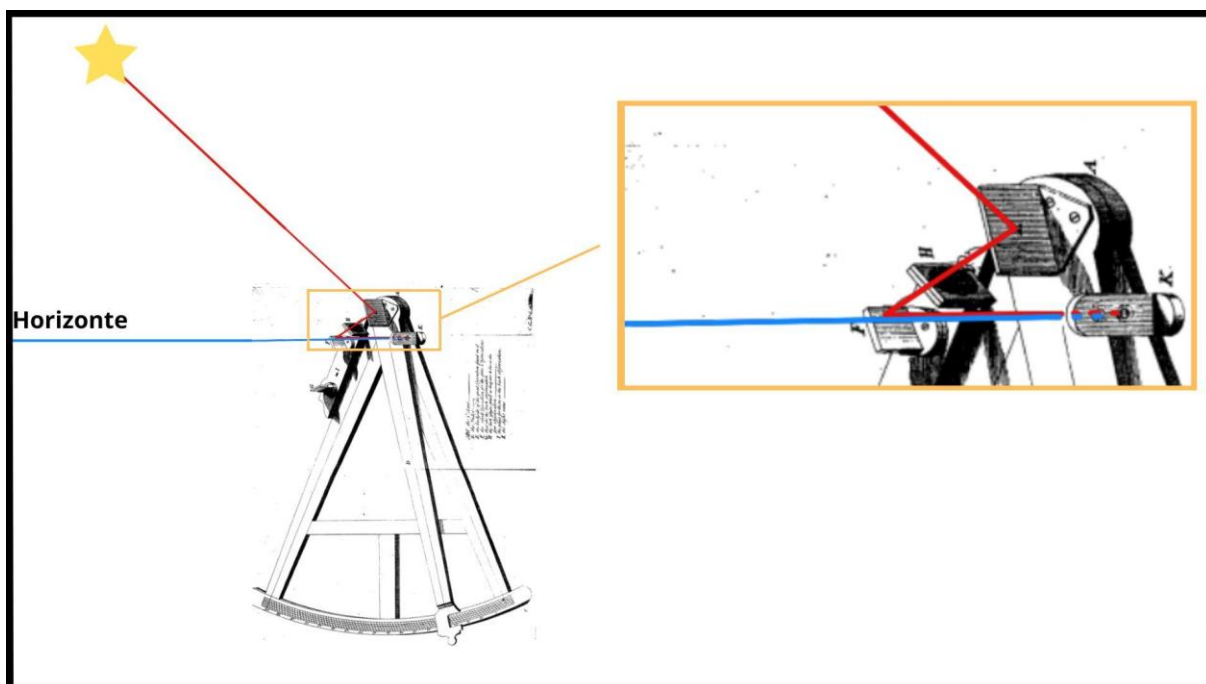
Fonte: Adaptado de G. Hadley (1734)

Na Figura 11, nota-se que os pontos ABC, destacados no retângulo roxo, e nas circunferências verde e azul, nesta ordem, fazem referência a estrutura do Octante Reflexivo, que é utilizada para apoiar as outras peças do instrumento e o ponto D, destacado pela circunferência vermelha, refere-se ao Indicador de quando o ângulo está tomado. Além disso, na Figura supracitada, também foram feitos dois retângulos de cores roxa e amarela.

No retângulo roxo, temos as peças E, K e H. A peça E é o espelho fixo no indicador de ângulos D, que segundo G. Hadley (1734), é perpendicular ao mesmo e recebe a primeira imagem do objeto que se pretende calcular a. A peça K refere-se ao pino visualizador, que possui dois furos para direcionar a colocação do olho, onde um deles é para observar o feixe de luz, vindo de um objeto ou um astro, e o outro é para ser alinhado com o horizonte a frente.

Já a peça H é composta por dois pequenos pedaços de vidro escuros, juntos, essa é utilizada para, quando o astro apresentar feixes de luz muito forte, sejam colocados, entre os espelhos, refletores, a fim de não prejudicar a visão. Já no retângulo amarelo, temos as peças F, G e I. A peça G é utilizada para observações posteriores, enquanto a F é utilizada para observações frontais. O autor não disserta muito a respeito da visualização posterior, dessa forma, trataremos mais da visão frontal, que é dada pela observação do pino observador, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Exemplo/simulação do funcionamento de algumas peças na observação da tomada de ângulos



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Na Figura 12, posicionamos o Octante Reflexivo da maneira orientada pelo autor quando cita: “A maneira de observar é esta: o instrumento sendo segurado o mais próximo possível, no círculo vertical que passa pelo objeto, com o arco voltado para baixo [...]” (G. Hadley, 1734, p. 7). Dessa forma, com o arco voltado para baixo, temos um esquema de como funciona a reflexão dos espelhos para a tomada de ângulos entre o horizonte e um astro no céu. Note que o funcionamento garante a função do instrumento a partir de conhecimentos de natureza matemática e física, por exemplo, ao utilizar o instrumento, trabalhamos com a reflexão de feixes de luz e, esses feixes, formam ângulos que asseguram uma projeção do feixe num ângulo igual ao do refletido, como vemos a seguir. Além disso, utilizamos esse conceito para demonstrar que, por meio desses ângulos, podemos obter a distância angular entre o horizonte e um astro, conforme o objetivo do Octante.

No retângulo amarelo, apresentamos uma visualização ampliada de como funciona a observação no instrumento. O segmento em azul, em um dos orifícios do pino visualizador, referenciado pela letra K, é a representação da vista do observador, onde temos o alinhamento entre este orifício e o horizonte em relação ao nível do mar no qual o mesmo se encontra. Já o segmento em vermelho, parte também do olhar

do observador, mas este agora, originando do segundo orifício do pino visualizador, no qual deve-se mirar no espelho F e nele, estará refletida a imagem do astro, vinda do espelho E.

Não há nenhuma regra, evidenciada nos documentos/fontes, que indique qual das ações deve ser feita primeiro, ou seja, se deve ser mirado o horizonte ou no astro, porém, o autor recomenda que, quando houver mais de um astro próximo do outro, busque-se observar primeiro a reflexão do mesmo, para depois procurar alinhar com o horizonte a frente. Dessa forma, facilitará para o caso de confundir de qual astro está sendo tomada a altitude.

Posicionado o Octante de acordo com as orientações do autor, sobre seu manuseio é possível de modo que seu uso se baseia num processo de dupla reflexão nos espelhos do instrumento. Em seu uso, podemos notar que vários conhecimentos de natureza matemática são mobilizados, juntamente, com outros de outra natureza, como física e geográfica. A fim de explorar esses aspectos, destinaremos a próxima seção desta dissertação.

Finalizando a presente seção ressaltamos que ela exibiu ponderações sobre os documentos estudados (Fontes 1, 2 e 3), que apontam para apresentação da composição do Octante Reflexivo, bem como, explicam seu uso em seu contexto, indicando experimentos realizados para teste, finalidade de uso, entre outros aspectos entorno desse instrumento e sua produção. De cada fonte, evidências foram extraídas de maneira a externar os conhecimentos matemáticos que podem ser mobilizados por meio do Octante Reflexivo.

Neste sentido, *da Fonte 1 evidenciamos* a ideia inicial do instrumento, apresentada por John Hadley, e qual a sua utilidade na navegação, que é encontrar a posição da embarcação em relação ao nível do mar, bem como temos algumas características do Octante sobre posicionamento do mesmo para fazer a tomada de ângulos, e ainda obtemos informações sobre a primeira aparição do nome Octante, como o instrumento é nomeado.

Da Fonte 2, obtemos evidência de uma aplicação prática da utilização do Octante Reflexivo em auto mar, durante uma viagem marítima (narrada e registrada por G. Hadley e que contou com mais participantes além de J. Hadley, entre eles um terceiro irmão H. Hadley), assim como extraímos observações e anotações feitas durante esta prática, a exemplo das anotações feitas nas tabelas e algumas

observações sobre os erros, que devem ser considerados durante a tomada dos ângulos.

Similarmente, *da Fonte 3 encontramos evidências* de uma imagem mais detalhada do Octante Reflexivo e das peças que o compõem, que são o indicador de ângulos, os dois espelhos, o pino visualizador do horizonte, assim como a própria estrutura que sustenta estes elementos, além de uma orientação ainda mais detalhada sobre seu uso e ajuste dos espelhos (dentre essas destacam-se orientações alinhamento para os espelhos, formas de posicioná-los corretamente).

De posse dessas evidências, passamos, na próxima seção, a discutir sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados pelo uso do Octante.

3.3 Conhecimentos matemáticos por trás do uso do Octante Reflexivo

O Octante Reflexivo refere-se a um instrumento utilizado na navegação para calcular latitudes e altitudes, pensado por John Hadley com a contribuição dos irmãos, no ano de 1731. Segundo Santos e Pereira (2021), entre os séculos XVI e XVII, a Europa passou por transformações no que diz respeito a forma de transitar conhecimento. Estudiosos ingleses, com o incentivo da Coroa, fizeram estudos em várias áreas por diversos fatores e, um desses fatores, eram formas de se localizar no mar. Nesta época, houve o desenvolvimento de instrumentos matemáticos produzidos na intenção de se localizar no mar, a exemplo do astrolábio³³, sextante e quadrante³⁴.

Uma das instituições que recebia incentivo da Coroa e era responsável por estas produções na Inglaterra era a *The Royal Society*. Entre 1731 e 1734, foram realizadas produções de artigos sobre o Octante Reflexivo e seu uso, as quais são de autoria do próprio John Hadley e também de seu irmão, George Hadley. O instrumento consiste em um arco de 45° que utiliza da reflexão entre dois espelhos para calcular a distância angular entre o horizonte e um astro.

O nome Octante Reflexivo foi pensado considerando que, por possuir um arco de 45°, ele tem um oitavo de um círculo. Segundo Norie (1828), alguns instrumentos similares ao Octante também seguem a mesma linha de raciocínio em relação ao seu nome, a exemplo do Sextante, que possui um arco de 60°, ou seja, um sexto de um

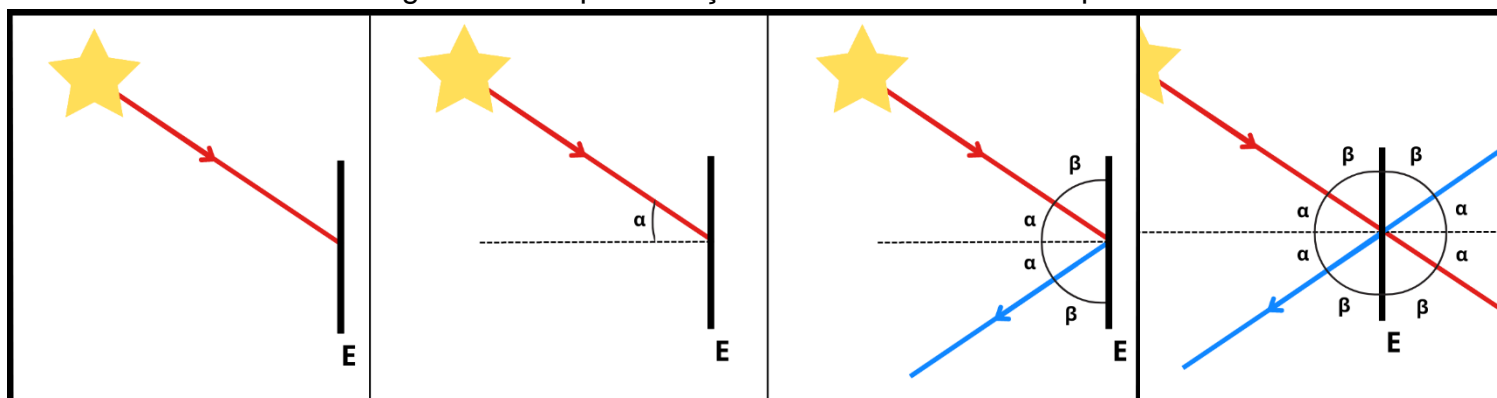
³³ Soriano, Silva e Damasceno (2021) apresentam o astrolábio como um instrumento muito utilizado na Idade Média para determinação de horas, cronometragem do tempo, cálculo de alturas, e entre outros.

³⁴ Segundo Norie (1828), o sextante e o quadrante seguem a mesma proposta do Octante Reflexivo, porém, em vez do seu arco possuir 45°, eles possuem 60° e 90°, respectivamente.

círculo e, o Quadrante, que possui 90° , ou seja, um quarto de um círculo. Além disso, os três instrumentos utilizam o princípio de dupla reflexão, que será explicado a seguir.

Segundo Halliday e Resnick (2010), durante uma reflexão, o feixe incidente³⁵ chega até a uma superfície, e o feixe refletor³⁶ irá *ricochetear*³⁷ nesta superfície, e ser orientado em outra direção, de maneira que forme o mesmo ângulo que o feixe incidente. Buscando esclarecer estes aspectos, montamos o esquema apresentado na Figura 13.

Figura 13 - Representação de uma reflexão no espelho E



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Observando a Figura 13, é possível ver o feixe incidente, representado como uma reta em vermelho que vai em direção ao espelho *E*. Ao encontrar a superfície, foi traçada uma reta perpendicular ao espelho para mostrar o ângulo incidente, formado a partir do contato do feixe incidente com a superfície, intitulado de α . Dessa forma, o feixe é ricocheteado, formando o feixe refletor, representado como a reta azul e, como dito anteriormente, com o ângulo igual ao incidente. Como a linha tracejada está perpendicular a superfície, podemos concluir que os ângulos formados dos feixes até a superfície, intitulados de β , também são iguais. Matematicamente, dizemos que os ângulos α e β são complementares e, também $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, ou seja, 2α e 2β são suplementares.

Deste modo, quanto maior o ângulo α , menor é o ângulo β e quanto maior for β , menor é α , sendo então α e β , ângulos dependentes e complementares. De maneira análoga, acontece também a reflexão no segundo espelho do Octante

³⁵ Feixe incidente é representado por uma reta originada do emissor de luz, no caso do exemplo, um astro.

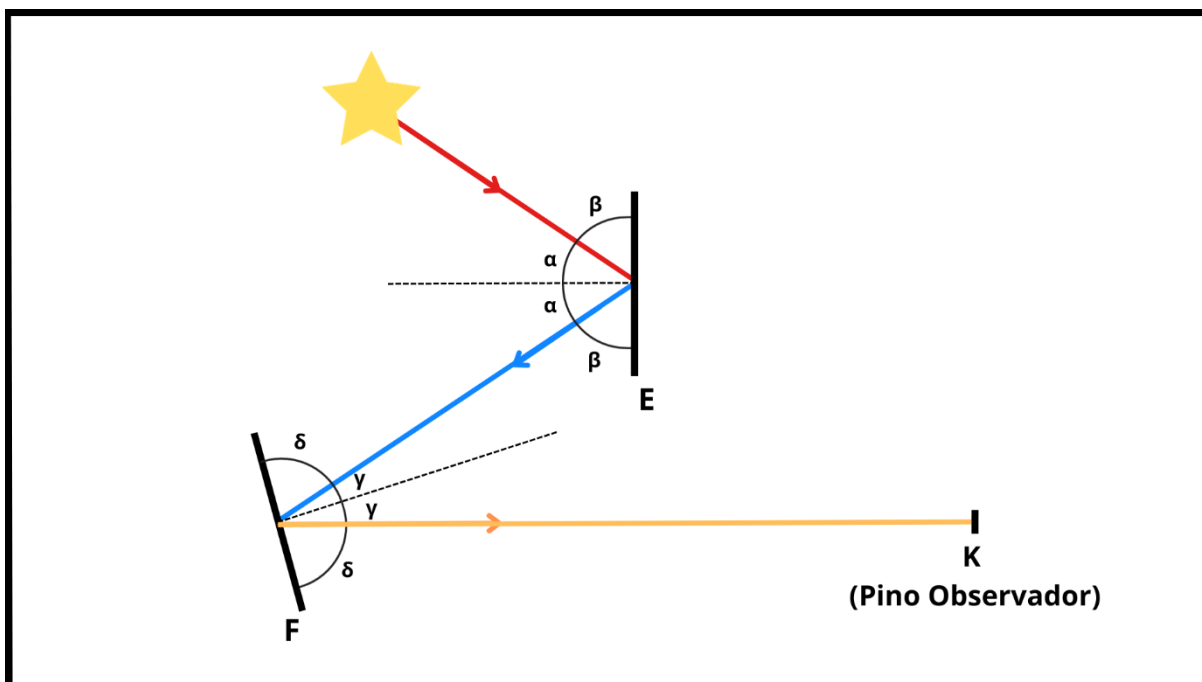
³⁶ Feixe refletor é representado pelo fim da reta do feixe incidente, mostrando que a luz está sendo refletida.

³⁷ Ou seja, quando encontrar a superfície do espelho, o feixe de luz irá ser mandado para outra direção.

Reflexivo, o espelho F , porém, o feixe incidente deste espelho é o feixe refletor, que veio da primeira reflexão no espelho E . Além disso, no final do esquema da Figura 13, também foi feito o prolongamento dos feixes incidentes e refletores, como se passassem o espelho, e, como é apenas uma continuação desses feixes, indo na mesma direção, eles formam exatamente os mesmos ângulos de incidência e de reflexão. Então, como pode-se notar, o segmento que representa o espelho funciona como uma bissetriz, partindo o ângulo em dois iguais (β e β).

Depois do feixe de luz atingir o primeiro espelho, ele será direcionado para o segundo espelho, para, por fim, chegar ao olhar do Observador. Na Figura 14, temos um esquema que explica esta relação entre os feixes incidentes e refletores de cada espelho em relação ao astro.

Figura 14 - Relação entre os eixos incidentes e refletores nos espelhos E e F



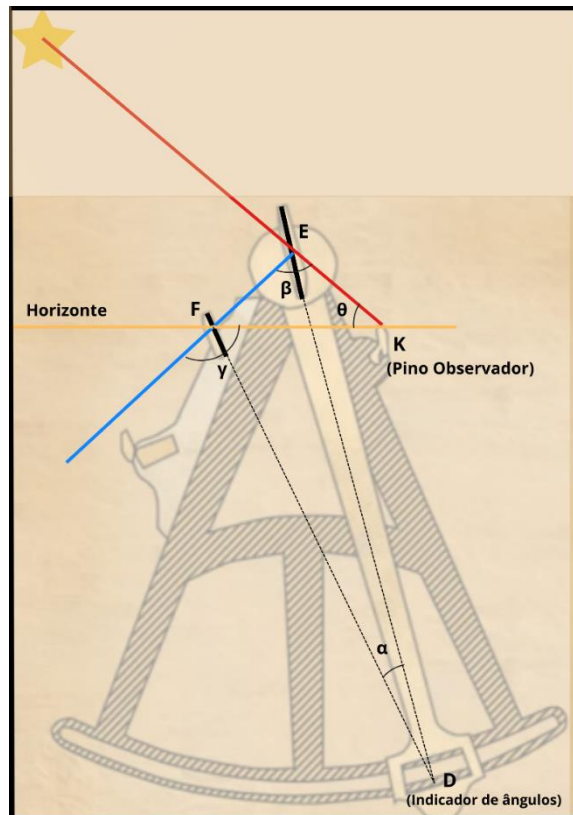
Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Na Figura 14, é possível perceber que o feixe de luz, em azul, que representa o feixe refletor passando pelo espelho E , é o feixe incidente do espelho F . Dessa forma, ao encontrar o espelho F , este feixe em azul é ricocheteado, formando a reta amarela que representa o feixe refletor. Como posto anteriormente, estes feixes formam a mesma angulação em relação a linha tracejada que é perpendicular ao espelho, ou seja, $\gamma + \delta = 90^\circ$, sendo complementares também.

Assim, funciona com os espelhos do Octante Reflexivo. Agora, iremos trabalhar com a ideia destes espelhos fixados ao Octante, como mostra a Figura 15. Montamos

o mesmo esquema de reflexão de espelhos, porém, com a imagem do Octante com a transparência aumentada para melhor visualização e intitulando os ângulos de maneira diferente, agora, também considerando os ângulos formados pelos indicadores de ângulos e os prolongamentos dos feixes de luz.

Figura 15 - A reflexão nos espelhos do Octante Reflexivo



Fonte: Adaptado de Naughton (2015)

Usando o molde do Octante, posicionamos os espelhos de maneira que ficasse condizente com o esquema anterior sobre a reflexão do feixe de luz. Agora, nesta imagem, evidenciamos dois triângulos importantes, o EKF e o EDF. Além deles, também temos o ângulo θ , formado pelo vértice K, que é a representação da distância angular entre o horizonte e o astro no qual está sendo observado, o ângulo γ , formado entre o prolongamento do feixe no espelho F e a visão do observador com o horizonte, e, por fim, o ângulo α , formado pelo prolongamento dos segmentos de reta entre os dois espelhos, que, também é o ângulo representado na posição em que se encontra o indicador de ângulos do Octante.

Considerando o triângulo EFK e o feixe incidente (em azul) juntamente com seu prolongamento, temos um ângulo de 90° , visto que o prolongamento não muda de direção, então temos que o ângulo formado pelo vértice F é igual a $180^\circ - \gamma$. Assim

sendo, sabendo que, na Geometria Euclidiana, a soma de todos os Ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , podemos dizer que:

$$180^\circ = \beta + \theta + (180^\circ - \gamma)$$

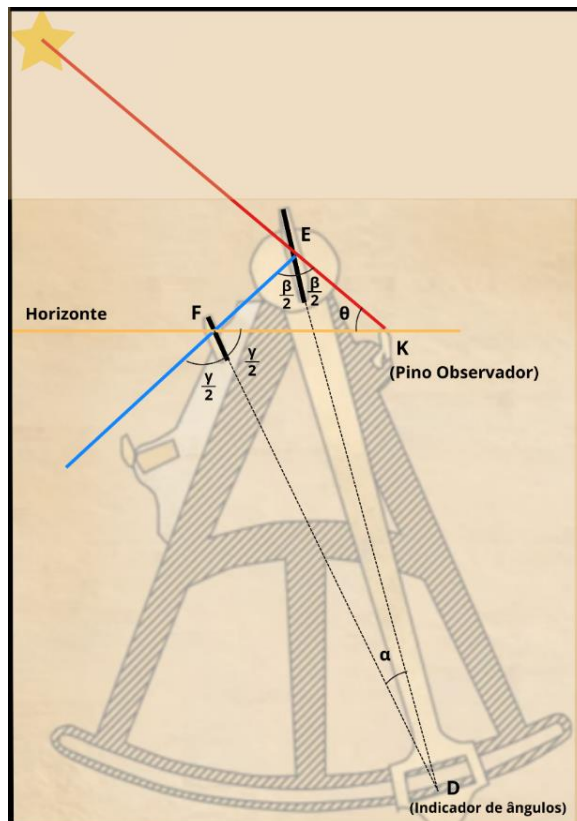
$$180^\circ = \beta + \theta + 180^\circ - \gamma$$

$$0 = \beta + \theta - \gamma$$

$$\gamma = \beta + \theta$$

Portanto, temos que o ângulo formado entre o prolongamento do feixe no espelho F e a visão do observador com o horizonte é igual à soma do ângulo β e o ângulo θ . Vale lembrar, do esquema representado na Figura 15, que o segmento de reta que representa o espelho, tanto o E como o F , funcionam como uma bissetriz, partindo os ângulos β e γ ao meio, como evidenciaremos a seguir na Figura 16.

Figura 16 - A dupla reflexão no Octante Reflexivo



Fonte: Adaptado de Naughton (2015)

Logo, considerando agora que os ângulos β e γ foram divididas em duas partes iguais, temos que, pelo triângulo FDE:

$$180^\circ = \alpha + \frac{\gamma}{2} + (180^\circ - \gamma) + \frac{\beta}{2}$$

$$180^\circ = \alpha + \frac{\gamma}{2} + 180^\circ - \gamma + \frac{\beta}{2}$$

$$0 = \alpha + \frac{\gamma}{2} - \gamma + \frac{\beta}{2}$$

$$0 = \alpha - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$-\alpha = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma - \beta}{2}$$

$$2\alpha = \gamma - \beta$$

A partir do esquema da Figura 16, entendemos que $\gamma = \beta + \theta$. Então, ao fazermos essa substituição de γ , concluímos que:

$$2\alpha = \gamma - \beta$$

$$2\alpha = (\beta + \theta) - \beta$$

$$2\alpha = \beta + \theta - \beta$$

$$2\alpha = \theta$$

Ou seja, nesta verificação/demonstração, entendemos que a distância angular entre o horizonte e a estrela, representada pelo ângulo θ , é igual ao dobro do ângulo tomado pelo Octante Reflexivo. Dessa forma, concluímos também que, quando algumas das referências chamam o Octante Reflexivo de Quadrante de Hadley, é porque, como o instrumento possui um arco de 45° , a distância angular pode alcançar até o seu dobro, ou seja, 90° , isto é, um quarto de um círculo (quadrante).

Para esta verificação/demonstração, utilizamos alguns conceitos da Geometria Euclidiana, a exemplo de triângulos, soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulos complementares e suplementares, conceito de bissetriz, retas e segmentos de retas, e entre outros. A proposta para o Produto Educacional é trabalhar esses conceitos na verificação/demonstração desta dupla reflexão, mobilizando os conhecimentos de natureza matemática, focados na geometria.

Para isto, iremos fazer uma retomada na História da Matemática para entender as características deste instrumento e as motivações dos irmãos Hadley em relação ao uso do Octante na época e, por meio de recursos das Tecnologias Digitais, mais especificamente o *software* GeoGebra, os alunos irão fazer a construção geométrica

afim de entender como funciona a dupla reflexão no Octante Reflexivo e como são mobilizados os conhecimentos de natureza matemática nele (por meio de sua versão digital, simulador). Desse modo, no próximo capítulo, apresentamos o Produto Educacional, sua aplicação e validação à luz da fundamentação deste estudo dissertativo.

4 UTILIZANDO O OCTANTE REFLEXIVO PARA UM ESTUDO DE CONHECIMENTOS DE NATUREZA GEOMÉTRICA POR MEIO DAS ATIVIDADES-HISTÓRICAS-COM-TECNOLOGIA: APRESENTAÇÃO, PROCESSO DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O presente capítulo objetiva fazer uma apresentação do Produto Educacional (PE) (Apêndice A) advindo da presente pesquisa, mostrando o que é, como foi constituído, seu processo de aplicação, bem como reflexões e resultados oriundos dela. Para isto, ele encontra-se dividido em duas subseções: 4.1 Percurso de desenvolvimento e apresentação do Produto Educacional gerado pelo estudo histórico-matemático; e a 4.2 Aplicação, refinamento e validação do produto.

4.1 Percurso de desenvolvimento e apresentação do Produto Educacional gerado pelo estudo histórico-matemático

O PE é caracterizado como um caderno de atividades estruturado em uma sequência didática³⁸, mais especificamente como um caderno de atividades, respaldado na aliança entre História da Matemática (HM) e Tecnologias Digitais (TD) via Instrumentos Matemáticos, a partir do que foi feito no capítulo 2 desta pesquisa. Além disso, para a produção do PE (Apêndice A), foi realizada uma pesquisa bibliográfica, detalhada no capítulo 3 da presente dissertação, na qual foi realizado um levantamento de dados em torno do instrumento Octante Reflexivo³⁹. Um dos critérios de seleção do Octante está respaldado pelo embasamento da pesquisa em Instrumentos Matemáticos, assim como, a escolha pelo tipo de PE está ancorada na fundamentação da aliança entre HM e TD, que preconiza o cunho educacional por meio de sequências didáticas.

Em seguida, a pesquisa bibliográfica nos levou a três documentos escritos pelos irmãos Hadley, entre os séculos XVII e XVIII, sobre o Octante Reflexivo e o seu uso. De posse desses documentos, iniciamos uma pesquisa documental, cujos detalhes foram apresentados na subseção 3.1 dessa dissertação. Realizado o estudo documental em torno dos materiais encontrados, partimos para a procura de conhecimentos matemáticos mobilizados pelo Octante para o ensino de geometria na

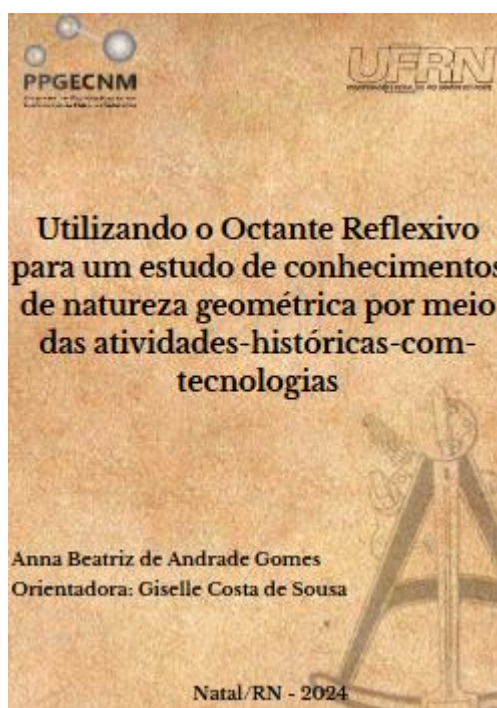
³⁸ Como dito anteriormente, Zabala (1998) aponta que uma sequência didática consiste em um conjunto de atividades ordenadas no intuito de realizar objetivos educacionais.

³⁹ Instrumento utilizado na navegação para tomar distâncias angulares entre o horizonte e um astro e/ou entre dois astros, detalhado no capítulo 3 do presente trabalho.

formação de professores, que pudessem ser incorporados ao PE. Assim, realizando uma aliança entre HM e TD via Instrumentos Matemáticos, estruturamos a sequência didática em um caderno de atividades-históricas-com-tecnologias, conforme preconiza a aliança.

Dessa forma, o PE versa em um caderno de atividades, intitulado *Utilizando o Octante Reflexivo para um estudo de conhecimentos de natureza geométrica por meio das atividades-históricas-com-tecnologias*, como mostra a Figura 17. Estruturalmente, o caderno de atividades possui 62 páginas e é composto de três atividades.

Figura 17 - Capa inicial do caderno de atividades

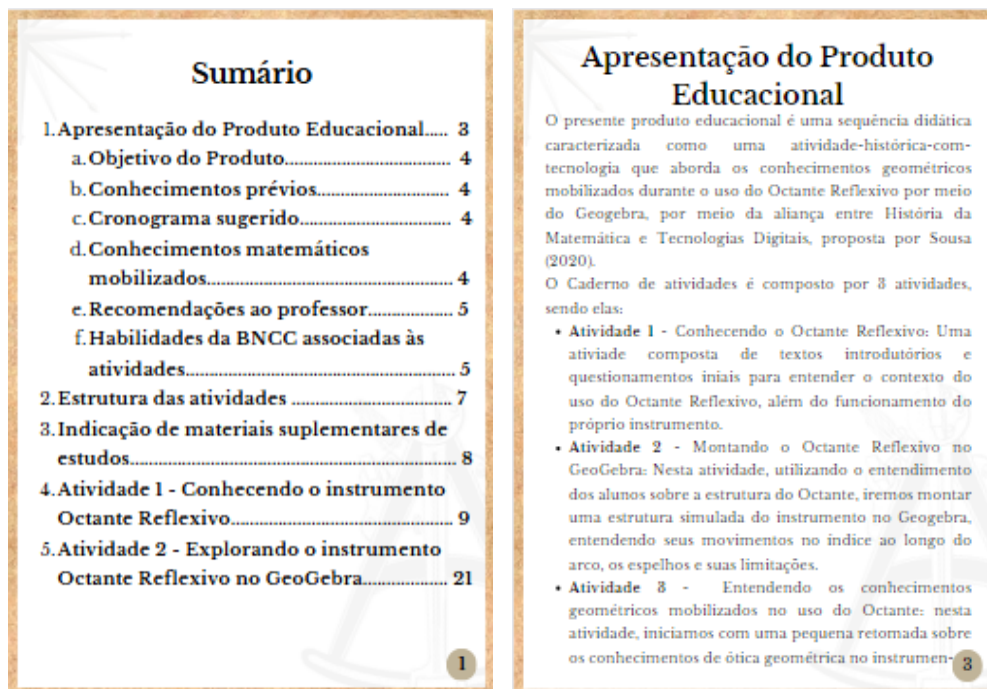


Fonte: Elaborado pela autora (2024).

De acordo com Sousa e Gomes (2020), as atividades-históricas-com-tecnologias consistem num conjunto de tarefas/atividades no qual problemas/temas/tópicos da História da Matemática são explorados/investigados com apoio de tecnologias digitais. Além disso, possuem uma estrutura recomendada, com elementos pré-textuais (capa, sumário e apresentação), informações básicas (título, objetivos, conhecimentos prévios, cronograma, recursos e recomendação ao professor), desenvolvimento da atividade (textos exploratórios, perguntas reflexivas e recortes históricos) e avaliação (instrumentos de avaliação de modo geral). Vale salientar que as autoras ainda deixam claro que essa é uma estrutura sugerida, podendo sofrer alterações de acordo com as necessidades de cada professor.

Baseando-se na sugestão de Sousa e Gomes (2020), foi montada a estrutura do Produto Educacional fruto desta dissertação. Como elementos pré-textuais do PE temos: a capa, sumário e a apresentação da atividade. Na Figura 17 pode-se ver a capa e a Figura 18 mostra parte do sumário e da apresentação, como segue.

Figura 18 - Sumário e apresentação do Produto Educacional



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

O Sumário dá um panorama geral do nosso PE, cujos elementos detalharemos no decorrer desta seção. A apresentação é constituída de uma exposição geral da proposta, incluindo uma síntese sobre cada uma das atividades, objetivos, cronograma previsto para a aplicação, conhecimentos de natureza matemáticos trabalhados, recomendações ao professor/usuário e habilidades consoantes a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a serem desenvolvidas, juntamente com os códigos correspondentes.

Ademais, na apresentação do PE, também temos comentários sobre a estrutura de cada atividade, esclarecendo como estão divididas. Além disso, trazemos a indicação de materiais suplementares sobre a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, sobre instrumentos matemáticos em sala de aula e ainda sobre o Octante Reflexivo e os irmãos Hadley. Outro ponto relevante é que, além da apresentação o Produto, em cada atividade também há uma apresentação desta. Consideramos que a indicação de materiais é importante para caso o

professor/usuário queira se aprofundar mais nas áreas que respaldaram a pesquisa ou até mesmo propor outros tipos de atividades, assim como, tenha orientações suplementares para aplicação.

Como dito anteriormente, o PE é um caderno de atividade que possui uma sequência didática estruturada a partir da reunião de três atividades-históricas-com-tecnologias, sendo elas assim nomeadas:

- *Atividade 1 – Conhecendo o Octante Reflexivo;*
- *Atividade 2 – Montando o Octante Reflexivo no GeoGebra;*
- *Atividade 3 – Entendendo conhecimentos geométricos mobilizados no uso do instrumento Octante.*

Seguindo a fundamentação da aliança para atividades-históricas-com-tecnologias, cada atividade possui elementos pré-textuais e, informações básicas como: título; objetivos; conhecimentos prévios; cronograma; recursos e recomendação ao professor/usuário.

Ainda tomando como referência a fundamentação da aliança, após elementos pré-textuais e informações básicas, as atividades-históricas-com-tecnologias trazem seu desenvolvimento o qual pode conter: textos exploratórios, perguntas reflexivas e recortes históricos. Neste sentido, cada uma das atividades do PE encontra-se dividida nas subseções *vamos explorar* e *vamos investigar*.

A primeira parte de cada atividade, que se chama *vamos explorar*, é destinada para o aluno/usuário ter uma introdução do que será tratado na atividade, já a segunda, *vamos investigar*, tem a intenção de fazer o aluno/usuário, a partir do que foi explorado anteriormente, investigar conceitos e resoluções, a fim de buscar o entendimento do conteúdo trabalhado. É importante salientar que, nas duas subseções, presentes nas três atividades, temos tarefas para serem realizadas pelos alunos/usuários com perguntas reflexivas, recortes históricos e uso de tecnologias.

Assim, na Atividade 1, *Conhecendo o Octante Reflexivo*, a subseção *vamos explorar* é composta por um texto introdutório sobre a prática da matemática na Inglaterra e a influência da *The Royal Society* na divulgação e produção de pesquisas durante os séculos XVII e XVIII, contexto em que o Octante foi concebido e utilizado. Depois, na subseção *vamos investigar*, também há um texto, porém, mais voltado para o primeiro contato dos alunos/usuários com o Octante reflexivo. Nesta subseção, os alunos/usuários irão investigar a maneira que são tomadas as observações com o

Octante, bem como, conhecerão os elementos estruturantes que formam o instrumento. Partes de ambas as seções supracitadas, podem ser visualizadas na Figura 19 adiante.

A produção do conteúdo da Atividade 1 foi feita com base na pesquisa bibliográfica e documental em relação ao contexto histórico da elaboração do Octante, considerando que, nesse estágio da pesquisa, foram coletadas informações tanto acerca do instrumento quanto ao período histórico em que foi desenvolvido.

Figura 19 - Seção *Vamos Explorar* e *Vamos Investigar* da Atividade 1

Vamos explorar

Conhecimento matemático na Inglaterra entre os séculos XVII e XVIII

A Inglaterra entre os séculos XVI e XVII, desenvolveu estudos em diversas áreas do conhecimento de maneira massiva, na intenção de fortificar a navegação e a artilharia (Santos, 2021). Isso resultou no desenvolvimento de várias pesquisas voltadas para a Matemática Prática.

Uma das organizações da época, responsável pela produção do conhecimento científico, foi a The Royal Society, uma instituição criada a partir da autorização dada pelo Rei Carlos II, rei da Inglaterra, Escócia e Islândia de 1660 até 1685.

Figura 1: Royal Society, Crane Court, perto de Fleet Street, London: o encontro



Fonte: Wellcome Collection gallery (1883)

A The Royal Society tinha como lema “*Nullius in Verba*”, expressão que significa “Nas palavras de ninguém”. A sociedade tinha como membros nomes como: Robert Moray (1609-1673), John Wilkins (1614-1672), Isaac Newton (1643-1727), John Hadley (1682-1744), entre outros.

10

Vamos Investigar

O que é um Octante Reflexivo?

Octante Reflexivo é um instrumento marítimo utilizado na navegação para calcular a altitude entre um astro e o nível do mar ou entre dois astros, permitindo medir ângulos de até 90°. O Octante possui um arco com comprimento igual a metade de um quadrante. É produzido a partir de um material feito de latão e possui dois espelhos fixados, que permitem tomar a altitude por meio de uma dupla reflexão.

Figura 8: O instrumento Octante Reflexivo



Fonte: Associação Nacional de Cruzeiros

Para entender melhor o funcionamento do Octante, veja o seguinte vídeo. Nele, Dadi Burch, diretor da Starpath School of Navigation em Seattle, mostra com mais detalhes a estrutura do Octante Reflexivo e como posicioná-lo para tomar os ângulos. Para acessar, é só clicar no ícone de vídeo ao lado.

Em 1731, John Hadley (1682-1744) publicou trabalhos, juntamente com seus irmãos George Hadley (1685-1798) e Henry Hadley (1697-1771), sobre as propriedades mobilizadas no uso Octante Reflexivo. Thomas Godfrey (1704-1749) também desenvolveu, na Filadélfia, um instrumento muito parecido com o Octante, quase na mesma época que o John Hadley, entretanto, Godfrey vendeu a patente para a The

13

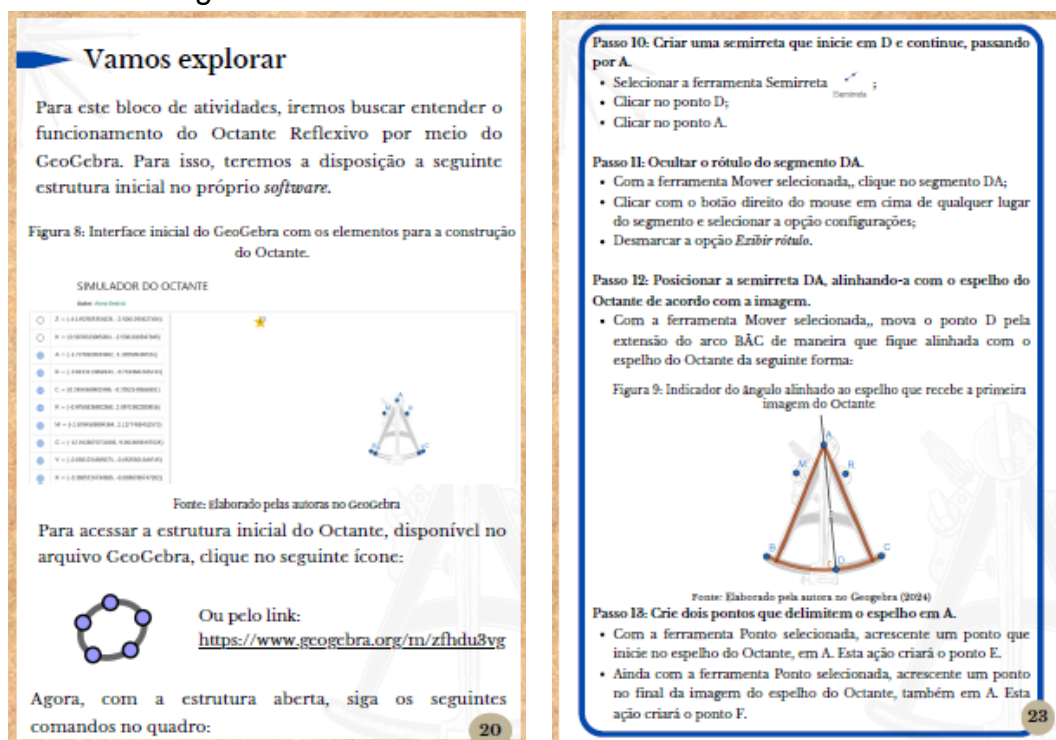
Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Na Figura 19 é possível notar que a Atividade 1 é conduzida para compreensão e entendimento sobre época em que o instrumento foi desenvolvido e introduzir detalhes do mesmo. Ainda na atividade 1, já começamos a perceber também, como apresenta na página 3 do caderno de atividades (mostrado na Figura 19), o uso de Tecnologias para apoiar a História da Matemática, fazendo o uso de um vídeo que auxilia os participantes a entender como, por exemplo, se posicionava o instrumento para realizar a tomada de ângulos.

Já na Atividade 2, *Montando o Octante Reflexivo no GeoGebra*, os alunos/usuários terão acesso a uma estrutura prévia que represente o Octante no

GeoGebra. Depois disso, seguirão os passos para montar uma espécie de Octante virtual (simulador⁴⁰). Partes desta seção são mostradas na Figura 20.

Figura 20 - Parte do texto e tarefas da Atividade 2



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

Para a produção desta atividade, foram utilizados dados levantados na pesquisa documental a partir de trabalhos produzidos pelos irmãos Hadley, a exemplo do posicionamento dos elementos estruturais, bem como os conhecimentos de natureza matemática, especificamente geométrica, para o desenvolvimento dos passos e construção do simulador do Octante.

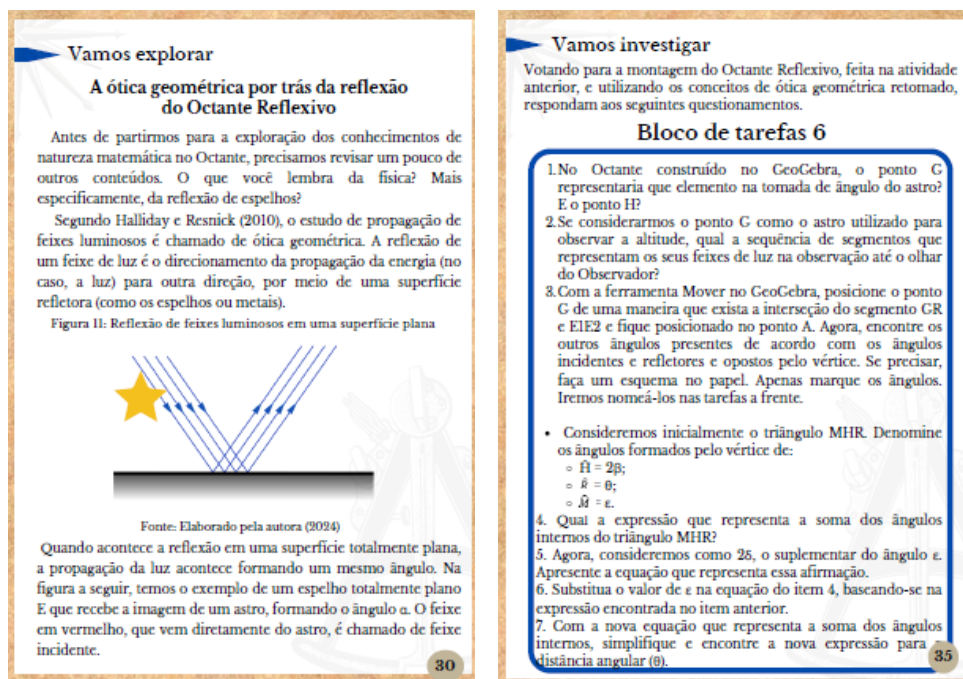
Na página 23 do caderno de atividades, mostrada na Figura 20, é possível perceber que, no passo 10, é solicitado que os alunos/usuários criem uma semirreta e, no passo 13, que criem dois pontos para delimitar o espelho do Octante. Tais ações se relacionam diretamente com a mobilização dos conhecimentos de natureza matemática, visto que, eles estarão fazendo o uso de elementos da natureza geométrica (como ponto, reta, semirreta, bissetrizes, retas perpendiculares, entre outros) e, nas atividades mais à frente, farão a relação com as propriedades e a tomada de ângulos realizada pelo instrumento.

⁴⁰ Como já mencionado Clark, Nelson, Sengupta e D'Angelo (2009, p.4, tradução nossa) consideram que “simuladores digitais são modelos computacionais de situações reais ou hipotéticas de fenômenos que permitem os usuários explorar as implicações da manipulação ou modificação os parâmetros”.

Na Atividade 3, *Entendendo conhecimentos geométricos mobilizados no uso do Octante*, o aluno/usuário poderá explorar um pouco da ótica geométrica⁴¹, que utiliza de conhecimentos de natureza matemáticos para o funcionamento da reflexão dos feixes, vindos do astro, entre os espelhos do Octante. A partir disso, utilizando a atividade exploratória e a estrutura do Octante no GeoGebra, os alunos irão investigar como é possível encontrar a distância angular entre um ponto no horizonte e um astro, por meio da dupla reflexão do Octante⁴².

Na produção desta atividade, foram utilizados também os resultados de dados realizados durante a pesquisa bibliográfica e documental, porém, organizados de uma forma a extrair os conceitos de natureza geométrica do Octante. Nas tarefas, como mostra a Figura 21, os alunos irão manipular as equações referentes à soma dos ângulos internos dos triângulos, identificáveis na manipulação do simulador do Octante no GeoGebra e, com isso, concluir a dupla reflexão que ocorre entre os espelhos, que permite chegar à distância angular⁴³.

Figura 21 - Seção Vamos Explorar e Vamos Investigar da Atividade 3



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

⁴¹ Segundo Halliday e Resnick (2010), a ótica geométrica é a uma área da física que estuda as propriedades das ondas luminosas a partir de aproximações angulares.

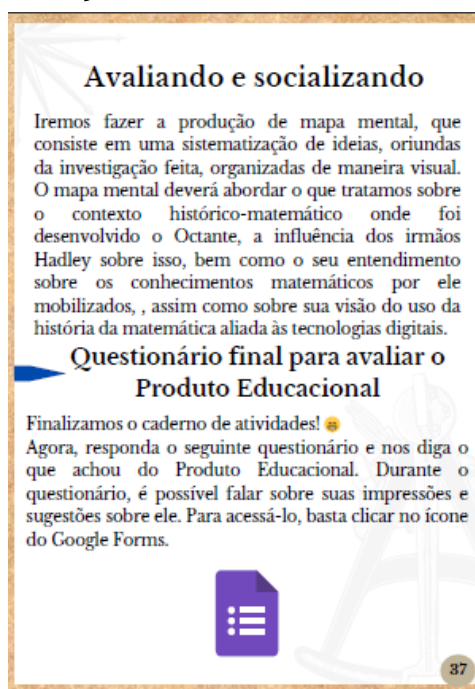
⁴² A dupla reflexão acontece devido os dois espelhos posicionados no Octante para o direcionamento dos raios luminosos.

⁴³ Distância entre dois corpos tomada a partir da unidade de medida de ângulos.

Como visto na Figura 21, na seção Vamos Explorar, foram abordados conceitos da ótica geométrica, como a reflexão de feixes de luz e formação de ângulos dos feixes incidentes e refletores⁴⁴. Além disso, também, buscou-se fazer uma relação desses conceitos citados com a ideia da aplicação desses ângulos durante a utilização do instrumento e o posicionamento dos espelhos. Isso foi parte do resultado da relação feita entre os dados levantados nas pesquisas bibliográficas e documentais.

Continuando a seguir a estrutura das atividades-históricas-com-tecnologias, da aliança entre HM e TD, após desenvolvimento das três atividades, temos a *avaliação*, que pode ocorrer por meio de vários recursos. Assim sendo, em nosso PE, depois das três atividades, temos ainda a seção intitulada *avaliando e socializando*, como mostra a Figura 22, que tem o objetivo de fazer com que os alunos/usuários reflitam sobre a atividade que eles participaram e exponham o que eles puderam aprender. Para tanto, escolhemos o recurso de criação de um mapa mental, instrumento avaliativo na página 37 do apêndice A, juntamente com um questionário, outro instrumento avaliativo também na página 37 do apêndice A, no intuito também de validar e refinar o Produto Educacional.

Figura 22 - Seção *Avaliando e Socializando* do PE



Fonte: Elaborado pela autora (2024).

⁴⁴ Segundo Halliday e Resnick (2010) a reflexão de feixes de luz acontece quando estes feixes entram em contato com uma superfície refletora, como um espelho, e os mesmos formam ângulos sendo eles o ângulo incidente formado quando a luz toca o espelho e o ângulo refletor é formado a partir do **ricochete** do incidente com a superfície.

Na Figura 22, temos a página 37, que contém instruções também para um questionário (Apêndice B) destinado aos participantes para que avaliem o PE. Nessa avaliação, os alunos vão explorar, além do conteúdo de natureza matemática, mobilizado na construção do Octante Reflexivo, também todo o contexto do seu desenvolvimento e como a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, juntamente com o uso de Instrumentos Matemáticos, aparece no caderno de atividades.

O questionário tenta explorar um pouco mais sobre conhecimento relativo à aliança entre HM e TD e o uso de instrumentos matemáticos, de forma a fazer o participante pensar em como esses pontos foram abordados no decorrer da aplicação do PE, buscando avaliar o proveito da experiência para o ensino da matemática por parte dos participantes. Além disso, esse instrumento funciona como um parâmetro para o refinamento do Produto. Nele, também há espaços para que os participantes deem sugestões, tanto do ponto de vista dos professores em formação quanto como um usuário que fez uso do caderno de atividades.

Logo depois, temos no PE as *expectativas de respostas* para as tarefas presentes no caderno de atividades, de modo a nortear o professor/usuário que fizer uso do material. Por fim, ainda trazemos as *referências*. Posto isso, agora, partiremos para um relato sobre como procedeu a aplicação do Produto Educacional, além de reflexões e dados coletados, oriundos deste processo, que compuseram formas para refinamento e validação do PE, realizados por meio das respostas ao questionário final (Apêndice B), registros dos alunos/usuários no caderno, diário de campo e recursos de áudio e vídeo no momento da aplicação/experimento.

4.2 Aplicação, refinamento e validação do produto

A aplicação do Produto Educacional foi realizada em uma turma do componente curricular Didática da Matemática II (MAT1522), presente na estrutura curricular (2015) do curso de Licenciatura em Matemática em Natal da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, oferecida pelo departamento de matemática no semestre 2024.1. É uma disciplina obrigatória ofertada no quinto período do curso regular, porém, também é possível ter alunos que não se enquadrem neste quesito, podendo cursar antes ou depois do quinto semestre, desde que tenham cumprido a disciplina que é pré-requisito, Didática da Matemática I (MAT1516).

No semestre de 2024.1, a disciplina foi ministrada pela Professora Doutora Giselle Costa de Sousa (orientadora deste trabalho) e a pesquisadora dessa dissertação⁴⁵. A turma continha 20 alunos matriculados. Os encontros presenciais aconteceram na segunda e quarta, no horário da tarde (24T34), mais precisamente entre 14:50 até 16:30, configurando 2 horas/aula em cada dia e 4 horas/aula na semana, cada aula com 50 minutos.

A escolha da turma/disciplina/público se deu devido à atuação como estagiária à docência da pesquisadora mestranda, que coincidiu com o público objetivado para a aplicação do PE, isto porque este produto é voltado para formação de professores, neste caso inicial. Além disso, a seleção ocorreu tendo em vista ainda que a ementa da disciplina traz indicação de aplicações das tendências da educação matemática (entre elas História da Matemática e Tecnologias Digitais), abordagem de didáticas dos campos da matemática (dentre elas a didática no ensino da geometria) e a prática dos professores voltada para sala de aula, o que condiz com objetivos da pesquisa e do PE, que se respalda na aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais no ensino de conhecimentos geométricos por meio do instrumento Octante Reflexivo.

O período de aplicação foi entre 15 e 22 de março de 2024, totalizando três encontros com duas horas aulas (que consistem em 100 minutos), no Laboratório de Estatística e Matemática (ESTMAT), mostrado na Figura 23, localizado no bloco D do Setor de aulas III, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. O laboratório conta com 24 computadores com acesso à internet. Ressaltamos que, antes dos encontros, a pesquisadora foi ao local e se informou quanto as condições do laboratório, tanto em relação aos computadores para os participantes quanto aos recursos e *softwares* disponíveis e instalados (incluindo o GeoGebra), bem como, com relação ao funcionamento do projetor de imagem/vídeo que seria utilizado.

⁴⁵ Mestranda atuando no estágio à docência no referido componente curricular.

Figura 23 - Laboratório ESTMAT



Fonte: Acervo da autora (2024).

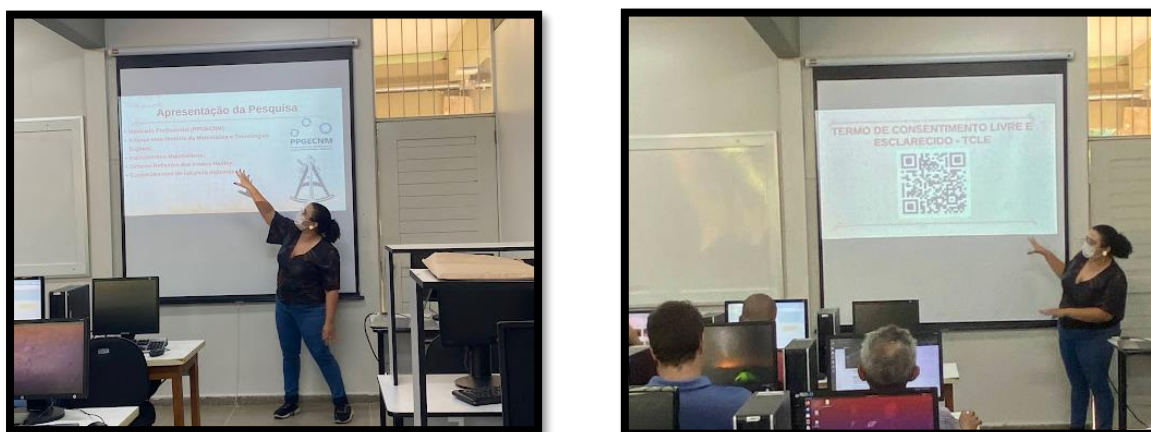
No primeiro dia de aplicação, dia 15 de março de 2024, compareceram 14 participantes. Inicialmente, foi apresentado o título da pesquisa, bem como foi feita uma exposição sobre sua fundamentação, objetivos e sobre em que consistia o Produto Educacional, como mostra na Figura 24. Em seguida, foram esclarecidos os procedimentos éticos da pesquisa e sua aplicação. Para tanto, em conjunto, fizemos (pesquisadora e licenciandos) uma leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)⁴⁶ e o Termo de Autorização de Voz e Imagem (ver Apêndices C e D).

Após a leitura de cada um dos termos, foi destinado um tempo para os participantes decidirem se gostariam ou não de participar da pesquisa e autorizar o uso de sua voz/imagem e assinarem os termos. Enfatizamos que estes documentos, juntamente com os processos éticos de realização da pesquisa, contam na aprovação e parecer do Comitê de Ética e Pesquisa – CEP da UFRN com CAAE (Certificado de Apresentação de Apreciação Ética) de número 75851423.2.0000.5537 (Anexo A).

⁴⁶ O TCLE é um documento explicativo aos participantes de uma pesquisa sua aplicação e como os mesmos poderão contribuir com os resultados, bem como os riscos, as medidas tomadas para diminuir estes riscos e os seus benefícios.

Vale ressaltar que, nestes termos, o sigilo é garantido aos participantes, por isso, nos registros que usamos como dados, não há identificação dos mesmos, de modo que nas imagens, os rostos não são mostrados e em registros escritos, como em resposta de caderno ou questionário, usamos códigos para se referir aos participantes, por exemplo, Participante 1, Participante 2, Participante 3, e assim sucessivamente, dependendo do número de participantes citados no decorrer do capítulo.

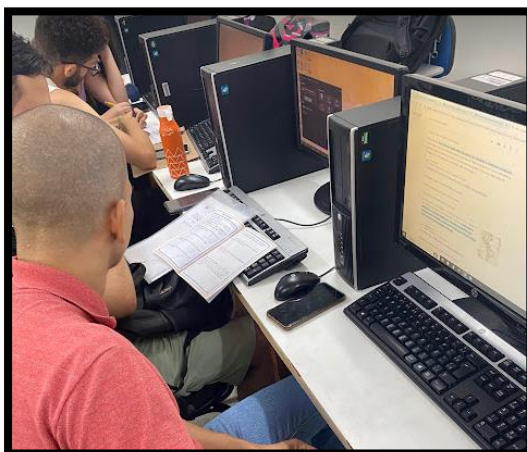
Figura 24 - Apresentação da pesquisa e do TCLE



Fonte: Acervo da autora (2024).

Após os participantes assinarem os termos, que foram disponibilizados e assinados via *Google Forms*, partimos para a aplicação da primeira atividade-histórica-com-tecnologia, intitulada de Atividade 1: Conhecendo o Octante Reflexivo. Para ter uma maior dinamicidade, a turma foi separada em duplas. Como apresentado na seção anterior, as atividades são divididas em duas partes: *Vamos Explorar* e *Vamos Investigar*. No primeiro dia de aplicação, por causa do tempo de finalização da aula e procedimentos éticos iniciais da pesquisa, apenas foi realizada a seção *Vamos Explorar da Atividade 1*, como mostra na Figura 25.

Figura 25 - Participantes realizando a seção *Vamos Explorar* da Atividade 1



Fonte: Acervo da autora (2024).

No momento do registro da Figura 25, é possível ver alguns dos participantes fazendo pesquisas para realizar a atividade do bloco de tarefas 1, que consiste em entender um pouco mais do contexto de desenvolvimento do Octante, fazendo com que eles realizem investigações a respeito da época, a partir de perguntas exploratórias. Estas, por sua vez, direcionamos alunos a conhecer/relembrar um pouco sobre estudiosos que contribuíram para a produção/divulgação de conhecimento matemático no século XVIII, assim como pesquisas sobre a *The Royal Society* e sua relação com o desenvolvimento do *Octante Reflexivo*.

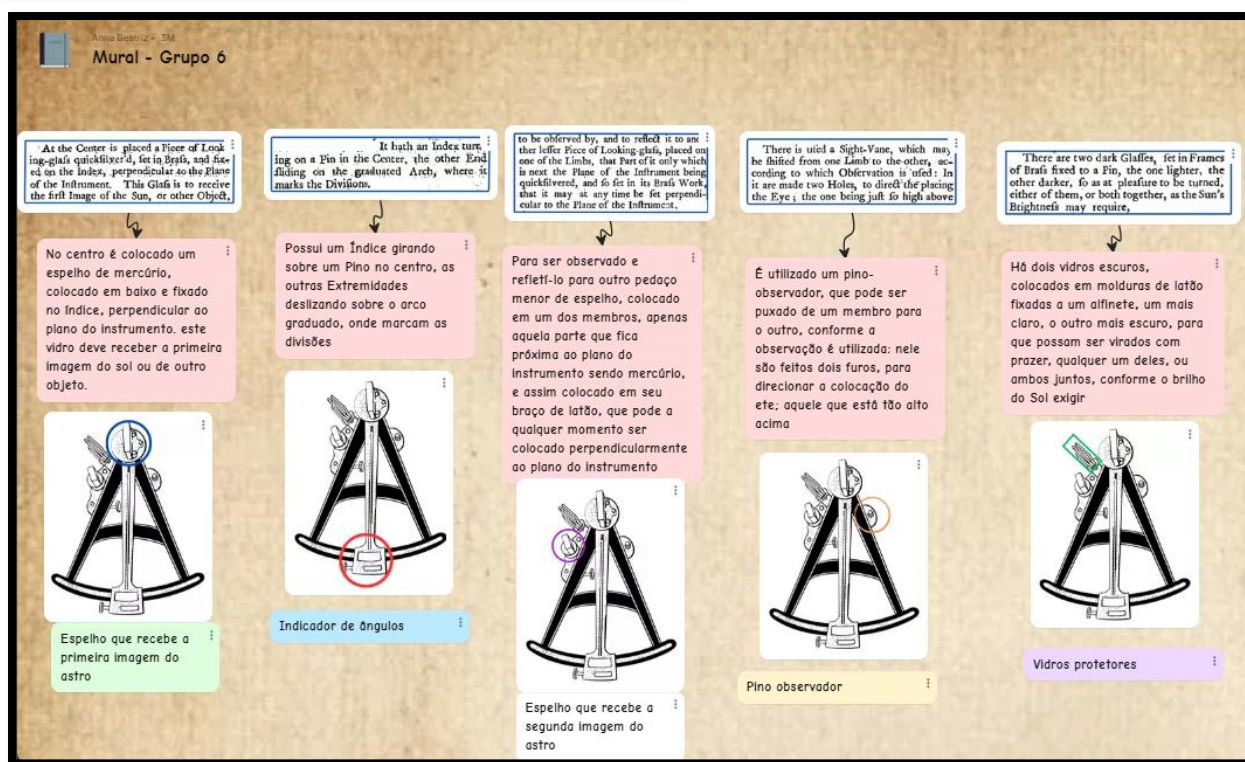
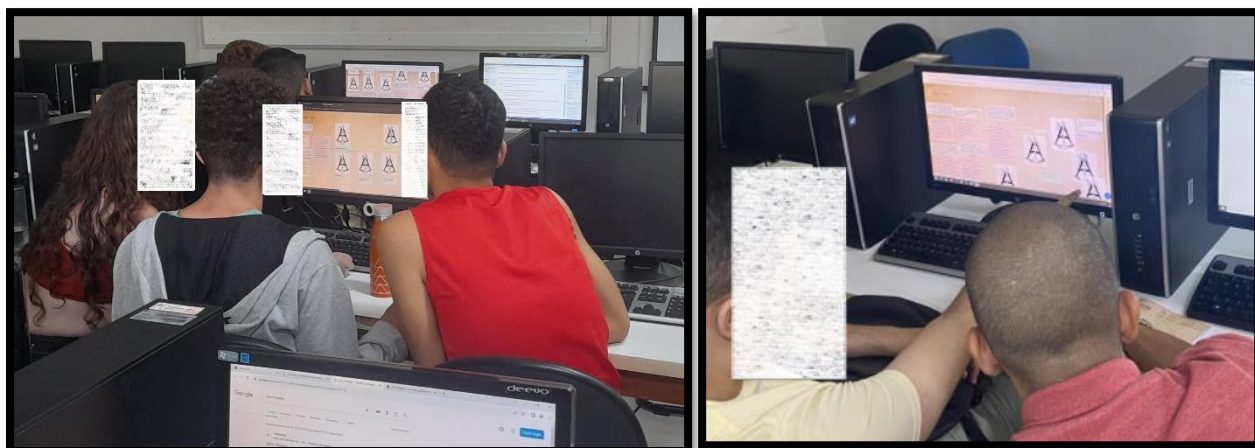
No segundo encontro, que aconteceu dia 17 de abril de 2024, haviam 17 participantes. Ou seja, três a mais do que no primeiro dia. Como eram novos participantes, tiramos um momento para fazer uma retomada do que aconteceu no encontro anterior, até para contextualizar a aplicação para os que não estavam presentes. Além disso, também tivemos um momento para explicar novamente sobre o TCLE e o Termo de autorização de Voz e Imagem.

Para a continuação da Atividade 1 (iniciada no encontro anterior), as duplas formadas no primeiro encontro continuaram e, os que estavam participando pela primeira vez, se juntaram com algumas das duplas já formadas no encontro anterior. Dessa forma, ficamos com nova configuração de agrupamento dos participantes, sendo então quatro duplas e três trios. Assim, continuamos a aplicação da Atividade 1, agora com a seção *Vamos Investigar*.

Nesta seção os alunos/usuários tiveram uma introdução sobre o que é e para que serve o instrumento Octante Reflexivo, bem como investigaram os elementos do instrumento a partir das definições apresentadas pelos irmãos Hadley nos

documentos. Nisso, fizeram a produção de um mural relacionando os elementos do Octante com a sua definição tanto do documento como a tradução, como mostra o registro da Figura 26.

Figura 26 - Participantes realizando a seção *Vamos Investigar da Atividade 1*



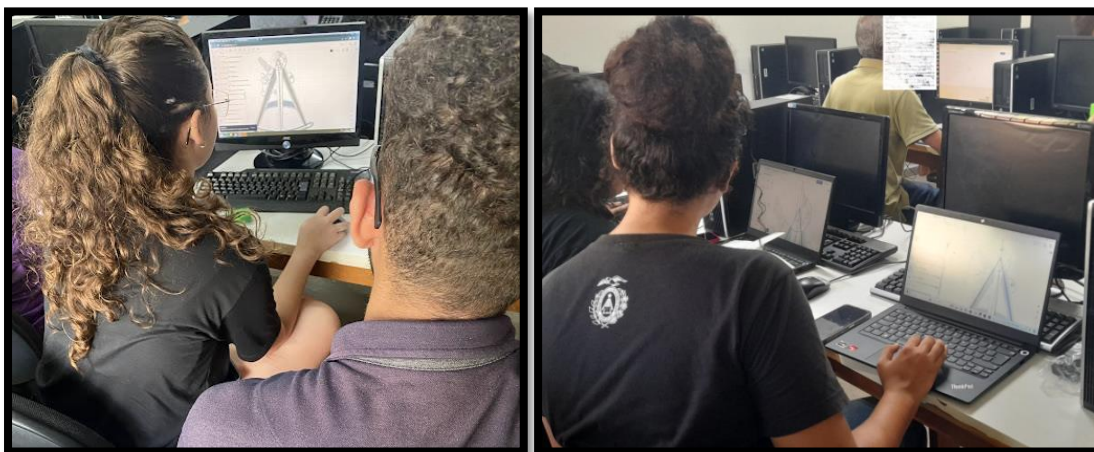
Fonte: Acervo da autora (2024)

Nos registros apresentados na Figura 26, é plausível ver que os participantes conversam enquanto montam o mural em conjunto e um exemplo de mural, montado pelo Grupo 6. No caso do exemplo apresentado, os participantes montaram da maneira correta, apenas utilizando como norteadores os textos apresentados pelo G. Hadley (1734) e o vídeo apresentado no início da seção. É possível perceber uma

maior interação entre os alunos/usuários, visto que, por ser em duplas/trios, cada um foi dando sua opinião e percepção da definição dos elementos a partir do próprio entendimento da visualização do vídeo e texto presentes no início da seção *Vamos investigar da atividade 1*. Assim, as ideias foram entrando em confronto e os mesmos foram chegando ao consenso.

Posteriormente, ainda no segundo encontro, partimos para a aplicação da Atividade 2 (intitulada Montando o Octante Reflexivo no GeoGebra), onde os participantes iniciaram a construção do Octante no GeoGebra (versão digital do instrumento – simulador). No início, orientamos para que cada um tentasse fazer individualmente, de modo ter a experiência de explorar a construção, porém, também deixamos em aberto para caso quisessem realizar na dupla/trio que estavam anteriormente. Os que fizeram a construção em grupo, interagiram bastante na hora de seguir os passos, tirando dúvidas entre si e mostrando onde ficavam as ferramentas ou até mesmo como estavam fazendo. Na Figura 27, temos os alunos durante a construção em conjunto.

Figura 27 - Alunos construindo o Octante no GeoGebra



Fonte: Acervo da autora (2024).

Na Figura 27, os alunos conversam entre si sobre a construção, utilizando o GeoGebra para fazer a relação entre os passos e verificarem entre si se estavam fazendo parecido ou se estavam indo no caminho certo. No diário de campo⁴⁷ da pesquisadora, temos alguns registros de que, em alguns momentos, eles confundiam alguns passos, como por exemplo, pular alguns dos pontos que eram necessários

⁴⁷ Segundo Bogdan e Biklen (1994), o diário de campo é tudo aquilo que o pesquisador lê, ouve, experimenta e vivencia, durante o percurso da pesquisa, refletindo sobre os dados coletados. Durante a pesquisa, o diário de campo consistiu nas anotações registradas pela pesquisadora, como opiniões dos licenciandos e/ou detalhes que aconteciam no decorrer da aplicação.


para a conclusão de determinado passo ou até mesmo tentar fazer o passo sem ler as orientações, ou por esquecerem de selecionar determinada ferramenta, ou por não entender com clareza algum dos passos.

Porém, como ocorreram orientações durante a aplicação, esses contratempos foram rapidamente resolvidos. Dentre as orientações realizadas, a pesquisadora responsável ajudou nas correções dos passos feitos de maneira incorreta, sinalizando como voltar algumas ações no *software* ou até mesmo indicando o que havia ocorrido para que os participantes conseguissem voltar a seguir os passos, e a ler/interpretar os textos que vinham nos passos.

Como não deu tempo finalizar a construção no GeoGebra neste encontro, os alunos fizeram uma cópia do documento em desenvolvimento para ser continuado *no terceiro encontro, que aconteceu no dia 22 de abril de 2024*. Neste último encontro, haviam 17 participantes que, no início, já deram continuação às suas construções. Para tanto, cada dupla/trio seguiam passos indicados na atividade, como pode ser notado na Figura 28.

Figura 28 – Passos para construção do Octante na Atividade 2

Passo 10: Criar uma semirreta que inicie em D e continue, passando por A.

- Selecionar a ferramenta Semirreta ;
- Clicar no ponto D;
- Clicar no ponto A.

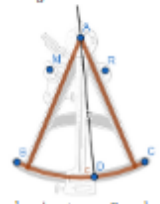
Passo 11: Ocultar o rótulo do segmento \overline{DA} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no segmento \overline{DA} ;
- Clicar com o botão direito do mouse em cima de qualquer lugar do segmento e selecionar a opção configurações;
- Desmarcar a opção *Exibir rótulo*.

Passo 12: Posicionar a semirreta \overline{DA} , alinhando-a com o espelho do Octante de acordo com a imagem.

- Com a ferramenta Mover selecionada, mova o ponto D pela extensão do arco \widehat{BAC} de maneira que fique alinhada com o espelho do Octante da seguinte forma:

Figura 9: Indicador do ângulo alinhado ao espelho que recebe a primeira imagem do Octante




Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2024)

Passo 18: Crie dois pontos que delimitem o espelho em A.

- Com a ferramenta Ponto selecionada, acrescente um ponto que inicie no espelho do Octante, em A. Esta ação criará o ponto E.
- Ainda com a ferramenta Ponto selecionada, acrescente um ponto no final da imagem do espelho do Octante, também em A. Esta ação criará o ponto F.

Utilize a seguinte imagem para a posição dos pontos:
Figura 10: Pontos E e F na semirreta DA



Fonte: Elaborado pela autora no GeoGebra (2024)

Passo 14: Renomear os pontos E e F para E1 e E2, respectivamente.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto E;
- Aperte com o botão direito em cima do ponto E e selecione a opção de configurações;
- Na aba *Básico* das configurações, altere o nome E para E1;
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto F, alterando o seu nome para E2.

Passo 15: Fixar os pontos E1 e E2.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto E1;
- Aperte com o botão direito em cima do ponto E e selecione a opção *Fixar Objeto*;
- Caso não apareça a opção, selecione configurações;
- Marcar a opção *Fixar Objeto*.
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto E2.

Passo 16: Criar um segmento $\overline{E1E2}$.

- Com a ferramenta Segmento selecionada, clique no ponto E1 e depois no ponto E2;

Passo 17: Mudar a cor do segmento $\overline{E1E2}$ e ocultar o seu rótulo.


- Com a ferramenta Mover selecionada, aperte no segmento $\overline{E1E2}$;
- Clicar em qualquer lugar do segmento com o botão direito do mouse e selecionar a opção configurações;

Fonte: Acervo da autora (2024)

No momento em que os participantes seguiam os passos para construção do Octante digital na Atividade 2, já houveram indicações de coisas que podiam ser melhoradas nas orientações do Produto Educacional, como, por exemplo, a recomendação de trazer as imagens de orientação para a mesma página do passo a qual a mesma se refere. Por exemplo, na primeira imagem da Figura 28, percebe-se que, no passo 18, havia uma imagem de referência sobre como posicionar pontos para delimitar o espelho A do Octante Digital, onde os alunos/licenciandos sugeriam inserir a imagem na mesma página pois, antes de seguirem para a página seguinte, eles tentaram fazer o passo e não sabiam que havia uma imagem para auxiliar. Desse modo, foram realizadas alterações na Atividade 2, ficando com uma nova estrutura, como mostra a Figura 29.

Figura 29 - Imagem de parte dos passos para construção do Octante Digital com mudanças realizadas no PE refinado

Passo 10: Criar uma semirreta que inicie em D e continue, passando por A.

- Selecionar a ferramenta Semirreta  ;
- Clicar no ponto D;
- Clicar no ponto A.

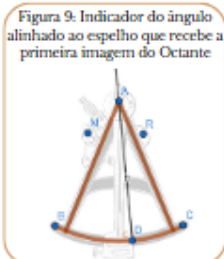
Passo 11: Ocultar o rótulo do segmento \overline{DA} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no segmento \overline{DA} ;
- Clicar com o botão direito do mouse em cima de qualquer lugar do segmento e selecionar a opção configurações;
- Desmarcar a opção *Exibir rótulo*.

Passo 12: Posicionar a semirreta DA, alinhando-a com o espelho do Octante de acordo com a imagem.

- Com a ferramenta Mover selecionada, mova o ponto D pela extensão do arco BAC de maneira que fique alinhada com o espelho do Octante;
- Na Figura 9, temos um exemplo que pode ser utilizado como referência para a realização do passo.

Figura 9: Indicador do ângulo alinhado ao espelho que recebe a primeira imagem do Octante




Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra (2024)

Passo 18: Crie dois pontos que delimitem o espelho em A.

- Com a ferramenta Ponto selecionada, acrescente um ponto que inicie no espelho do Octante, em A. Esta ação criará o ponto E.
- Ainda com a ferramenta Ponto selecionada, acrescente um ponto no final da imagem do espelho do Octante, também em A. Esta ação criará o ponto F.
- Utilize a Figura 10 para a posição dos pontos:

Figura 10: Pontos E e F na semirreta DA



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra (2024)

Passo 14: Renomear os pontos E e F para E1 e E2, respectivamente.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto E;
- Aperte com o botão direito em cima do ponto E e selecione a opção de configurações;
- Na aba *Básico* das configurações, altere o nome E para E1;
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto F, alterando o seu nome para E2.

Passo 15: Fixar os pontos E1 e E2.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto E1;
- Aperte com o botão direito em cima do ponto E e selecione a opção Fixar Objeto;
- Caso não apareça a opção, selecione configurações;
- Marcar a opção *Fixar Objeto*;
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto E2.

Passo 16: Criar um segmento E1E2.

- Com a ferramenta Segmento selecionada, clique no ponto E1 e depois no ponto E2;

Fonte: Acervo da autora (2024)

Além disso, também se notou, tanto da parte da pesquisadora quanto dos participantes, que haviam dois passos repetidos na Atividade 2, isto é, foi indicado que o passo 7 e 19 estavam repetidos. Assim, também foi feito um refinamento, resumindo

tudo apenas no passo 7 e editando o passo 19. As observações feitas durante a aplicação foram anotadas para que, em conjunto com o questionário (ver apêndice B) realizado ao final da aplicação, ocorresse a avaliação e refinamento do Produto Educacional.

Dando início a Atividade 3 (ainda no terceiro encontro), na seção *Vamos Explorar*, foi realizada uma retomada de conhecimentos de natureza física (feixes de luz) que se relacionam com os de natureza matemática (ângulos), mais especificamente, sobre a ótica geométrica. Essa parte foi explorada no bloco de tarefas 5 da Atividade 3, como pode ser notado na Figura 30.

Figura 30 - Bloco de tarefas 5 da Atividade 3

Bloco de tarefas 5
A partir do texto e do momento de socialização, lembrando sobre conceitos físicos da reflexão, responda as indagações a seguir:

1. Na matemática, como nomeamos o ângulo α e β formado pelos feixes, considerando que sua soma dá 90° ?

2. E quando somamos 2α e 2β , como os nomeamos, sabendo que sua soma resulta em 180° ?

3. Se tivéssemos um caso onde o ângulo formado por um feixe de incidência fosse de 36° , quais seriam os ângulos formados pelo feixe refletor? Faça um esquema no papel, semelhante a Figura 16, representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

4. Caso com ângulo complementar a α fosse igual 27° , quais seriam os valores dos ângulos do mesmo esquema? Faça outro esquema, semelhante a Figura 16, representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

5. Considere a situação do exemplo anterior, onde o espelho plano esteja em uma posição inclinada. Mudaria a forma que os ângulos formados pelo feixe refletor e o incidente? Faça um novo esquema, semelhante a Figura 15, representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

35

36

Fonte: Acervo da autora (2024)

Na Figura 30, temos algumas das questões trazidas no bloco de tarefas 5. É possível perceber o teor exploratório quanto aos assuntos de ótica geométrica relacionando mais com os conhecimentos de natureza matemática (Questões 1 e 2) e, em seguida, trazendo essa relação para utilizar no jogo de espelhos do instrumento do Octante Reflexivo (Questões 3, 4 e 5).

Durante a apresentação e retomada dos assuntos, a pesquisadora foi também perguntando, se os participantes tinham alguma lembrança, se já tinham ouvido falar

no ensino básico ou se faziam ideia, que havia relação entre ângulos e feixes de luz. Uma parte dos participantes comentou que tinham a lembrança de já ter ouvido falar. Dessa forma, também foram relacionados alguns conceitos de natureza matemática como bissetrizes, retas perpendiculares e ângulos complementares e suplementares, para, assim, iniciarem o bloco de tarefas 5 da Atividade 3.

No bloco de tarefas 5, os participantes precisaram fazer a relação dos conceitos matemáticos e físicos para entender alguns dos exemplos e, além disso, também necessitaram criar esquemas que ilustrassem como isso seria utilizado nos espelhos do Octante. Para tanto, seguiram as questões investigativas mostradas na Figura 31.

Figura 31 - Questões do bloco de tarefas 6 da Atividade 3

Vamos investigar
Votando para a montagem do Octante Reflexivo, feita na atividade anterior, e utilizando os conceitos de ótica geométrica retomado, respondam aos seguintes questionamentos.

Bloco de tarefas 6

1. Se considerarmos o ponto G como o astro utilizado para observar a altitude, qual a sequência de segmentos que representam os seus feixes de luz na observação até o olhar do Observador?

2. Com a ferramenta Mover no GeoGebra, posicione o ponto G de uma maneira que exista a interseção do segmento GR e EIE2 e fique posicionado no ponto A. Agora, encontre os outros ângulos presentes de acordo com os ângulos incidentes e refletidos e opostos pelo vértice. Se precisar, faça um esquema no papel. Apenas marque os ângulos. Iremos nomeá-los nas tarefas a frente.

- Consideremos inicialmente o triângulo MER. Denomine os ângulos formados pelo vértice de:
 - $\hat{E} = 2\beta$;
 - $\hat{M} = \theta$;
 - $\hat{R} = \varepsilon$.

38

• Consideremos o triângulo DME. Se 2δ é o suplementar de ε e ele também é suplementar dos ângulos formados pelos feixes de reflexão, então, podemos nomear os ângulos de DME de:

- $\hat{D} = \delta + \varepsilon$;
- $\hat{E} = \beta$;
- $\hat{M} = \varphi$.

8. Qual a expressão que representa a soma dos ângulos internos do triângulo DME?

9. Substituindo ε pela expressão encontrada no item 5 do questionário, como podemos reescrever a equação encontrada antes? Depois disso, simplifique-a.

10. Utilizando a equação encontrada anteriormente, obtenha uma expressão igual a δ .

11. Agora, substitua essa expressão igual a δ no valor da expressão encontrada no item 7, que representa a distância angular.

40

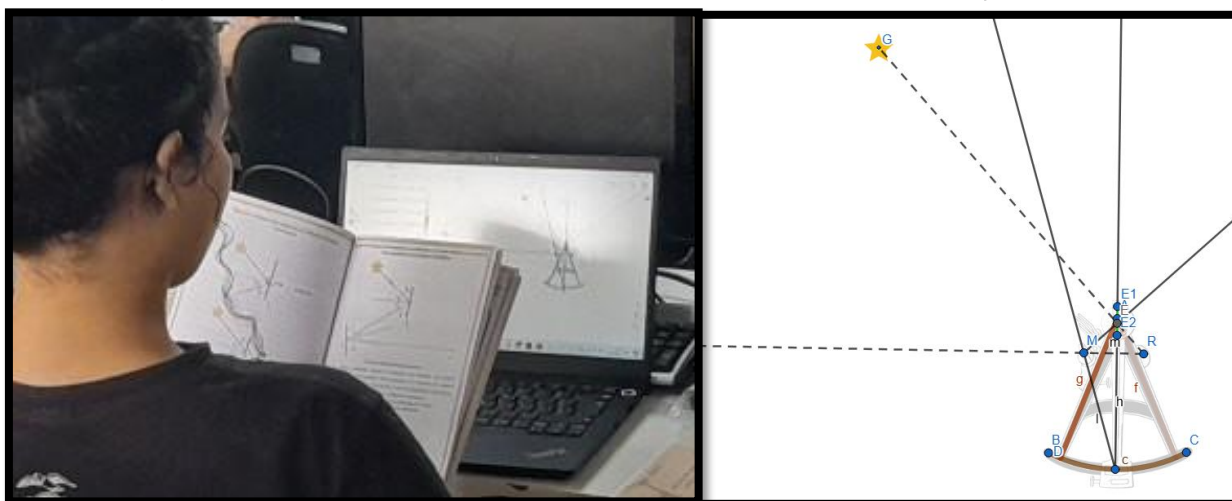
Fonte: Acervo da autora (2024)

Note que, nas questões da Figura 31, a relação entre conceitos matemáticos, como ângulos, soma dos ângulos internos de triângulos e equações, e físicos como reflexão de feixes e posicionamento de espelhos são acionadas na utilização do simulador do Octante e foi notado pelos participantes, quando eles falam mais sobre

os conhecimentos matemáticos que perceberam ser mobilizados⁴⁸. Constatamos que o uso do simulador, que apoia a atividade como um recurso mais visual e dinâmico, aliado ao contexto e aos conhecimentos de natureza matemática mobilizados no uso do instrumento, traz uma proposta que pode ser proveitosa e diferenciada, tanto para o aluno quanto para o professor, assim como propõe Sousa (2023) no que diz respeito à aliança entre HM e TD, juntamente com Saito (2014) e Pereira e Saito (2019) em relação ao uso de instrumentos para o ensino da matemática.

No bloco de tarefas 6 (da Atividade 3), último bloco do caderno de atividades, os participantes precisaram utilizar o simulador do Octante construído por eles na atividade 2, como pode ser notado na Figura 32.

Figura 32 - Alunos/licenciandos utilizando Octante e construção final



Fonte: Acervo da autora (2024)

Nesta fase da aplicação, foi possível perceber ainda mais evidente a atuação da aliança entre HM e TD, visto que o uso do GeoGebra fomentou a interpretação dos participantes durante a realização das tarefas. De fato, nas respostas do questionário, especialmente ao serem indagados sobre o que acharam da possibilidade do uso do simulador para entender alguns dos conhecimentos geométricos por trás do uso do Octante, alguns dos participantes afirmaram que acharam a experiência dinâmica, interessante e empolgante. Algumas das respostas apresentadas pelos participantes virão especificadas mais à frente.

⁴⁸ Dados apresentados mais à frente na presente seção, mais especificamente a partir do Quadro 3, na página 81.

Com essa tarefa 6 da Atividade 3, encerramos as atividades-históricas-com-tecnologias do caderno que compõem a sequência de atividades do Produto Educacional (PE). Ao fim da aplicação do caderno de atividades, foi realizado o questionário sobre o Produto Educacional (Apêndice A), na intenção refinar e avaliá-lo, buscando identificar pontos onde o mesmo pode ser melhorado, assim como procurando avaliar seu alcance, tendo em vista os objetivos da pesquisa. Devido ao tempo, não conseguimos fazer a aplicação da seção *Avaliando e Socializando*, com a produção do mapa mental neste encontro.

Dessa forma, sugerimos um acréscimo no cronograma para a produção, de aproximadamente 25 minutos (2,5 aulas ou 2 aulas e meia), no fim da aplicação, do mapa mental, ou até mesmo ser enviada para ser realizada fora da aula e debatida em um momento seguinte. Além disso, também optamos por mudar a forma em que estava expresso o total de minutos destinados a cada atividade, em vez da quantidade de minutos por aula. para melhor entendimento. Logo, o cronograma sugerido no PE passou por uma alteração, como mostra a Figura 33.

Figura 33 - Alteração no cronograma sugerido no PE

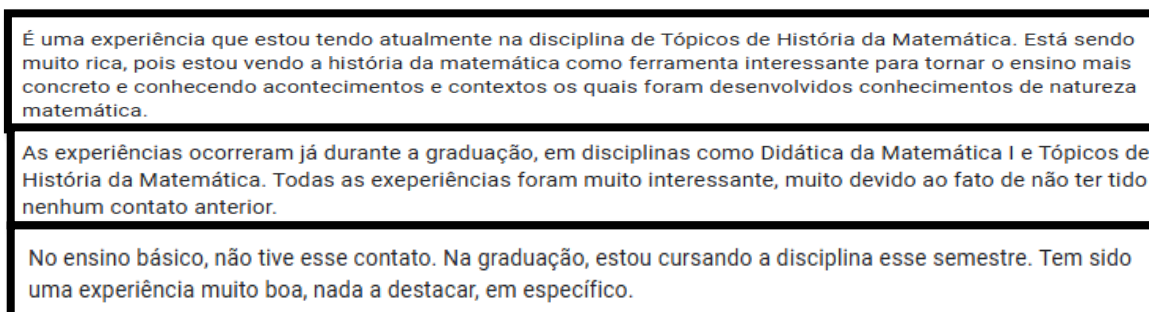
Antes da Reformulação		Depois da Reformulação	
Cronograma sugerido		Cronograma sugerido	
Atividade	Tempo previsto	Atividade	Tempo previsto
Atividade 1	2 aulas/50 minutos	Atividade 1	100 minutos
Atividade 2	2 aulas/50 minutos	Atividade 2	100 minutos
Atividade 3	2 aulas/50 minutos	Atividade 3	125 minutos

Fonte: Acervo da autora (2024)

Em relação ao questionário, as primeiras perguntas referem-se às características dos participantes. Tivemos pessoas de 20 a 60 anos de idade respondendo, sendo que todos estavam cursando Licenciatura em Matemática com mais de 30% do curso integralizado (dado esperado pelo momento do curso em que a disciplina é ofertada - 5º período). Dentre os que responderam ao questionário, 83,3% dos participantes já exerceram alguma atividade docente, sendo elas participação em programas como PIBID, PET e Residência Pedagógica, além de experiência com aulas de reforço, cursinho e/ou no ensino básico regular.

Em relação a sua formação, foram questionados sobre já terem tido, ou não, experiência com a utilização de História da Matemática e Tecnologias Digitais durante a graduação e/ou seu ensino básico. Nas respostas, tivemos que 72,2% indicaram que tiveram contato com HM e, dentre as justificativas, em sua maioria tiveram contato apenas durante o ensino superior. Alguns destacaram, inclusive, que foi durante as disciplinas de Tópicos de História da Matemática e/ou Didática da Matemática I e II⁴⁹, onde tiveram acesso a HM como uma tendência da educação matemática. Destacamos, na Figura 34, alguns comentários feitos pelos participantes no questionário sobre o uso de História da Matemática, a exemplo das respostas dos Participante 1, Participante 2 e Participante 3, respectivamente.

Figura 34 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 1; Participante 2; Participante 3, 2024) a questão “Caso a resposta anterior⁵⁰ tenha sido SIM, discorra brevemente sobre como foi sua experiência com a utilização da História da Matemática nas aulas de Matemática.”



Fonte: Acervo da autora (2024)

Das respostas destacadas anteriormente, é possível perceber que o contato que os participantes tiveram com a História da Matemática foi apenas na graduação, nas disciplinas de Tópicos de História da Matemática e Didática da Matemática, seja como uma tendência na educação matemática e ou por meio de recortes históricos. Mesmo sendo disciplinas muito ricas e que complementam a formação dos professores, vê-se também a necessidade de cursos de extensão/atividades formativas complementares que agreguem conhecimentos sobre o assunto ao professor em formação, visto que mesmo tendo carga horária 60 horas semestrais

⁴⁹ Vale ressaltar que na estrutura curricular vigente do curso (Estrutura nº 07) de licenciatura em Matemática da UFRN campus Natal, os alunos regularmente matriculados no 5º período em que é ofertada a disciplina de Didática da Matemática II (onde o PE foi aplicado) também cursam de modo concomitante a disciplina de Tópicos de História da Matemática e tem que ter cursado antes Didática da Matemática I (4º período), bem com Informática no Ensino de Matemática (3º período).

⁵⁰ “Você já teve algum contato com História da Matemática durante a graduação e/ou durante o seu ensino básico (fundamental e/ou médio)?”.

como na UFRN, costumam haver novas/diferentes possibilidades de aplicação da História da Matemática no ensino da matemática. Neste interim, o PE aqui proposto também pode contribuir com proposta de curricularização da extensão nos cursos de graduação.

Além disso, também é possível perceber que os alunos reconhecem que a História da Matemática é um ótimo recurso para ser usado no ensino na formação de professores. D'Ambrosio (2020) aponta que é importante que professores em formação compreendam a matemática como um processo humano de construção de conhecimento, visto que ela, usada no ensino, traz consigo um desenvolvimento crítico e reflexivo. Logo, isso também abre a possibilidade para que os futuros/atuais professores a utilizem durante suas aulas, identificando onde podem ser inferidas no conteúdo da educação básica.

Já sobre o uso de Tecnologias Digitais, 94,4% disse já ter participado de aulas que faziam uso dessa tendência, com recursos como GeoGebra, *SuperLogo*, *Kahoot*, *Polypro*, *WinPlot*, *Datashow*, *Software* de Planilhas Eletrônicas, *Quizziz*, *Winplot*, entre outros⁵¹. No questionamento sobre o que achavam do uso de Tecnologias Digitais no ensino básico, destacamos as respostas dos Participantes 4, Participante 5 e Participante 6, nessa ordem, apresentadas na Figura 35.

Figura 35 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 4; Participante 5; Participante 6, 2024) a questão “Caso a resposta anterior⁵² tenha sido SIM ou NÃO, discorra brevemente sobre o uso de tecnologias digitais para o ensino da Matemática.”

O uso de tecnologias digitais no ensino de matemática é interessante porque causa maior interesse na atividade desenvolvida e interatividade entre os alunos. Além disso, a depender do modo como a tecnologia digital é atrelada a aprendizagem da matemática, é possível fomentar o protagonismo discente.

As tecnologias digitais geralmente geram mais interação e empolgação da turma, podem ser utilizadas de diversas maneiras na educação, facilitando a compreensão dos conhecimentos trabalhados, além de poder incentivar o trabalho em grupo.

Muito interessante já que estamos em uma época muito apropriada e precisamos conduzir os alunos também nessa área já que eles vivem isso no seu dia dia e utilizaram no futuro.

Fonte: Acervo da autora (2024)

⁵¹ Vale ressaltar que, na estrutura curricular do curso que a turma é vinculada, há uma disciplina anterior a esta (Informática no Ensino de Matemática), que é ofertada no terceiro período, cuja ementa prevê o uso e estudo de tecnologias digitais, incluindo vários dos recursos mencionados pelos participantes no questionário.

⁵² “Você já participou de aulas que utilizaram recursos de tecnologias digitais?”.

Em algumas das respostas referentes à opinião dos participantes quanto ao uso das Tecnologias Digitais no ensino, é possível perceber que os mesmos reconhecem a importância das tecnologias incorporadas no ensino de matemática, especialmente pelo fato de que podem trazer uma dinamicidade nos momentos de atividades. Isso foi possível notar nos momentos das Atividades 2 e 3, a exemplo quando os participantes utilizaram tecnologias para construir o simulador do Octante e, em seguida, utilizá-lo para responder aos questionamentos do último bloco de atividades.

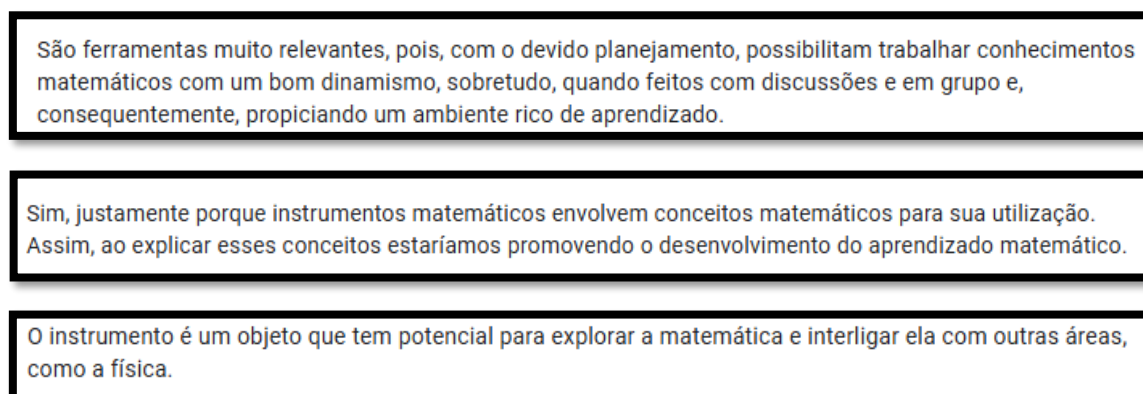
De fato, com o simulador virtual era possível usar a versão digital quantas vezes necessário, além de poder reproduzir sua construção ou parte dela, sempre que preciso, voltando ou avançando passos e visualizando protocolo de construção com identificação de objetos por trás da construção final e que levam a percepção de conceitos matemáticos acionados. Além disso, era de se esperar que apontassem a importância, assim como foi no caso da HM, sobretudo pois, como já destacado, eles cursaram disciplina anterior na graduação sobre o assunto, mas note que o percentual das respostas relativas às tecnologias foi maior.

Borba e Penteadó (2010) entendem que a tecnologia em alguns momentos pode ser um problema, porém, também pode desencadear a presença de diversas possibilidades para o seu desenvolvimento como professor, e por este motivo, este deve saber o momento certo para fazer o elo do ensino da Matemática com as Tecnologias digitais. Além disso, a BNC Formação (2019) traz que uma das competências gerais de um docente é compreender, utilizar e criar Tecnologias Digitais de forma significativa e crítica, saber utilizá-la como ferramenta pedagógica e de formação. É possível perceber, pelas respostas dos participantes, que os mesmos reconhecem que isto é tratado durante o PE.

Em seguida, os participantes foram questionados se já conheciam algum instrumento matemático. Dentre as respostas, 61,1% afirma já ter ouvido falar de algum instrumento, dentre eles, foram citados: ábaco, régua fracionada, transferidor, compasso, sextante, astrolábio e calculadora. Entre os instrumentos mencionados, nota-se que apenas dois deles tem uma semelhança com o Octante, que seria o sextante e o astrolábio, visto que são instrumentos geralmente utilizados para calcular altitude durante viagens marítimas.

Além disso, todos os participantes que responderam ao questionário afirmaram enxergar potencial didático no uso de instrumentos para o ensino de matemática e, dentre as justificativas, destacamos as respostas dos Participante 1, Participante 4 e Participante 7, como mostra a Figura 36.

Figura 36 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 1; Participante 4; Participante 7, 2024) a questão “Caso a resposta anterior⁵³ tenha sido SIM ou NÃO, justifique”



Fonte: Acervo da autora (2024)

A partir das respostas apresentadas na Figura 36, é possível notar que os participantes reconhecem o valor do uso de instrumentos no ensino da matemática, pois: (1) abordam uma exploração de conceitos matemáticos de uma maneira diferente, trazendo dinamicidade para as aulas; (2) ajudam a entender aplicações de conhecimentos matemáticos em outras perspectivas; e (3) abrem possibilidades para interdisciplinaridade entre outras áreas do conhecimento. Note que, é justamente o que aponta uma de nossas referências sobre uso de instrumento no ensino de matemática.

De fato, Saito (2011), afirma que o uso de instrumentos proporciona a reflexão acerca dos conhecimentos matemáticos mobilizados no próprio instrumento e no seu uso. Note que nos propomos a fazer isto no PE quando, essencialmente na Atividade 3, que explora os conhecimentos matemáticos por trás do uso do instrumento. Outro fator interessante é que, nas respostas, podem ser observadas competências e habilidades esperadas para um professor de matemática, conforme apontam os documentos como BNC e DCN, a exemplo da capacidade de desenvolver trabalhos interdisciplinares e explorar aplicações da matemática.

⁵³ “Você já participou de aulas que utilizaram recursos de Tecnologias Digitais?”.

Ao serem questionados sobre já terem ouvido falar no Octante Reflexivo, apenas 11,8% (2 participantes) responderam que sim e que sabiam da sua relação com a navegação e da semelhança com o Sextante. Já sobre terem ouvido falar em John Hadley, um participante, o Participante 8, afirma que sim, e, quando questionado o que sabia sobre, apresentou a resposta desatacada na Figura 37.

Figura 37 - Trecho relatado pelo participante (Participante 8, 2024) “Caso a resposta anterior tenha sido SIM, o que você já sabia sobre?”

Que ele havia desenvolvido trabalhos na área da astronomia/óptica.

Fonte: Acervo da autora (2024)

Quanto ao simulador do Octante Reflexivo, foi questionado sobre quais conhecimentos de natureza matemática foram identificados, pelo licenciando, durante o seu uso na versão digital (construída e/ou disponibilizada no PE na Atividade 2 e 3). Os participantes indicaram que identificaram os conceitos matemáticos, como mostra o Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 - Conceitos matemáticos identificados no PE pelos participantes

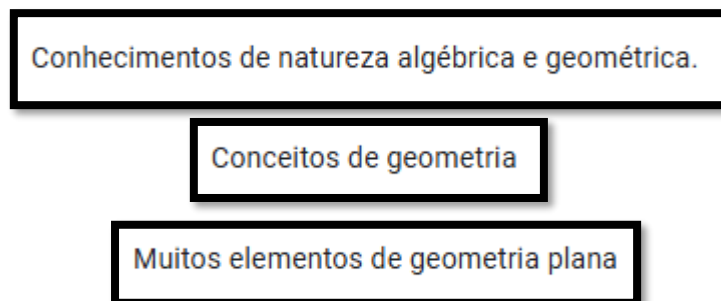
Conceitos Matemáticos identificados
Medidas de Ângulos
Relação entre os ângulos
Distâncias
Retas
Semirretas
Segmentos de retas
Pontos
Triângulos
Arcos

Fonte: Acervo da autora (2024)

Dos conhecimentos matemáticos apresentados pelos participantes, todos eram de natureza geométrica, como mostra o Quadro 3. Dos que não apresentaram um conhecimento específico, trouxeram a unidade temática do qual foi identificado o

conceito, sendo eles ou de natureza geométrica ou de natureza algébrica, como mostra a Figura 38 com a resposta dos participantes 8, 13 e 14.

Figura 38 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 8; Participante 13; Participante 14, 2024) à pergunta “Que conhecimentos de natureza matemática identificou na manipulação digital do Octante Reflexivo?”



Fonte: Acervo da autora (2024)

Mesmo não explicitando o conceito matemático específico, os participantes com as respostas destacadas identificaram que o PE aborda, além de conhecimentos geométricos, também um pouco de conhecimentos algébricos, nos quais eles não especificaram nas respostas aos questionários. Vale salientar que 4 participantes deixaram a resposta para essa pergunta em branco.

De fato, durante as realizações das atividades, essencialmente nas atividades 2 e 3, onde há a construção do Octante Digital e a mobilização dos conhecimentos de natureza matemática por trás do seu uso conhecimentos, respectivamente. Nestas atividades, está presente a aliança entre HM e TD, a partir do elemento definido por Silva (2019) como processo de investigação-histórica-com-tecnologia, visto que aborda problemas históricos investigativos, sejam eles com ou sem tecnologia, no intuito de produzir conhecimento matemático, sendo estes, os citados anteriormente.

Neste sentido, vale ressaltar que confirmamos a indicação no PE e estudo histórico-matemático que, por meio de exploração do Octante Reflexivo, conceitos de natureza geométrica como o de ângulos, podem ser mobilizados, mais ainda, além deste, o de distância, retas triângulos e arcos também podem ser percebidos, assim como, conhecimentos de natureza algébrica, por meio de equações, como a usada para verificar/demonstrar que o ângulo formado na distância angular é o dobro do tomado no Octante, no momento em que o Octante é usado para encontrar tal distância.

Em seguida, 33,3% indicaram que precisaram retomar algum conteúdo matemático durante a manipulação do Octante Digital, dentre eles, conceitos geométricos básicos, equações, relações entre ângulos e alguns conceitos básicos da geometria. Durante a aplicação do Produto Educacional, foram retomados esses conceitos, e com a confirmação dos participantes, a partir de dados do questionário, dessa necessidade, decidimos incorporar essa recomendação no PE na parte de recomendação ao professor.

Para tanto, fizemos um momento de conversa com os alunos, durante a apresentação da atividade 3, onde eles eram questionados sobre o significado de cada ângulo na ótica geométrica e, em conjunto, fazia-se a relação com os conceitos matemáticos, a exemplo dos significados de bissetriz, perpendicular e ângulos suplementares e complementares. Assim, a recomendação de retomada no PE foi introduzida a partir dessa estratégia.

Realmente, notou-se a necessidade de fazer essa retomada e tirar algumas dúvidas em relação ao conteúdo. Neste sentido, notamos que esta seria uma recomendação importante a constar no PE, de modo que, com tal ação de retomada, percebemos que os participantes acompanharam rapidamente e conseguiram seguir com seus grupos as atividades.

Foi pedido que os participantes descrevessem a experiência de manipular o Octante Digital para estudar Geometria com intuito de também observar apoio das tecnologias para investigação histórica. Algumas respostas foram bem similares sobre como foi uma experiência interessante abordar conceitos geométricos aplicados em uma situação histórica que pode ser percebida mesmo numa versão digital do instrumento e não física. Dos comentários feitos, destacamos os do Participante 6, Participante 8 e Participante 5, apresentados na Figura 39.

Figura 39 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 6; Participante 8; Participante 5, 2024) na questão “Descreva brevemente o que achou desta possibilidade de estudar Geometria a partir da manipulação digital do Octante Reflexivo.”

Muito empolgante por ser uma ferramenta que faz você raciocinar tanto a parte teórica que são as definições como auxiliar no cálculo e construções de problemas

Foi muito interessante partir de objetos já conhecidos e construir um objeto completamente novo. Além de mostrar também uma outra forma de enxergar a matemática já utilizada em algum momento da história.

Gostei bastante, principalmente pelo fato da possibilidade de construção em conjunto e aplicações de um conjunto de conhecimentos estudados durante toda a educação básica. Além disso, a construção ficou bem dinâmica e possibilitou a compreensão do funcionamento do octante reflexivo.

Fonte: Acervo da autora (2024)

No que foi descrito, é possível perceber que os participantes acharam interessante fazer a construção do simulador no GeoGebra, partindo dos conceitos básicos da Geometria e fazendo a relação com a história por trás do uso do Octante, como o ambiente em que foi desenvolvido e quem ajudou na sua construção nesse processo.

Nas descrições, eles mostram que acharam empolgante e dinâmica durante a aplicação e também comentam sobre achar muito interessante a relação das Tecnologias Digitais e da História da Matemática, dando indicativos, como apresentados anteriormente, de que a aliança entre as duas tendências tem vantagens no seu uso, como apresenta Sousa (2023), sobretudo relativas aos recursos e dinamismo propiciado pelas investigações, de modo que as tecnologias apoiam a exploração histórica em prol do ensino de matemática, em particular, geometria.

Em relação ao *software* utilizado, o GeoGebra, foi questionado se os participantes o consideravam adequado para a construção, e todos responderam que sim. Em seguida, foi pedido para que descrevessem um pouco da experiência e possíveis ajustes a serem feitos para a construção do Octante. Os Participantes 5, 9 e 3 apresentaram as seguintes respostas, expostas na Figura 40.

Figura 40 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 5; Participante 9; Participante 3, 2024) na questão “Caso a resposta tenha sido SIM ou NÃO, discorra um pouco sobre o software utilizado e/ou ajustes sobre este item.”

O GeoGebra permitiu a construção de todos os elementos necessários e, com as instruções do caderno de atividades, foi de fácil utilização.

O geogebra possui características como semirretas, retas e pontos que facilitam a manipulação e exploração dos conceitos geométricos utilizados no octante reflexivo.

Excelente. Acredito que as orientações sobre a construção do octante reflexivo digital podem melhorar um pouco. Em poucos momentos, não está claro o que deve ser feito.

Fonte: Acervo da autora (2024)

Sobre o *software* escolhido para a construção, o GeoGebra, os participantes o consideraram uma boa escolha, visto que é um programa de matemática dinâmica que possui como recurso alguns dos vários conceitos de geometria plana e espacial, dentre eles, os que eram necessários para a construção do Octante Reflexivo digital, como reta, plano, ponto, semirreta, e entre outros. Além disso, também foi comentado sobre as instruções para a construção do Octante não estarem claras em alguns momentos e isso também foi registrado no diário de campo da pesquisadora, sendo usado para refinamento do PE com as melhorias citadas anteriormente⁵⁴ em relação as páginas 25 e 26 do PE.

Mais ao fim do questionário, foi indagado sobre o que os participantes achavam sobre a utilização deste PE no ensino da matemática para as 3 categorias: Ensino Básico, Licenciandos em Matemática e Formação de Professores (inicial e continuada). Sobre a utilização no ensino básico, dos 18 participantes, tivemos que: 61,1% (11 participantes) afirmaram que usariam o PE no Ensino Básico para dar aulas de matemática; 33,3% (6 participantes) disseram que usariam em partes e, 5,6% (1 participante) afirmou que não utilizaria. Dentre as justificativas apresentadas, destacamos na Figura 41, as respostas dos Participantes 10, 2, 11 e 9, respectivamente.

⁵⁴ O refinamento para este caso foi mostrado na Figura 29 desta dissertação.

Figura 41 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 10; Participante 2; Participante 11; Participante 9, 2024) na questão “Justifique o item anterior (Questão 28)”

Porque além de trazer elementos considerados de fora da disciplina, o Geogebra é capaz de sanar algumas dúvidas sobre geometria que os alunos poderiam ainda ter. Na minha experiência, a diferenciação entre reta, segmentos e semirreta é bem confusa nos alunos e muitos acabam chamando tudo de reta, mesmo sabendo dizer o que é cada um.

Esse produto educacional aborda conceitos geométricos muito importantes de uma forma bem diferente e interessante, tenho certeza que os alunos ficariam muito engajados nas atividades.

Acho talvez tenham algumas partes que possam deixar os alunos confusos como na parte dos reflexos dos espelhos.

Não sei se os alunos do ensino básico teriam tanto interesse em explorar esse instrumento mas é possível trabalhar ele brevemente

Fonte: Acervo da autora (2024)

Das respostas apresentadas, foram destacadas as justificativas de dois participantes que disseram que utilizariam, com bordas em amarelo, e dois participantes que disseram que utilizariam em partes, com bordas em azul. O participante que respondeu que não utilizaria não justificou sua resposta. É possível perceber, a partir das respostas apresentadas, que o PE e o simulador do Octante, são considerados interessantes para o Ensino Básico, visto que abordam conceitos matemáticos que são tratados nos anos finais do fundamental e ensino médio, como ângulos e alguns elementos fundamentais da geometria (ponto, reta, semirreta, circunferência).

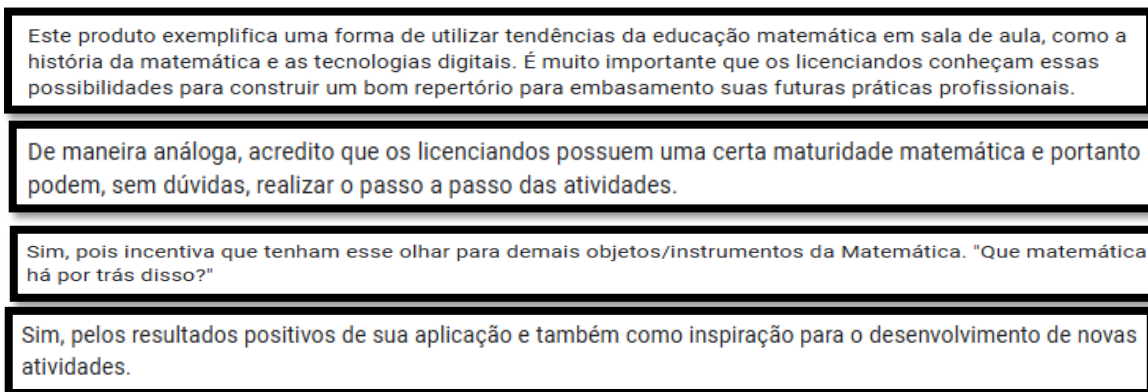
É possível notar, também, o receio de alguns participantes em utilizar devido à complexidade da maneira em que os assuntos se relacionam. De fato, em alguns momentos, o PE faz relações com temas que talvez, para os alunos do Ensino Básico, especialmente aos anos finais do fundamental, sejam muito avançados, a exemplo da ótica geométrica, que traz conhecimentos de natureza física, de modo que, relacionar esses conteúdos, pode acabar sendo confuso para os alunos deste nível.

Porém, como é mencionado, especificamente na aba de recomendações ao professor, na página 5 do próprio PE, o caderno pode ser utilizado separadamente ou com diferentes recursos. Além disso, o mesmo também possui a licença CC BY-NC-

SA 4.0⁵⁵, não sendo permitido usar para fins comerciais, porém, pode ser compartilhado, remixado, transformado, criado outro material a partir desse e redistribuído. Ou seja, o professor/usuário que tiver acesso ao PE, poderá adaptá-lo para sua aula da maneira que julgar necessário, tendo em vista a contribuição do conteúdo no ensino da Matemática, o nível da turma e seu contexto. Uma possibilidade em potencial reside em propostas interdisciplinares a partir de projetos com professores de outras áreas, como a Física.

Em seguida, os participantes foram questionados se recomendariam o uso do PE para licenciandos em matemática. Das respostas obtidas, todos os 18 participantes afirmaram que sim. Realmente, esse é o público alvo do PE, formação inicial de professores, que aqui é reafirmado. Na Figura 42, foram apresentadas a justificativa dos Participantes 5, 8, 3 e 4.

Figura 42 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 5; Participante 8; Participante 3; Participante 4, 2024) na questão “Justifique o item anterior (Questão 30)”



Fonte: Acervo da autora (2024)

Ao justificarem as respostas sobre a recomendação do uso do PE para formação de licenciandos em matemática, os participantes reforçam suas afirmações a partir do argumento de que é importante que os mesmos tenham acesso a materiais que abordem o uso de Tendências da Educação Matemática e também ver aplicações da matemática em diferentes situações. O Participante 8 ainda destaca que, diferente dos alunos do Ensino Básico, licenciandos em matemática talvez tenham uma certa maturidade em relação aos conhecimentos de natureza matemática e, também,

⁵⁵ Licença de obras com atribuição não comercial que permite copiar, compartilhar, remixar, transformar, criar, dando o crédito apropriado ao produtor da mesma.

tenham menos dificuldades em seguir os passos para a construção do simulador do Octante.

Além disso, o Participante 4 cita que, assim como uma das justificativa do presente trabalho dissertativo, ao ter acesso a esse tipo de material, podem haver incentivos para o desenvolvimento de trabalhos voltados para estudos, tanto para a História da Matemática, Tecnologias Digitais, a aliança entre eles e o uso de Instrumentos Matemáticos em sala de aula.

De maneira análoga, foi questionado se os participantes recomendariam o uso do PE para a formação inicial/continuada de professores de matemática. Novamente, todos os participantes afirmam que sim. Além de alguns participantes colocarem a mesma justificativa do questionamento anterior, visto que os dois estão relacionados, apresentamos aqui outras justificativas, especificamente dos Participantes 7, 10 e 1, na Figura 43.

Figura 43 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 7; Participante 10; Participante 1, 2024) na questão “Justifique o item anterior (Questão 32)”

Recomendo, pois é um trabalho bastante interessante e que tem uma iniciativa muito bacana para o ensino de matemática, que atrela várias ferramentas

Um professor sempre deve estar se aperfeiçoando uma vez que seus alunos sempre estarão atrelados a uma época diferente. É preciso se adequar as necessidades e as tendências educacionais.

Produto com objetivos evidentes e que possibilita uma facilitação no ensino de geometria.

Fonte: Acervo da autora (2024)

Os participantes justificam, como é possível observar na Figura 43, que, assim como no questionamento anterior, acharam o PE interessante e que, por atrelar várias ferramentas durante as atividades, isso faz com que professores em formação continuada permaneçam aperfeiçoando e acompanhem o desenvolvimento dessas ferramentas para auxiliá-lo em suas aulas. Isso se relaciona, também, a ideia do uso da História da Matemática e da Tecnologia, sejam elas separadamente ou em aliança, visto que a possibilidade de uso dessas tendências pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes.

A possibilidade deste uso é apresentada por Sousa (2023) como uma quebra de paradigma de modo que, a história deixa de ser vista como algo do passado que serve ao passado, mas também que pode servir ao presente. Ou seja, aliando as

Tecnologias Digitais, considerado como algo do presente e que pode ser bastante desenvolvido para o futuro, destacando ainda mais quando se trata destas tecnologias no ensino.

Ressaltamos a importância de que estes participantes, como licenciandos em matemática, reconheçam de ter formações voltadas para o uso das tendências no ensino da matemática, bem como voltadas para didática de conhecimentos específicos, nesse caso, a didática do ensino da Geometria. É relevante visto que, como propõe a BNC Formação de Professores, os professores devem ter acesso a metodologias dinâmicas e inovadoras, saber empregar recursos digitais para fins pedagógicos e ter compromisso com sua formação, sejam elas iniciais ou continuadas (Brasil, 2019).

Em relação ao trabalho dissertativo, foi perguntando aos participantes se o PE despertava o interesse em lê-lo. Das respostas, 15 foram afirmativas sobre ter despertado o interesse em ler; 2 participantes responderam em partes; e 1 participante respondeu que não despertou o interesse. Dentre as justificativas dos participantes que afirmaram que despertou o interesse, notamos que é bastante comentado que os mesmos acharam interessante e inovador, e, por isso, despertava curiosidade em saber a pesquisa por trás da elaboração do Produto. Neste sentido, na parte de indicação de materiais do PE, a dissertação está disponível ou se tem indicação de como acessá-la.

Dos participantes que apontaram que despertava, em partes, interesse na leitura, apenas um deles, o Participante 9, justificou sua resposta como: não tem interesse no instrumento específico, apenas nos conhecimentos por trás dele. Já o Participante 12 afirma não ter interesse em ler por dissertações serem muito extensas, o que pode revelar a necessidade de o PE também poder ser acessado independente da dissertação, como de fato, disponibilizamos.

Ao fim do questionário, abrimos um espaço para que os participantes apresentassem algum comentário e/ou sugestão sobre o Produto Educacional de maneira geral. Na Figura 44, apresentamos as respostas dos Participantes 8, 7, 2 e 3.

Figura 44 - Trecho relatado pelos participantes (Participante 8; Participante 7; Participante 2; Participante 3, 2024) na questão “Sua contribuição é muito importante! indique mais alguma alteração, sugestão, melhorias e refinamentos ao Produto Educacional.”

O produto foi muito legal de se trabalhar, principalmente a parte do geogebra :)

Está perfeito e muito bem elaborado

Acredito que as perguntas presentes nos blocos podem ser apenas ajustadas um pouco. Levando em consideração os últimos blocos, por exemplo, olhar pra relação entre as perguntas, as vezes acabamos tendo que repetir umas respostas.

1) No momento de organizar as imagens com suas respectivas descrições, as cores dos círculos que marcam as partes do octante, que aparecem nas imagens disponibilizadas no software, são diferentes das que aparecem nos slides. Sugiro usar as mesmas cores em ambas as situações, pois não causará estranheza ou confusão da parte dos alunos. 2) No último livro, na parte em que pedia para mudar o estilo dos segmentos, uma imagem pequena não está no lugar correto. 3) Na parte de delimitar o espelho que recebe primeiro os raios, não está claro que deve ser dado um zoom para enxergá-lo totalmente. Eu, por exemplo, estava com o zoom muito baixo e não compreendi o que era pra fazer. Após aumentar o zoom, consegui visualizar melhor as delimitações. 4) Em alguns textos, não está claro o que se pede. É tanto que achávamos que seria uma resposta "absurdamente" desafiadora, mas no fim era algo simples (o que não é ruim). Mas, esse problema acontecia por não estar claro algumas ideias solicitadas. Parabéns pelo EXCELENTE trabalho. Muito bacana mesmo.

Fonte: Acervo da autora (2024)

As duas primeiras respostas dos Participantes 8 e 7, que foram semelhantes aos outros não mencionados aqui, comentam que o PE está bom e que está bem elaborado. Já os Participantes 2 e 3 destacam algumas sugestões na estruturação do PE. Vale salientar que a sugestão do Participante 2 é semelhante ao 4º ponto apresentado pelo Participante 3, logo, trataremos como sugestões ligadas.

Para melhor organização, separamos o Quadro 4 com as sugestões apresentadas pelos participantes.

Quadro 4 - Sugestões dos participantes quanto ao PE

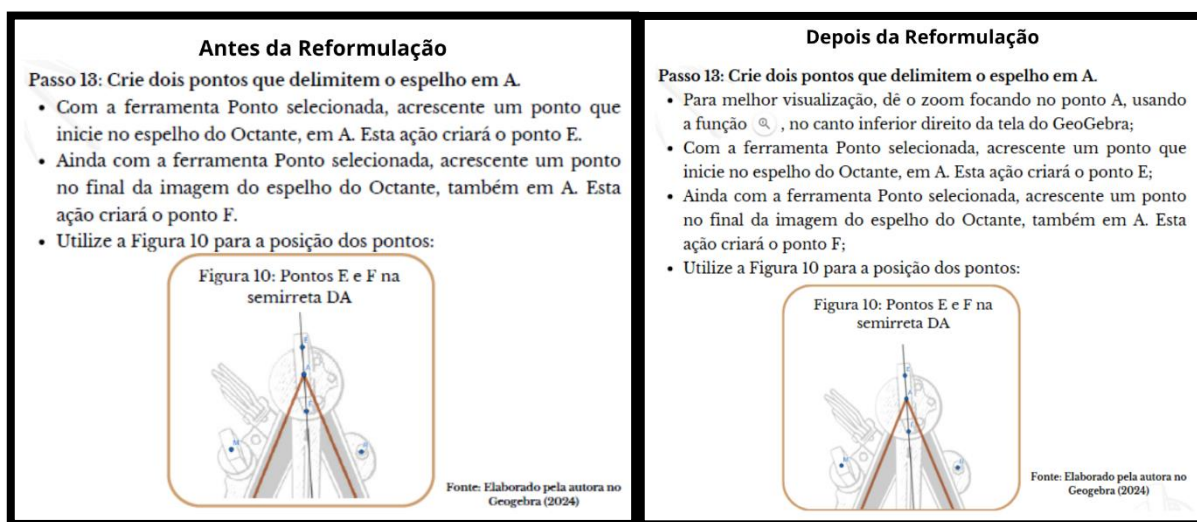
Identificação	Sugestão
1	Organização das imagens
2	Correção em um dos passos da Atividade 2
3	Reformular o enunciado do passo na Atividade 2
4	Reformular os enunciados da Atividade 3

Fonte: Elaborado pela autora (2024)

Das sugestões exibidas no Quadro 4, a primeira refere-se à organização das imagens. Essa correção foi feita e citada anteriormente⁵⁶ no trabalho dissertativo. De fato, percebemos que a mudança de lugar da imagem melhoraria a leitura do passo presente no bloco de tarefas 3, o que foi incorporado a versão final do PE. Já a sugestão 2 é sobre a correção em um passo específico da Atividade 2, o passo 20 presente no bloco de tarefas 4, que pedia para que os participantes mudassem o estilo do segmento para melhor visualização e que estava com o ícone que o identificava no software no lugar errado da página. Este refinamento também foi feito para a versão final do PE.

Dessa forma, foram feitas as devidas correções, colocando o ícone no lugar correto da página, que seria ao lado do nome Estilo, no passo indicado. Além disso, o participante também sugeriu que reformulasse um dos passos, o 13, também da Atividade 2, o qual não especifica que se deve dar zoom para melhor visualizar/trabalhar com a construção do Octante. Atendendo a sugestão, reformulamos o passo, como mostra a Figura 45.

Figura 45 - Reformulação do Passo 13 no PE



Fonte: Acervo da autora (2024)

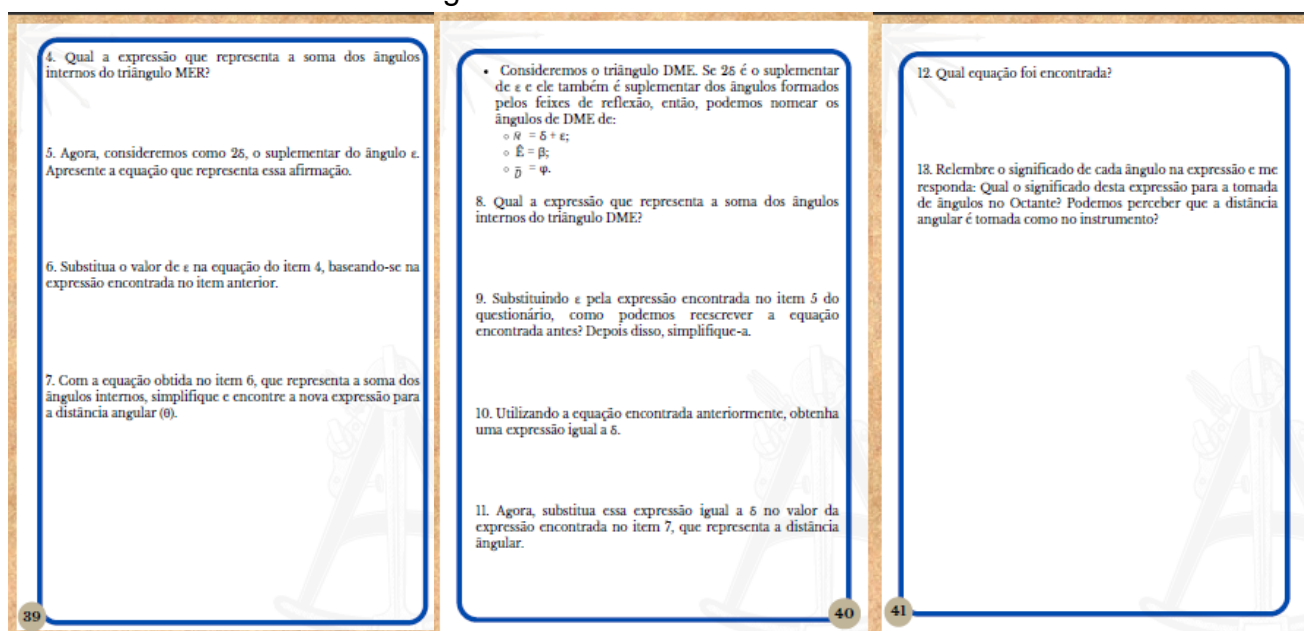
Como mostra a Figura 45, para facilitar a visualização e construção a partir do passo 13, foi acrescentado um ponto a mais, no início da orientação. O ponto faz a observação de como dar zoom na tela do GeoGebra, apresentando onde está localizada a ferramenta e para onde deve ser direcionada a aproximação.

⁵⁶ Especificamente, na Figura 29 deste trabalho dissertativo e na página 25 do Produto Educacional.

Por fim, ainda no Quadro 4, temos a sugestão 4, que aconselha reformular os questionamentos feitos no bloco de tarefas 6, presente na Atividade 3 do caderno. Durante a aplicação, a partir das anotações do diário de campo registradas pela pesquisadora, foi possível perceber que comentários como esse foram feitos durante a aplicação também.

De fato, ao fazer um estudo baseado nessas sugestões, o questionamento que concretiza a ideias e significados dos ângulos só é feito na questão 13 do bloco de atividades, com as perguntas: Relembre o significado de cada ângulo na expressão e me responda: Qual o significado desta expressão para a tomada de ângulos no Octante? Podemos perceber que a distância angular é tomada como no instrumento? Assim, para que não pareça uma confusão para os usuários deste Produto Educacional, resolvemos diluir essas perguntas ao longo dos questionários supracitados, para que assim, quem estiver fazendo o uso do caderno de atividades, situe-se das expressões algébricas que está manipulando. Anteriormente, tínhamos os seguintes questionamentos, como mostram na Figura 46.

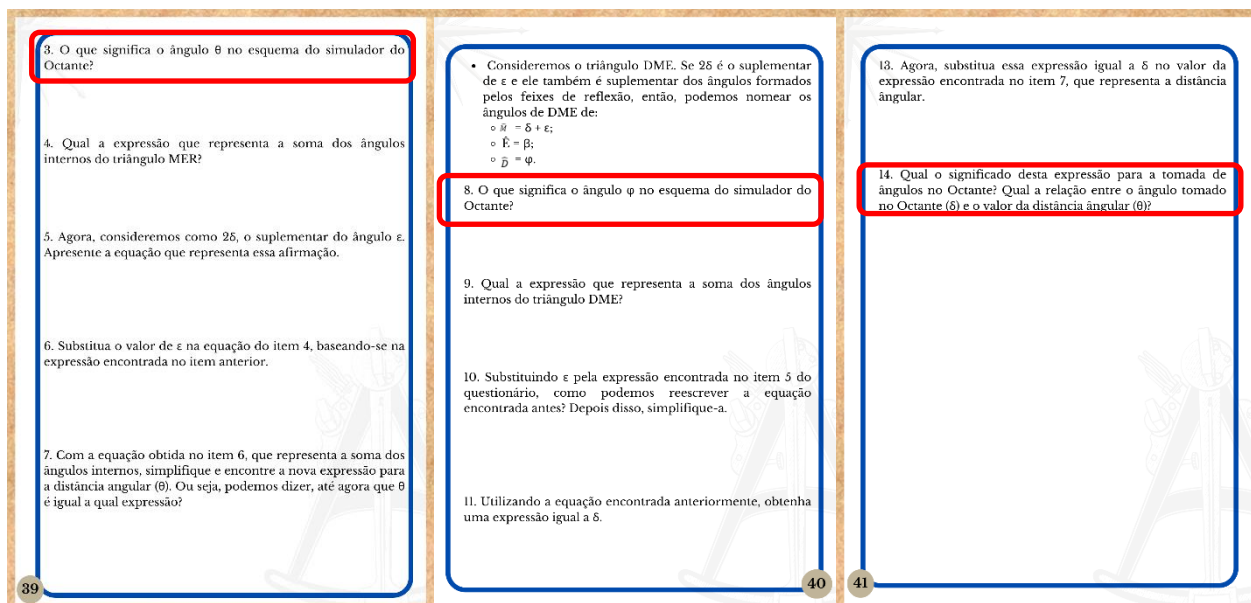
Figura 46 - Bloco de tarefas 6



Fonte: Acervo da autora (2024)

Na Figura 37, tínhamos apenas as orientações de como manipular as equações algébricas e, ao fim, tínhamos o questionamento do que significava cada ângulo e o que a relação encontrada ao fim queria dizer. As alterações estão destacadas na Figura 47.

Figura 47 - Reformulação/alterações dos questionamentos no bloco de tarefas 6



Fonte: Acervo da autora (2024)

Na Figura 47, foram destacadas apenas as páginas 39, 40 e 41 do PE, visto que foram as únicas que tiveram alterações quanto as atividades, além da seção de Expectativas de Respostas. É possível perceber que foram acrescentados os questionamentos 3 e 8 e reformulado o questionamento 14. Dessa forma, as questões foram acrescentadas para trazer a ideia do que estava sendo manipulado. Ou seja, em vez de situar o significado de cada ângulo, durante o uso do Octante ao fim da atividade, colocamos esses questionamentos enquanto eles manipulavam as equações para chegar na relação entre a distância angular e o ângulo tomado no Octante.

Assim, o aluno/professor/usuário que estiver utilizando o PE poderá entender a ideia e significado de cada ângulo e sua importância na relação entre os ângulos. Além disso, também se notou, durante a edição deste bloco, que faltava uma questão com o número 3, que foi acrescentado em seguida e, que a questão 12 trazia a mesma ideia da questão 11, por este motivo, foi retirada.

Ao fim do questionário disponibilizado no final da aplicação do PE, salientamos que a referida aplicação teve o objetivo de avaliar o Produto Educacional, de modo que possamos realizar refinamento, assim como tecermos apontamentos no tocante aos anseios da pesquisa, em especial, sobre aliança entre HM, TD e Instrumentos Matemáticos. Este refinamento e estas colocações ocorreram a partir das

observações realizadas, tanto pela pesquisadora e orientadora do presente trabalho dissertativo, quando dos participantes que estiveram presentes durante a realização das atividades, de modo que também trazem resultados da pesquisa que se somam aos já obtidos em capítulos anteriores e se relacionam aos anseios iniciais do estudo.

Posto isso, partimos agora para a última seção de considerações finais do trabalho onde tais aspectos são pontuados juntamente com apontamentos relativos a desdobramentos desta pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como norteadora a seguinte questão: Como a aliança entre HM e TD pode contribuir com a produção/elaboração do Produto Educacional, Octante Reflexivo, para formação de professores de matemática acerca do ensino de geometria? A fim de respondê-la, estabeleceu-se o objetivo de realizar um estudo histórico-matemático em torno do uso do Octante fundamentado na aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais para formação de professores de matemática.

Nesta finalidade, delimitamos os seguintes objetivos específicos:

- Apontar encaminhamentos para a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais a partir do uso do instrumento Octante Reflexivo;
- Conhecer aspectos contextuais, documentais e matemáticos em torno do Octante de Hadley no século XVIII;
- Criar um Produto Educacional (PE) pautado na manipulação do Octante Reflexivo para o ensino de conhecimentos geométricos;
- Aplicar o PE em uma turma com discentes do curso de Licenciatura em Matemática, no semestre de 2024.1, na UFRN;
- Refinar o material produzido com base na experiência vivenciada com os discentes em formação inicial.

Quanto ao primeiro objetivo, que seria apontar encaminhamentos para aliança entre HM e TD, ancorada aos Instrumentos Matemáticos, o primeiro passo delimitado para alcançá-lo foi construir uma base teórica que fundamentasse o trabalho nesses eixos. Para tanto, realizamos pesquisa qualitativa com procedimentos bibliográficos, no qual foi realizado um levantamento acerca de materiais que pudessem auxiliar a entender mais sobre o Octante Reflexivo e a relação do seu desenvolvimento com os irmãos Hadley. Estas, por sua vez, foram organizadas nas seguintes categorias: Fontes sobre os irmãos Hadley; Fontes sobre os trabalhos envolvendo o Octante Reflexivo e Fontes sobre o contexto histórico em que foi desenvolvido o Octante Reflexivo, que compuseram quadros sintéticos.

Dessas fontes foram extraídos dados sobre o contexto no qual foi desenvolvido o Octante e informações acerca do seu uso, motivações e propriedades enxergadas na época, bem como as controvérsias em relação as pessoas que levaram o crédito por sua produção. A partir disso, esses dados foram organizados e analisados de

modo a procurar pontos de encontro da aliança (entre HM e TD), juntamente com os instrumentos, delineando uma conexão para o ensino da matemática.

De fato, como apresentado no capítulo 2 deste trabalho dissertativo, Sousa (2023) indica que, a partir da aliança entre HM e TD, podem surgir propostas respaldadas em outras conexões, sendo a desta pesquisa, Instrumentos Matemáticos. Isso se dá porque o uso destes Instrumentos pode mobilizar diferentes tipos de conhecimentos, sendo eles matemáticos e físicos, bem como o histórico, social, econômico e cultural de determinada época, como aponta Saito (2014).

Como resultado, chegamos que uma aliança entre HM e TD via Instrumentos Matemático deve abordar os conhecimentos de natureza matemáticos que emergem da mobilização do instrumento, juntamente com situações históricas que eram abordados na época em que o mesmo foi desenvolvido e/ou utilizado. Estas situações históricas que fazem o uso de tais conhecimentos podem ser tanto sobre sua construção quanto sobre sua utilização. A partir disso, numa concepção de conexão com a aliança entre HM e TD, essas situações podem ser investigadas com apoio de Tecnologias Digitais, por exemplo, a partir de simuladores e/ou versões virtuais/digitais.

O segundo objetivo elencado nesta pesquisa está relacionado a um estudo histórico-matemático acerca do Octante Reflexivo, especialmente no século XVIII. Este tópico é mais abordado durante o capítulo 3, onde, a partir de documentos publicados pelos irmãos Hadley, é possível entender um pouco mais do funcionamento do Octante e algumas de suas propriedades à luz de seu contexto. Para tanto, novamente lançamos mão de procedimentos bibliográficos em paralelo a procedimentos documentais. Neste sentido, foram analisados três documentos, produzidos pelos irmãos Hadley⁵⁷, que foram encontrados durante o levantamento bibliográfico.

Estes documentos consistem em artigos publicados pelos irmãos Hadley, sendo dois deles, J. Hadley (1731) e J. Hadley (1732), publicados por John Hadley e um, G. Hadley (1734), publicado por George Hadley. Desses, foram extraídas informações como propriedades (natureza matemática, física e geográfica), por trás do uso do

⁵⁷ São eles: *The Description of a New Instrument for Taking Angles* (1731), *An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles* (1732) e *A description of a new instrument for taking the latitude or Other altitudes at sea. With Directions for its use* (1734).

Octante, sua diferença e vantagem em relação aos instrumentos da época, instruções para seu uso e os elementos que o compõem, garantindo sua funcionalidade em prol da navegação.

Esclarecendo, as informações dos quadros produzidos durante o levantamento bibliográfico nos direcionam com boa parte de seu desenvolvimento designado aos irmãos Hadley (nomear cada). Além disso, foi observado que, trabalhos anteriores como Isaac Newton (1643-1727), ou paralelo com os irmãos Hadley, como Thomas Godfrey (1704-1749), também foram desenvolvidos com objetivo similar ao do Octante. Considerando que a Inglaterra, na época, era uma região que financiava e incentivava pesquisas para o avanço de setores econômicos como no caso do comércio, que acontecia por meio de rotas marítimas. Ou seja, eram necessários conhecimentos de como se localizar no mar e o Octante era um dos instrumentos que permitia isso.

Dentre essas propriedades notadas a partir da compreensão do Octante e seu uso, demos o foco durante a pesquisa, na tomada de ângulos que ocorria a partir da dupla reflexão de espelhos presentes no instrumento, bem como os elementos presentes no mesmo. Com essa propriedade foi possível inferir que a elaboração e uso do Octante lança mão de conhecimentos de natureza matemática como elementos geométricos, a exemplo de conceitos da geometria plana, como ponto, reta, plano, semirreta, e as propriedades dos ângulos internos e externos a um ou mais triângulos. Contudo, por meio da aplicação do PE outros conhecimentos foram apontados pelos participantes, a exemplos dos de natureza algébrica.

Por fim, o último objetivo específico apresentado anteriormente na introdução e agora neste capítulo de considerações finais, fala sobre criar um Produto Educacional (PE) pautado na manipulação do Octante para o ensino de conhecimentos de natureza matemáticos, particularmente geométrica. Este anseio, por sua vez, está também ligado aos dois primeiros, visto que, para criar o PE, precisamos, inicialmente, apontar os encaminhamentos para construir uma proposta da aliança entre HM e TD conectando-a com Instrumentos Matemáticos. Além disso era necessário estudo histórico-matemático sobre o Octante, de modo a compreender sua motivação, sua constituição e uso em seu contexto, realizando inferências sobre mobilização de conhecimentos de natureza matemática acionados.

O PE criado, mostrado com mais detalhes no capítulo 4 desta pesquisa, consiste em uma sequência didática, caracterizada como um caderno de atividades, composto por três atividades-históricas-com-tecnologia, sobre o contexto histórico e matemático por trás do Octante Reflexivo. A primeira atividade trabalha aspectos do contexto histórico do instrumento, apresentando um pouco sobre a época na qual foi desenvolvido e, também, sobre os seus elementos estruturantes.

A segunda atividade parte para a construção de um simulador do Octante Reflexivo (versão digital do instrumento feita a partir do *software GeoGebra*). Nesta atividade, além dos aspectos históricos do Octante, também são acionadas as Tecnologias Digitais como aliadas às investigações históricas, visto que é o momento que o aluno mais entra em contato com o *software*, a partir da construção do instrumento direcionada por passos a serem seguidos que se inspiram na história de constituição do Octante, obtida pelos documentos analisados.

Já na terceira atividade, exploramos um pouco mais dos conhecimentos matemáticos acionados na manipulação do Octante Digital (já construídos e/ou disponibilizado), focando um pouco mais no entendimento desses conhecimentos por trás de sua manipulação digital do instrumento. Inicialmente, é tratado sobre ótica geométrica, para relembrar sobre conceitos óticos como reflexão de um feixe de luz em espelhos planos, e, ao mesmo tempo, relacioná-los com conceitos geométricos (ângulos formados a partir de feixes de luz).

Em seguida, trabalhada a parte da formação de ângulos dos feixes de luz, partimos para entender o funcionamento da dupla reflexão do Octante, usando o simulador construído na atividade anterior. Nesta fase, investigamos o motivo do Octante funcionar, isto é, atender a sua necessidade de elaboração com base nos fundamentos de sua constituição.

Com a finalização da terceira atividade, a partir dos passos seguidos nos blocos de tarefas e com ajuda do Octante Reflexivo Digital, chegamos à conclusão de que o ângulo tomado no arco do instrumento é o dobro da distância angular real, seja entre o horizonte e um astro ou entre dois astros. Nesse quesito, o simulador foi muito importante para conseguir ver, com mais clareza, a relação entre ângulos e triângulos formados pelos feixes de luz, que tornam esse tipo de relação não perceptível em um instrumento físico, por exemplo. Neste momento, diversos recursos do software foram acionados dando apoio a investigação com octante digital a exemplo do protocolo de

construção e vídeos que permitiam voltar e avançar passos realizados quantas vezes o usuário quiser, bem como, verificar objetos construídos e não visualizados na versão final do simulador, sempre que possível. Durante a aplicação, foi possível perceber que tais recursos foram acionados pelos usuários permitindo apoio da tecnologia às investigações históricas, numa aliança.

É importante ressaltar que, mesmo sendo considerada a ordem dos objetivos inicialmente elencadas, não necessariamente eles foram alcançados um após o outro, em sequência. Na verdade, estes objetivos foram se complementando durante a realização da pesquisa, desde a introdução do trabalho, quando foi pensada na sua proposta, até a aplicação e análise dos resultados PE.

Ao fim da criação do PE (em sua forma de protótipo), realizamos a aplicação em uma turma de formação inicial de professores de matemática da UFRN, na disciplina de Didática da Matemática II, ofertada para alunos do quinto período do curso de licenciatura na estrutura curricular vigente (Estrutura nº 07), no semestre 2024.1. Após a aplicação, entregamos um questionário no intuito de avaliar o PE como um todo, tanto a parte de estruturação como de conteúdo, fundamentos e intenções da pesquisa.

Nesta fase, realizamos pesquisa experimental e coletamos dados do instrumento supracitado (questionário), além de imagens, registros no diário de campo da pesquisadora e gravações realizadas no momento da aplicação do PE. Desses instrumentos obtivemos um refinamento do caderno de atividades, como reformulação de alguns textos e questionamentos realizados durante os blocos de tarefas, bem como de alguns passos para a construção do Octante digital e do cronograma, organização de algumas informações dispostas nas atividades, correções de digitação e acréscimo de informações que foram consideradas importantes durante a aplicação.

Deste processo, observamos que a presente pesquisa criou/disponibilizou um Produto Educacional que pode ser utilizado na formação de professores, tanto inicial quanto continuada e, se adaptado, de acordo com as recomendações destinadas ao professor, também pode ser utilizado no Ensino Básico. Tal PE pode mobilizar conceitos da geometria plana, como ponto, reta, plano, semirreta, ângulos internos e externos a um triângulo, relação entre ângulos, bissetriz, retas perpendiculares, e, também, conceitos algébricos, como manipulação de equações de primeiro grau com mais de uma incógnita. Além disso, pode contribuir para a formação do professor no

que diz respeito às tendências da educação matemática, tanto para HM e TD, quanto para a aliança entre elas e, quanto à didática do campo da Geometria.

Como desdobramento, tem-se a pretensão de desenvolver mais trabalhos mais pesquisas possam ser desenvolvidas no âmbito da aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, usando o presente trabalho como fundamentação, bem como no que diz respeito ao Octante, visto que durante esta pesquisa, foram abordados os conceitos iniciais para o seu uso. Assim, é possível perceber que ainda podem ser explorados outros tópicos, a exemplo de como era possível se localizar no mar a partir da distância angular tomada no Octante e quais cálculos eram necessários para isso, além de outros tópicos que possam ser pensados futuramente.

Mais ainda, também se espera que pesquisas fundamentadas a partir da aliança entre HM e TD, o uso de Instrumentos Matemáticos para o ensino, ou até mesmo conexões entre estas vertentes possam ser realizadas. Algumas das possibilidades consiste em pensar na presente pesquisa como uma aplicação que vá além da formação de professores, como na Educação Básica e/ou incorporando uma Teoria de Aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, L. B. de .; PEREIRA, A. C. C. Estudos iniciais sobre o setor de Thomas Hood (1556-1620) . **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 345–358, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.8054. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8054>. Acesso em: 2 fev. 2024.

AMARANTE, Rebeca Oliveira; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Some didactic potentialities that emerge through reading the construction of the nautical astrolabe at the interface between History and Mathematics Teaching. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 11, n. 15, p. 1-12, 2022. DOI: 10.33448/rsd-v11i15.37217. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/37217>. Acesso em: 2 fev. 2024.

ARAÚJO; Denise Lino de. **O que é (e como faz) sequência didática?**. Entrepalavras. v. 3, n. 1, p. 322-334, jan/jul 2013. Disponível em: <http://www.entrepalavras.ufc.br/revista/index.php/Revista/article/view/148>. Acesso em: 07 de dez. de 2022.

ÁVILA, Geraldo. A hipérbole e os telescópios. In: **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 34, p. 22-27, 1997.

Batista, Antonia Naiara de Sousa. **A articulação de saberes geométricos com trigonométricos por meio da fabricação da balhastilha de Figueiredo (1603) para a construção de uma interface**. 2023. 195 f. Tese (Doutorado em 2023) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2023. Disponível em: <http://siduece.uece.br/siduece/trabalhoAcademicoPublico.jsf?id=95521> Acesso em: 31 de julho de 2024

BATISTA, A. N. de S.; PEREIRA, A. C. C. VAMOS APRENDER TRIGONOMETRIA? UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNAS NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A BALESTILHA. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 7, p. 54–65, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v3i7.66. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/66>. Acesso em: 29 jan. 2024.

BATISTA, Antônia Naiara Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A BALESTILHA: UM INSTRUMENTO NÁUTICO COMO RECURSO PARA ABORDAR CONCEITOS MATEMÁTICOS. **Revista Hipátia**, v.2, n.1, p. 40-51, jun. 2017. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/265/180>. Acesso em: 3 fev de 2024.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em educação. Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 4.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.104 p.

BRASIL. Ministério da Educação; Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP nº 2/2015**. Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Diário Oficial da União: República Federativa do Brasil: seção:1, Brasília, DF, 02 jun. 2015.

COSTA, Allyson Emanuel Januário da; SOUSA, Giselle Costa de. Investigando a Conjunção entre História da Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação, por meio de um Levantamento Bibliográfico em Eventos Internacionais de Educação Matemática. **Revista Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Ceará, v.04, n.11, 06 –21. (2017).

BRASIL. **Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Brasília/DF: 2019.

CLARK, Douglas; NELSON, Brian; SENGUPTA, Pratim; D'ANGELO, Cynthia. **Rethinking Science Learning Through Digital Games and Simulations: Genres, Examples, and Evidence**.

D'AMBROSIO, Beatriz S. REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], p. 32, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2007vn32. Disponível em: <https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/312>. Acesso em: 8 jul. 2024.

DEAR, Ian C. B; KEMP, Peter. **The Oxford Companion to Ships and the Sea**. 2006.

DE LUNETTA, Avaetê; GUERRA, Rodrigues. Metodologia da pesquisa científica e acadêmica. **Revista OWL (OWL Journal)-Revista Interdisciplinar de Ensino e Educação**, v. 1, n. 2, p. 149-159, 2023. Disponível em: <https://www.revistaowl.com.br/index.php/owl/article/view/48>. Acesso em: 04 fev de 2024.

FELIPE, Pérola Diana Gomes. **Matemática de al-biruni a partir do documento canon masudicus: uma produção de histórias em quadrinhos**. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, p. 190, 2023.

GOMES, Anna Beatriz de Andrade; SOUSA, Giselle Costa de. APONTAMENTOS DE TEMAS GEOMÉTRICOS PARA ATIVIDADES-HISTÓRICAS-COM-TECNOLOGIAS. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 22, p. 117–130, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i22.4701. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4701>. Acesso em: 15 maio. 2023.

GOMES, Anna Beatriz de Andrade; SOUSA, Giselle Costa de. Timetoast Timeline como proposta para linha do tempo interativa e uso em Educação Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 23, p. 626–640, 2021b. DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.5040. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5040>. Acesso em: 15 maio. 2023

GUILLEMIN, A. **El mundo físico: gravedad, gravitación, luz, calor, electricidad, magnetismo, etc.** Barcelona : Montaner y Simón, 1882.

HADLEY, George. **A description of a new instrument invented by John Hadley for taking the latitude or other altitudes at sea: with directions for its use with George Hadley.** Londres: produzido pelo autor. 1734.

HADLEY, J. **An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles.** Philosophical Transactions. The Royal Society. Vol. 37. p. 341-356. (1732). Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1731.0061>

HADLEY, J. **The Description of a new instrument for taking angles.** Philosophical Transactions. The Royal Society. Vol. 37. p. 147-157. (1731). Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1731.0025> . Acesso em: 10 de set. de 2022.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de Física: óptica e física moderna.** São Paulo: Editora LTC. 2010.

History of Science Museum. **Animate It – Octant.** Youtube, 8 de janeiro de 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iiCY94LMBVg>. Acessado dia: 01 de agosto de 2023.

HOHENWARTER, Markus. **Geogebra.** Versão 5.0.216.0. 20 de março de 2016. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 31 de janeiro de 2024.

KING, Henry C. **History of the Telescope.** London: Griffin, 1955.

LIMA, Amanda Cardoso Benicio de; SOARES, Kawoana da Costa .; ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Conhecimentos mobilizados a partir dos aspectos históricos e matemáticos das duas réguas para cálculo (1639) de William Oughtred. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 258–274, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.7971. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/7971>. Acesso em: 29 jan. 2024.

LIMA, Amanda Cardoso Benicio de; SOARES, Kawoana da Costa; ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Primeiras impressões contextuais das duas réguas para cálculo de William Oughtred (1574-1660) na interface entre História e ensino de Matemática. **REVISTA MATEMÁTICA E CIÊNCIA: construção, conhecimento e criatividade**, v. 4, n. 2, p. 47-66, 2021. Disponível em:

<https://periodicos.pucminas.br/index.php/matematicaeciencia/article/view/27601/1914>
1. Acesso em: 2 fev de 2024.

NORIE, John William. **New and complete epitome of practical navigation**. Londres: produzido pelo autor. 1852.

OLIVEIRA, Gisele Pereira. **A articulação entre história da Matemática e tecnologias digitais via Objeto de Aprendizagem para mobilização e ressignificação de conhecimentos na formação de professores**. 362f. 2023. Tese (Doutorado acadêmico) –Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2023.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis: Vozes, 2007.

PEREIRA, Ana Carolina Costa.; SAITO, Fumikazu Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 5, n. 14, p. 109–122, 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, [S. l.], v. 13, n. 25, p. 342–372, 2019. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/2164>. Acesso em: 2 fev. 2024.

PEREIRA, A. C. C.; BATISTA, A. N. S.; OLIVEIRA, G. P. Novas configurações do laboratório de ensino de trigonometria a partir da incorporação da tecnologia articulada a história da matemática. **REnCiMa**. v. 12, n. 4, pp. 1-19, 2021. Disponível em: <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/novas-configuracoes-do-laboratorio-de-ensino-de-trigonometria-a-partir-da-incorporacao-da-tecnologia-articulada-a-historia-da-matematica/> . Acesso em: 07 ago. 2023.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; BATISTA, Antônia Naiara de Sousa; SILVA, Isabelle Coelho da. A matemática incorporada na construção do quadrante descrito na obra *Libros del Saber de Astronomía*. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.12, n. 1, p. 173-191, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n1p173/34932>. Acesso em: 2 fev. 2024.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. Sequência didática na matemática. **REI: Revista de educação do Ideau**. vol. 9. n. 17. Jan-Jun. 2013.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula**. 4ª.Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.160p.

RIBEIRO, P. H. S.; OLIVEIRA, G. P. O uso do Promptuario de John Napier (1550 – 1617) para o Ensino de Multiplicação à luz da percepção de Licenciandos da UECE. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 359–373, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.8028. Disponível em:

<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8028>. Acesso em: 29 jan. 2024.

RIGAUD, S.P. **Biographical account of John Hadley, Esq. V.P.R.S., the inventor of the quadrant, and of his brothers George and Henry**, Nautical Magazine 4. 1835.

ROYAL GREENWICH OBSERVATORY. **Britannica**, 2013. Disponível em: <https://www.britannica.com/topic/Royal-Greenwich-Observatory/additional-info#history>. Acesso em: 26 de outubro de 2023.

ROSKILL, S.W. **The War at Sea**, 1939 - 1945, vol. I, Her Majesty's Stationery Office, Londres, 1954.

SAITO, Fumikazu. INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DOS SÉCULOS XVI E XVII NA ARTICULAÇÃO ENTRE HISTÓRIA, ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA. **REMATEC**, [S. l.], v. 9, n. 16, p. 25–47, 2014. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/320>. Acesso em: 29 jan. 2024.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da S. **História e ensino de matemática: construção e uso de instrumentos de medida do século XVI**. História da Ciência e Ensino: construindo interfaces, São Paulo, v. 2, p. 75-87, 2010.

SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte. **Investigaciones en Educación Matemática**. Lima: PUCP, 2016. p. 253-291.

SCHECHNER -GENUTH, Sara.. Octant. *In: LANKFORD*. John. History of Astronomy: Na Encyclopedia. Inglaterra: Taylor & Francis, 1997.p. 373

SILVA, Alison Luan Ferreira da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano**. 2019. 246f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

SILVA, Francisco Hemerson Brito da Silva; PEREIRA, Ana Carolina Costa; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. **Alguns saberes docentes adquiridos em uma discussão sobre a medição de profundidade com o báculo de Petrus Ramus**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática: v. 8 n. 23 (2021): Número Especial - I Encontro Cearense de Educação da Matemática

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico**.23.ed. São Paulo: Cortez Editora, 2010.

SORIANO, Mariana da Silva; SILVA, Patricya Bendia Inácio da; DAMASCENO, Fernanda Barbosa. O USO DO ASTROLÁBIO NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 1–9, 2021. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/73>. Acesso em: 19 fev. 2024.

SOUSA, Giselle Costa de. História da Matemática em alianças com Tecnologias Digitais. **REMATEC**, [S. l.], v. 18, n. 44, p. e2023005, 2023. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023005.id510. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/510>. Acesso em: 5 jan. 2024.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática: reflexões e práticas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

SOUSA, Giselle Costa De; GOMES, Anna Beatriz De Andrade. Aporte para a promoção de atividades-históricas-com-tecnologia. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 5, p. 1689–1699, 2020.

STIMSON, A.. **The influence of the Royal Observatory at Greenwich upon the design of 17th and 18th century angle-measuring instruments at sea**. In: *Vistas Astronom.* v. 20. p. 123-130 (1976).

TAUB, Liba. **On Scientific Instruments**. *Studies in History and Philosophy of Science*, n.40, 2009, p.337-343. Disponível em: Acesso em: 14 Mai. 2024.

Trabalho apresentado em The National Research Council Workshop on Gaming and Simulations, October 6-7, Washington, DC. Disponível em: https://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/d_basse_080068.pdf. Acesso em: 18 fev de 2024.

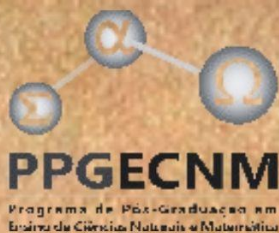
TURNER, Gerard L'E. **Antique Scientific Instruments**. Blandford Colour Series: Reino Unido, 1980.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE. **Projeto Pedagógico do Curso de Matemática Licenciatura**. Natal, 2013. Disponível em: <https://mat.ufrn.br/wp-content/uploads/2016/09/01-PPC-de-Licenciatura-em-Matem%C3%A1tica-Novo.pdf>. Acesso em: 04 fev de 2024.

ZABALA, A. **A prática educativa**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

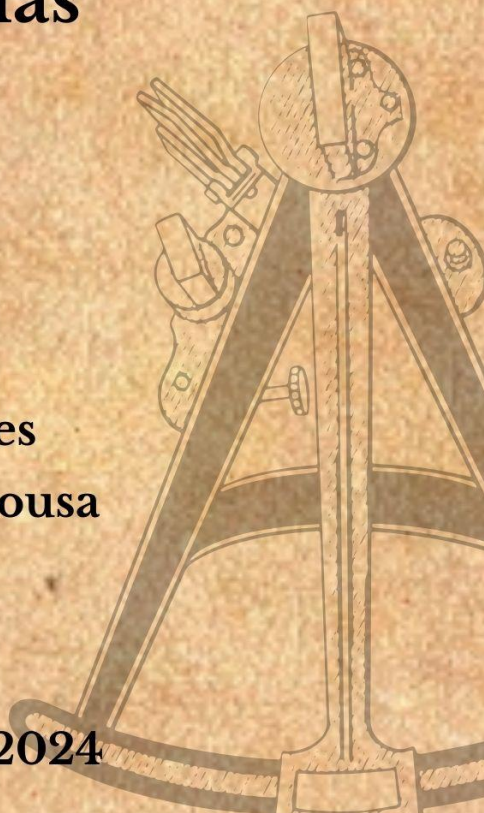
APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL



Utilizando o Octante Reflexivo para um estudo de conhecimentos de natureza geométrica por meio das atividades-históricas-com- tecnologias

Anna Beatriz de Andrade Gomes
Orientadora: Giselle Costa de Sousa

Natal/RN - 2024





ESTA OBRA ESTÁ LICENCIADA COM UMA LICENÇA CREATIVE COMMONS
ATRIBUIÇÃO-NÃO COMERCIAL-COMPARTILHA IGUAL 4.0 INTERNACIONAL.

Esta licença permite que outros façam download, compartilhem, distribuam, remixem, adaptem e criem obras derivadas a partir desta obra apenas para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos às(aos) autoras(es) e as novas criações sejam licenciadas sob os mesmos parâmetros.

TEXTO DA LICENÇA: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

Sumário

1. Apresentação do Produto Educacional....	3
a. Objetivo do Produto.....	4
b. Conhecimentos prévios.....	4
c. Cronograma sugerido.....	4
d. Conhecimentos matemáticos mobilizados.....	4
e. Recomendações ao professor.....	5
f. Habilidades da BNCC associadas às atividades.....	5
2. Estrutura das atividades	7
3. Indicação de materiais suplementares de estudos.....	8
4. Atividade 1 - Conhecendo o instrumento Octante Reflexivo.....	9
5. Atividade 2 - Explorando o instrumento Octante Reflexivo no GeoGebra.....	21

Sumário

6. Atividade 3 - Entendendo conhecimentos geométricos mobilizados no uso do instrumento Octante.....	31
7. Avaliando e socializando.....	42
8. Expectativas de respostas.....	43
9. Referências.....	58



Apresentação do Produto Educacional

O presente produto educacional é uma sequência didática organizado como um Caderno caracterizado como um conjunto de três atividade-histórica-com-tecnologia que aborda conhecimentos geométricos mobilizados durante o uso do Octante Reflexivo por meio do GeoGebra, por meio da aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, proposta por Sousa (2020).

As três atividades do Caderno são:

- **Atividade 1** - Conhecendo o Octante Reflexivo: Uma atividade composta de textos introdutórios e questionamentos iniciais para entender o contexto do uso do Octante Reflexivo e sua composição (peças), além do funcionamento do próprio instrumento.
- **Atividade 2** - Montando o Octante Reflexivo no GeoGebra: Nesta atividade, utilizando o entendimento dos alunos sobre a estrutura do Octante, iremos montar uma estrutura simulada do instrumento no GeoGebra, entendendo seus movimentos no índice ao longo do arco, os espelhos e suas limitações.
- **Atividade 3** - Entendendo os conhecimentos geométricos mobilizados no uso do Octante: Nesta atividade, iniciamos com uma pequena retomada sobre os conhecimentos de natureza geométrica no instrumento, além da demonstração da dupla

reflexão por meio da investigação.

Objetivo do Produto

Contribuir com a formação de professores de matemática quanto aos conhecimentos geométricos e tendência em Educação Matemática da aliança entre HM e TD, a partir da história do uso do Octante Reflexivo por meio de Tecnologias Digitais.

Cronograma sugerido

Atividade	Tempo previsto
Atividade 1	2 aulas/50 minutos
Atividade 2	2 aulas/50 minutos
Atividade 3	2,5 aulas/50 minutos

Conhecimentos matemáticos mobilizados

- Ângulos complementares e suplementares;
- Arcos e circunferência;
- Retas paralelas, concorrentes e perpendiculares;
- Ângulos externos e internos de triângulos;
- Bissetrizes.

Recomendações ao professor

Este caderno de atividades foi desenvolvido para ser aplicado na formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática. Entretanto, ele pode ser usado na educação básica, especialmente no 9º ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A depender da intenção da aula, o caderno de atividades pode ser utilizado separadamente e com outros recursos.

Habilidades da BNCC associadas às atividades

- **FUNDAMENTAL ANOS FINAIS:**

(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

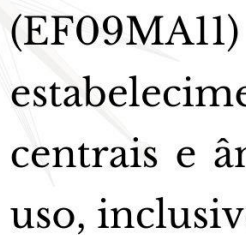
(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares.

Estrutura das atividades

O presente caderno de atividades é formado por 3 atividades, além de materiais complementares e informações gerais sobre ele. Cada atividade encontra-se estruturada da seguinte maneira:

- **Informações gerais:** - são os dados que caracterizam e diferenciam as 3 atividades, como o título, os objetivos específicos, os conhecimentos prévios e os recursos a serem utilizados.
- **Vamos explorar** - Esta subseção é destinada a contextualização do aluno quanto uma história do Octante Reflexivo numa perspectiva de desenvolvimento pelos irmãos Hadley¹. Desta forma, é composta por textos e perguntas exploratórias que, em alguns momentos, precisarão da pesquisas em sites de busca e outras explorações.
- **Vamos investigar** - Nesta subseção, teremos atividades investigativas, onde os alunos irão formular as próprias conjecturas a partir do que já sabem, sendo protagonista no decorrer da atividade, apoiando-se além da história na tecnologia, por exemplo do GeoGebra.

¹ Praticantes matemáticos que viveram entre os séculos XVI e XVII e fizeram estudos sobre o instrumento Octante Reflexivo (Rigaud, 1835).




(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.

- **ENSINO MÉDIO:**

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.



Indicação de materiais suplementares de estudos

Esta seção é destinada para indicação de materiais suplementares, caso tenha surgido interesse sobre o assunto ou tenha alguma dúvida sobre os temas abordados. Ao clicar no ícone abaixo, que nos leva a uma janela do Padlet², temos os documentos originais digitalizados e artigos sobre uma História da Matemática por trás do instrumento Octante Reflexivo e produção deste produto educacional.

O material está organizado no aplicativo Padlet, separados nas seguintes categorias:

- Materiais sobre a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais;
- Materiais sobre o uso de instrumentos matemáticos em sala de aula;
- Materiais sobre o instrumento Octante Reflexivo e os Irmãos Hadley.



Ou pelo link:

<https://padlet.com/annagomes708/materiais-suplementares-s5nu2hn7zxy909wj>

8

² Site com função de mural e organização de documentos. Link para acesso: pt-br.padlet.com.

Atividade 1 - Conhecendo o instrumento Octante Reflexivo

* Objetivos Específicos

- Entender o que é o instrumento Octante Reflexivo;
- Fazer uma associação do uso do Octante ao contexto em que foi pensado.

* Conhecimentos prévios

- Arcos e circunferências;

* Recursos necessários

- Computador com internet.



Vamos explorar

Conhecimento matemático na Inglaterra entre os séculos XVII e XVIII

A Inglaterra entre os séculos XVI e XVII, desenvolveu estudos em diversas áreas do conhecimento de maneira massiva, na intenção de fortificar a navegação e a artilharia (Santos, 2021). Isso resultou no desenvolvimento de várias pesquisas voltadas para a Matemática Prática.

Uma das organizações da época, responsável pela produção do conhecimento científico, foi a The Royal Society, uma instituição criada a partir da autorização dada pelo Rei Carlos II, rei da Inglaterra, Escócia e Islândia de 1660 até 1685.

Figura 1: Royal Society, Crane Court, perto de Fleet Street, London: o encontro



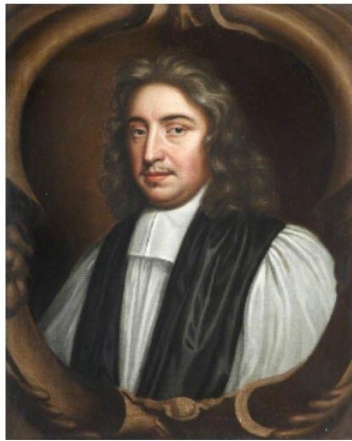
Fonte: Wellcome Collection gallery (1888)

A The Royal Society tinha como lema “*Nullius in Verba*”, expressão que significa “Nas palavras de ninguém”. A sociedade tinha como membros nomes como: Robert Moray (1609-1673), John Wilkins (1614-1672), Isaac Newton (1643-1727), John Hadley (1682-1744), entre outros.

Na sociedade, haviam pesquisadores de várias áreas do conhecimento como Astronomia, Filosofia, Engenharia, Física, e, dentre eles, alguns praticantes matemáticos.

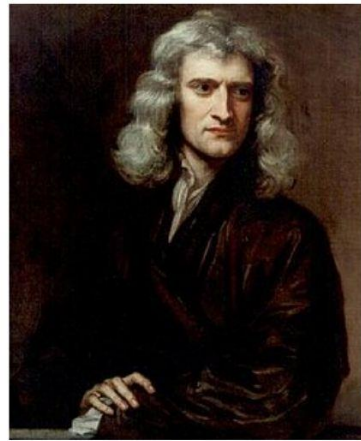
Figura 2: Imagens de alguns participantes da *The Royal Society*

John Wilkins (1614-1672)



Fonte: Wadham College (1670)

Isaac Newton (1643-1727),



Fonte: Godfrey Kneller (1689)

John Hadley (1682-1744)



Fonte: Rigaud (1835)

Utilizamos o termo praticantes matemáticos, para alguns dos membros, pois, segundo Saito (2019), a Matemática só chegou a ser institucionalizada como área do conhecimento no século XIX.

Bloco de tarefas 1

A partir da leitura do texto e utilizando sites de busca, responda as seguintes perguntas:

1. Por qual motivo a Inglaterra, entre os séculos XVI e XVII, tinha a intenção de desenvolver estudos para fortificar a navegação e artilharia?
2. O que podemos entender por “Matemática prática”, citada no fim do primeiro parágrafo?
3. Qual a função da *The Royal Society* e quando surgiu?
4. Quais os critérios para ser um membro da *The Royal Society* na época?
5. Que interpretação podemos fazer a partir do lema da *The Royal Society*?

6. Dos membros apresentados no texto anteriormente, você conhece algum deles? Se a resposta for sim, quais?

7. Pesquisa algumas das contribuições e/ou estudos de cada um dos estudiosos citados.

8. Dos membros citados, em quais áreas conhecidas hoje eles fizeram estudos?

9. No fim do último parágrafo, há uma citação de Saito (2019), que fala sobre a Matemática só ter sido institucionalizada no século XIX. Como eram feitos estudos na área da matemática que conhecemos hoje em dia se ela não era considerada uma área do conhecimento específica?

Vamos Investigar

O que é um Octante Reflexivo?

Octante Reflexivo é um instrumento marítimo utilizado na navegação para calcular a altitude entre um astro e o nível do mar ou entre dois astros, permitindo medir ângulos de até 90°. O Octante possui um arco com comprimento igual a metade de um quadrante. É produzido a partir de um material feito de latão e possui dois espelhos fixados, que permitem tomar a altitude por meio de uma dupla reflexão.

Figura 3: O instrumento Octante Reflexivo



Fonte: Associação Nacional de Cruzeiros



Para entender melhor o funcionamento do Octante, veja o seguinte vídeo. Nele, Dadi Burch, diretor da Starpath School of Navigation em Seattle, mostra com mais detalhes a estrutura do Octante Reflexivo e como posicioná-lo para tomar os ângulos. Para acessar, é só ler o QR CODE.

Em 1731, John Hadley (1682-1744) publicou trabalhos, juntamente com seus irmãos George Hadley (1685-1798) e Henry Hadley (1697-1771), sobre as propriedades mobilizadas no uso Octante Reflexivo. Thomas Godfrey (1704-1749) também desenvolveu, na Filadélfia, um instrumento muito parecido com o Octante, quase na mesma época que o John

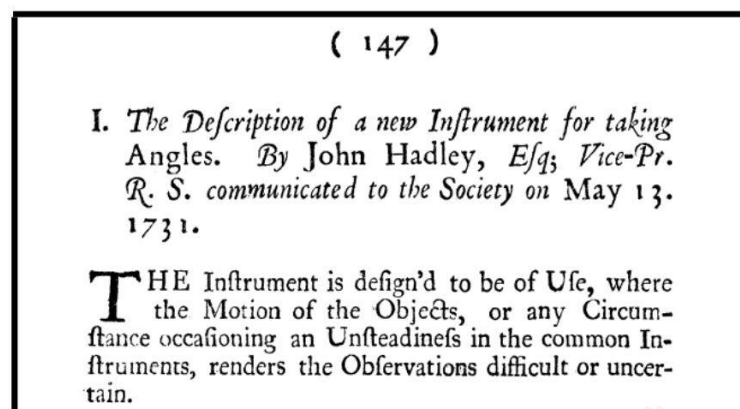
14 Hadley, entretanto, Godfrey vendeu a patente para a *The*

Royal Society, que tinha John Hadley como um de seus vice-presidentes, dando os créditos para ele pela invenção e mostrando a influência da sociedade na época.

Os irmãos Hadley possuem 3 publicações registradas, que temos conhecimento até agora, sobre o Octante Reflexivo, sendo elas:

1. O artigo nomeado por: *The description of a new instrument for taking angles.*

Figura 4: Parte da capa do artigo *The description of a new instrument for taking angles.*



Fonte: J. Hadley (1731, p.147)

O trabalho consiste em um artigo publicado pelo John Hadley em 1731 na revista da *The Royal Society*. Nele, J. Hadley trata sobre algumas das propriedades físicas e matemáticas mobilizadas pelos autores para a produção do instrumento, ou seja, o que é necessário para o seu funcionamento.

2. O artigo nomeado por: *An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles. Philosophical Transactions.*

Figura 5: Parte da capa do artigo publicado por J. Hadley em 1732

(341)

I. *An Account of Observations made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in pursuance of an Order made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for taking Angles, described in Philosophical Transactions, Numb, 420. By John Hadley, Esq; Vice-President of the Royal Society.*

IN May, 1731, I communicated to the Society the Description of a new Instrument for taking Angles, and produced a Specimen of an Instrument made accordingly. Several of the Gentlemen

Fonte: J. Hadley (1732, p.341)

No segundo trabalho, publicado por John Hadley em 1732, temos um relato sobre uma viagem feita exclusivamente para testar o instrumento. Nele, temos tabelas (Ver Figura 6) e anotações feitas pelos participantes da viagem, que incluía tanto os irmãos Hadley quanto alguns membros da *The Royal Society*, como Mr. James Bradley (1693-1762) e Dr. Edmond Halley (1656-1742).

Figura 6: Tabela com anotações com o uso do instrumento

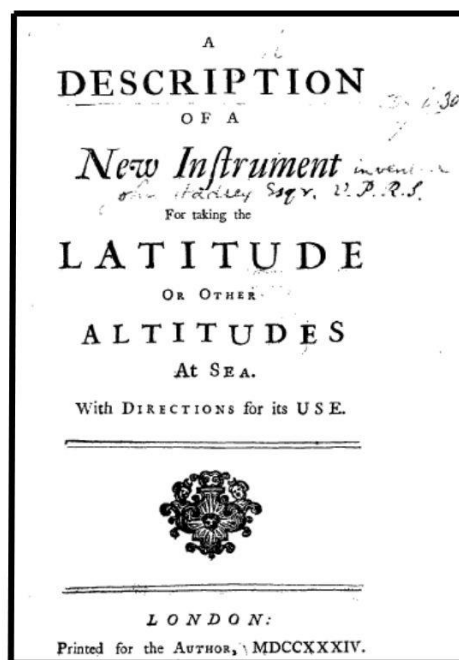
Time by Watch.	True Time.	True Alt. of the Sun's lower Limb from the visible Horizon.	Refracti-on, add.	App ^r Alt. of the Sun's lower Limb from the visible Ho-rizon.	Altitude of the Sun's lower Limb observed.	Errors of the In-strument subtract.	Observed Altitude of the Sun's lower Limb corrected.	Errors of Observati-on.	
7 52 18	01 18	21 28	21 2	15 21	30 36	22 36 00	1 4 30	21 31 30	+0 54
54 18	03 18	45 43	2 13	47 56	52 00	1 4 30	47 30	-0 26	
55 40	04 40	57 25	2 12	59 37	23 04 00	1 4 30	59 30	-0 07	
58 22	07 22	20 34	2 09	22 43	30 00	1 5 15	22 24 45	+2 02 Uncertain.	
8 02 51	11 51	58 46	2 06	23 00	52 24	04 00	1 5 15	58 45	-2 07
09 19	18 19	23 53	2 00	55 26	25 00 00	1 5 30	23 54 30	+0 56	
13 10	22 10	24 25	35 1	57 24	27 32	32 00	1 5 30	24 26 30	-1 02
14 45	23 45	38 43	1 56	40 39	45 00	1 5 30	39 30	+1 09	
16 55	25 55	56 24	1 55	58 19	26 03 00	1 5 30	57 30	-0 49	
19 05	28 05	14 34	1 53	25 16	27 22 00	1 5 30	25 16 30	+0 03	
22 57	31 57	46 14	1 51	48 05	52 00	1 5 30	46 30	-1 35	
25 05	34 05	26 03	35 1	49 26	05 24	27 10 00	1 5 30	26 04 30	-0 54
26 45	35 45	16 50	1 48	18 08	22 00	1 5 30	16 30	-1 38	
28 20	37 20	29 54	1 47	31 41	35 00	1 5 30	29 30	-2 12	

Fonte: J. Hadley (1732)

A tabela apresenta as observações feitas durante a viagem, como o tempo de observação, a refração adicional, a altitude tomada pelo instrumento, os erros, dentre outros dados.

3. O livro intitulado: *A description of a new instrument invented by John Hadley for taking the latitude or other altitudes at sea: with directions for its use with George Hadley.*

Figura 7: Capa do livro escrito por George Hadley em 1734



Fonte: G. Hadley (1734, s.p.)

No terceiro documento, temos um livro escrito por George Hadley em 1734, que apresenta informações sobre o manuseio do instrumento, para que, ao utilizá-lo, seja possível ter observações mais precisas. Além disso, G. Hadley também trás as vantagens do uso do instrumento, principalmente em relação aos outros instrumentos da época, dentre elas:

- O balanço da navegação, em alguns momentos, influencia muito no resultado de outros instrumentos, enquanto no Octante, não tem tanto problema (Ver GIF animado do sextante, que possuía uma mecânica parecida com o Octante, clicando [aqui](#));
- A dificuldade de outros instrumentos (que necessitam do horizonte para tomar observações) em alinhar a observação com astros como o sol, visto que, estão a uma distância muito grande e, em alguns momentos, a luz vinda dos mesmos podem atrapalhar. No Octante, é possível usar os óculos de proteção e, com os espelhos, ter uma visão melhor dos astros;
- Facilidade da utilização do instrumento, visto que ele não exige tanta postura como os outros, pois para o seu manuseio, é necessário apenas que posicione o instrumento com o arco para baixo, perpendicular ao piso do navio.

Bloco de tarefas 2

ENTENDENDO A ESTRUTURA DO OCTANTE

Vamos produzir um mural relacionando os elementos estruturantes do instrumento Octante, com as suas imagens e definições. Para tanto, iremos separar 5 grupos e cada um terá o acesso ao link na plataforma Padlet, com os mesmos elementos.

Com acesso a plataforma, deverá ser realizado o trabalho de juntar os elementos, reunindo em grupos os elementos que se relacionam. Para isso, basta selecionar o elemento com e arrastá-lo para onde desejar, desde que os elementos correspondentes sejam agrupados.

A partir do texto e dos trechos lidos anteriormente, em conjunto com o mural feito sobre a estrutura do Octante, responda as seguintes indagações.

1. Qual o conceito de altitude?
2. Porque encontrar a altitude durante a navegação pode ser útil?
3. Qual seria o conceito de distância angular?
4. Para você, o que remete a palavra *Octante* no nome do instrumento?
5. Para você, qual seria o motivo da palavra *Reflexivo* no nome do instrumento?
6. Qual seria a diferença entre o Octante, Sextante e o Quadrante?

7. Baseando-se nas vantagens apresentadas por George Hadley, podemos afirmar que o Octante era o instrumento mais exato da época?

8. Se utilizássemos o Octante para tomar altitudes hoje, ele poderia apresentar resultados semelhantes aos instrumentos de navegação mais atuais?

9. Há alguma possibilidade de utilizarmos o Octante para tomar outras distâncias angulares além da do Horizonte com o sol?

Atividade 2 - Explorando o Octante Reflexivo no GeoGebra

* Objetivos Específicos

- Entender o funcionamento do Octante por meio do GeoGebra;
- Identificar os elementos estruturantes do Octante com apoio dos recursos do GeoGebra.

* Conhecimentos prévios

- Arcos e circunferências;
- Pontos;
- Retas concorrentes e paralelas.

* Recursos necessários

- Computador com internet.

Vamos explorar

Para este bloco de atividades, iremos buscar entender o funcionamento do Octante Reflexivo por meio do GeoGebra. Para isso, teremos a disposição a seguinte estrutura inicial no próprio *software*.

Figura 8: Interface inicial do GeoGebra com os elementos para a construção do Octante.

SIMULADOR DO OCTANTE

Autor: Anna Beatriz

<input type="radio"/>	Z = (-4.1457605354826, -2.5061293627484)
<input type="radio"/>	K = (0.5670323065364, -2.5361819547845)
<input checked="" type="radio"/>	A = (-1.7278929034902, 3.105509186531)
<input checked="" type="radio"/>	B = (-3.6813113858343, -0.7193661635134)
<input checked="" type="radio"/>	C = (0.2404560982496, -0.7052140566501)
<input checked="" type="radio"/>	R = (-0.9755836902368, 2.0971982200916)
<input checked="" type="radio"/>	M = (-2.6794589894364, 2.1277485452573)
<input checked="" type="radio"/>	G = (-12.0428670731066, 9.0016098497029)
<input checked="" type="radio"/>	Y = (-0.0581224895673, -0.8525501849745)
<input checked="" type="radio"/>	X = (-3.3565724734566, -0.8936786747202)



Fonte: Elaborado pelas autoras no GeoGebra

Para acessar a estrutura inicial do Octante, disponível no arquivo GeoGebra, clique no seguinte ícone:



Ou pelo link:


<https://www.geogebra.org/m/zfhdu3vg>

22

Agora, com a estrutura aberta, siga os seguintes comandos no quadro:

Bloco de tarefas 3

Passo 1: Abrir a estrutura inicial do Octante para editar. Para isso:

- Identifique 3 pontos  no canto superior direito, e clique neles;
- Clique na opção *Abrir com GeoGebra App*.

Passo 2: Abrir janela de ferramentas, caso não esteja aberta.

- Identifique do lado esquerdo da tela a opção ferramentas



Passo 3: Criar o arco \widehat{BAC} do Octante .

- Na aba de ferramentas, clicar em Círculos > Arco Circular
- Clicar no ponto A;
- Clicar no ponto B;
- Clicar no ponto C.



Passo 4: Criar os segmentos de reta \overline{XA} e \overline{YA} .


- Nas ferramentas, clicar nas opções segmento
- Clicar no ponto X;
- Clicar no ponto A.



Em seguida, com a opção de segmento ativada:

- Clicar no ponto Y;
- Clicar no ponto A.

Passo 5: Mudar as cores dos segmentos \overline{XA} e \overline{YA} e do arco \widehat{BAC} .

- Com a ferramenta mover  selecionada, clique no segmento \overline{XA} .
- Clicar com o botão direito do mouse em cima do segmento e selecionar a opção configurações.
- Na parte superior da janela de configurações, clicar na aba *Cor*;
- Selecionar algum tom de marrom (sugestão: Marrom, 153, 51, 0 (#993300));

Mover

- Depois disso, fechar a janela de configurações do segmento apertando x no canto superior da janela de configurações.
- Fazer o mesmo procedimento com o segmento \overline{YA} e com o arco \widehat{BAC} .

Passo 6: Aumentar a espessura dos segmentos \overline{XA} e \overline{YA} e do arco \widehat{BAC} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no segmento XA;
- Clicar com o botão direito do mouse em cima do segmento e selecionar a opção configurações;
- Na parte superior da janela de configurações, clicar na aba *Estilo*;
- Em *Espessura de linha*, aumentar a barra de espessura ao máximo (13).
- Fazer o mesmo procedimento com o segmento \overline{YA} e o arco \widehat{BAC} .


Passo 7: Ocultar o rótulo dos segmentos \overline{XA} e \overline{YA} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no segmento \overline{XA} ;
- Clicar com o botão direito do mouse em cima do ponto e selecionar a opção configurações;
- Desmarcar a opção *Exibir rótulo*.
- Fazer o mesmo procedimento com o segmento \overline{YA} .


Passo 8: Ocultar os pontos X e Y.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto X;
- Clicar com o botão direito do mouse em cima do ponto e selecionar a opção configurações;
- Desmarcar a opção *Exibir objeto*.
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto Y.

Passo 9: Inserir um ponto D no arco \widehat{BAC} .

- Selecionar a ferramenta Ponto  ;
- Clicar no arco \widehat{BAC} , em qualquer lugar de sua extensão.

Passo 10: Criar uma semirreta que inicie em D e continue, passando por A.

- Selecionar a ferramenta Semirreta  ;
- Clicar no ponto D;
- Clicar no ponto A.

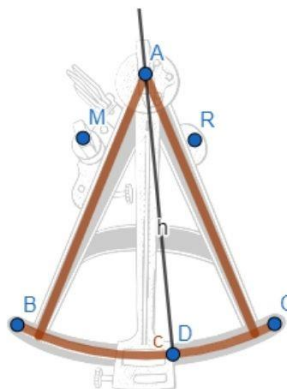
Passo 11: Ocultar o rótulo do segmento \overline{DA} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no segmento \overline{DA} ;
- Clicar com o botão direito do mouse em cima de qualquer lugar do segmento e selecionar a opção configurações;
- Desmarcar a opção *Exibir rótulo*.

Passo 12: Posicionar a semirreta DA, alinhando-a com o espelho do Octante de acordo com a imagem.

- Com a ferramenta Mover selecionada, mova o ponto D pela extensão do arco BAC de maneira que fique alinhada com o espelho do Octante;
- Na Figura 9, temos um exemplo que pode ser utilizado como referência para a realização do passo.

Figura 9: Indicador do ângulo alinhado ao espelho que recebe a primeira imagem do Octante



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra (2024)

Passo 13: Crie dois pontos que delimitem o espelho em A.


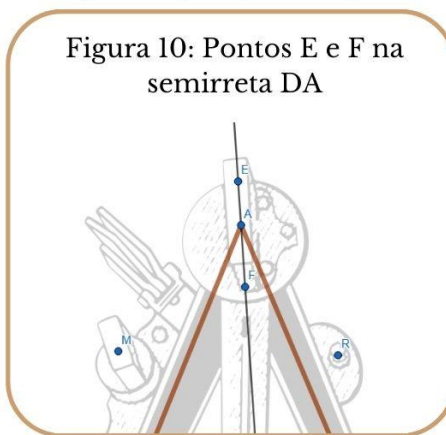
- Para melhor visualização, dê o zoom focando no ponto A, usando a função , no canto inferior direito da tela do GeoGebra;
- Com a ferramenta Ponto selecionada, acrescente um ponto que inicie no espelho do Octante, em A. Esta ação criará o ponto E;
- Ainda com a ferramenta Ponto selecionada, acrescente um ponto no final da imagem do espelho do Octante, também em A. Esta ação criará o ponto F;
- Utilize a Figura 10 para a posição dos pontos:

Figura 10: Pontos E e F na semirreta DA



Fonte: Elaborado pela autora no Geogebra (2024)

Passo 14: Renomear os pontos E e F para E1 e E2, respectivamente.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto E;
- Aperte com o botão direito em cima do ponto E e selecione a opção de configurações;
- Na aba *Básico* das configurações, altere o nome E para E1;
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto F, alterando o seu nome para E2.

Passo 15: Fixar os pontos E1 e E2.

- Com a ferramenta Mover selecionada, clique no ponto E1;
- Aperte com o botão direito em cima do ponto E e selecione a opção Fixar Objeto;
- Caso não apareça a opção, selecione configurações;
- Marcar a opção *Fixar Objeto*;
- Fazer o mesmo procedimento com o ponto E2.

26

Passo 16: Criar um segmento $\overline{E_1E_2}$.

- Com a ferramenta Segmento selecionada, clique no ponto E_1 e depois no ponto E_2 ;

Passo 17: Mudar a cor do segmento $\overline{E_1E_2}$ e ocultar o seu rótulo.

- Com a ferramenta Mover selecionada, aperte no segmento E_1E_2 ;
- Clicar em qualquer lugar do segmento com o botão direito do mouse e selecionar a opção configurações;
- Em seguida, na parte superior da janela de configurações, clicar na aba *Cor*;
- Selecionar uma cor chamativa que destaque o segmento (Sugestão: Verde 0, 255, 0 (#00FF00)).

Passo 18: Mover o ponto D ao longo do arco \widehat{BAC} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, aperte no ponto D e segure o botão esquerdo do mouse por cima dele, movimentando-o ao longo do arco \widehat{BAC} .

A partir da estrutura do Octante Reflexivo montada, responda:

1. Qual elemento estruturante do Octante representa o ponto R?
2. Qual elemento estruturante do Octante representa o segmento AD?
3. Qual elemento estruturante do Octante representa o segmento E_1E_2 ?
4. Quais conhecimentos geométricos foram possíveis perceber durante a montagem do simulador do Octante no GeoGebra?

Vamos investigar

Com o simulador do Octante Reflexivo montado, vamos investigar os conhecimentos matemáticos que garante o seu funcionamento. Para isso, faremos as seguintes construção.

Bloco de tarefas 4

Passo 19: Criar o segmento \overline{RG} .

- Inicialmente, localize o ponto G, representado no centro de uma estrela;
- Com a ferramenta de segmento selecionada, clique no ponto R e, em seguida, no ponto G.

Passo 20: Ocultar o rótulo do segmento \overline{RG} e tracejar a sua linha.

- Com a ferramenta Mover selecionada,, clique no segmento \overline{RG} ;
 - Clicar com o botão direito do mouse em cima de qualquer lugar do segmento \overline{RG} e selecionar a opção configurações;
 - Desmarcar a opção Exibir rótulo;
 - Em seguida, selecionar na janela de configurações, a aba Estilo
- Estilo: ;
- Clicar no quadrado ao lado , selecionando a primeira opção para tracejar o segmento \overline{RG} .

Passo 21: Criar a semirreta \overline{RM} .

- Com a ferramenta de semirreta selecionada, clique no ponto R e, em seguida, no ponto M.

Passo 22: Ocultar o rótulo da semirreta RM e tracejar a sua linha.

- Realizar o mesmo procedimento do Passo 20, agora com a semirreta RM.

Passo 23: Criar uma interseção entre o segmento \overline{RG} e o segmento $\overline{E_1E_2}$.

- Com a ferramenta Mover selecionada, mova o ponto G de maneira que o segmento \overline{RG} intersekte o segmento $\overline{E_1E_2}$;
- Em seguida, selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos



- Clique no segmento \overline{RG} e, em seguida, no segmento $\overline{E_1E_2}$. Isso criará um ponto E.

Passo 24: Criar semirreta \overline{DM} .

- Com a ferramenta semirreta selecionada, clique no ponto D e, em seguida, no ponto M.

Passo 25: Criar a semirreta \overline{ME} .

- Com a ferramenta semirreta selecionada, clique no ponto M e, em seguida, no ponto E.

Passo 26: Ocultar o rótulo da semirreta \overline{ME} e tracejar a sua linha.

- Realizar o mesmo procedimento do Passo 20, agora com a semirreta \overline{ME} .

Passo 27: Mova o ponto D ao longo do arco \widehat{BAC} .

- Com a ferramenta Mover selecionada, mova o ponto D.

Atividade 3 - Identificando os conhecimentos de natureza geométrica mobilizados no uso do instrumento Octante

* Objetivos Específicos

- Entender os conhecimentos matemáticos mobilizados no Octante;
- Associar as propriedades de um Octante Reflexivo com os conhecimentos geométricos;

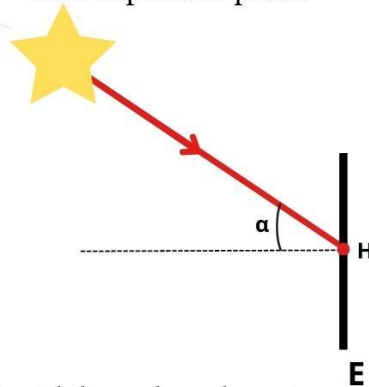
* Conhecimentos prévios

- Triângulos;
- Ângulos internos e externos;
- Retas paralelas e concorrentes.

* Recursos necessários

- Computador com internet;
- Papel;
- Caneta ou lápis.

Figura 12: Feixe incidente tocando uma superfície plana

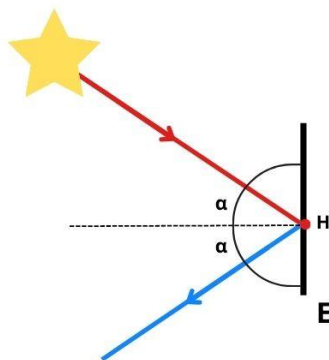


Vale lembrar que o astro emite vários feixes de luz, no exemplo ao lado estamos utilizando apenas um feixe, porém, vale para todos que cheguem até a superfície plana.

Fonte: Elaborada pela autora

Assim, depois que o feixe incidente (linha vermelha na Figura 12) toca o espelho, ele é ricocheteada, como se fosse “mandado de volta”, em outra direção. Dessa forma, emitindo o feixe refletor (linha azul na Figura 13). No seguinte esquema, temos a relação entre o feixe incidente e refletor. Halliday e Resnick (2010) apontam que, num espelho plano, os feixes incidentes e refletores formam o mesmo ângulo.

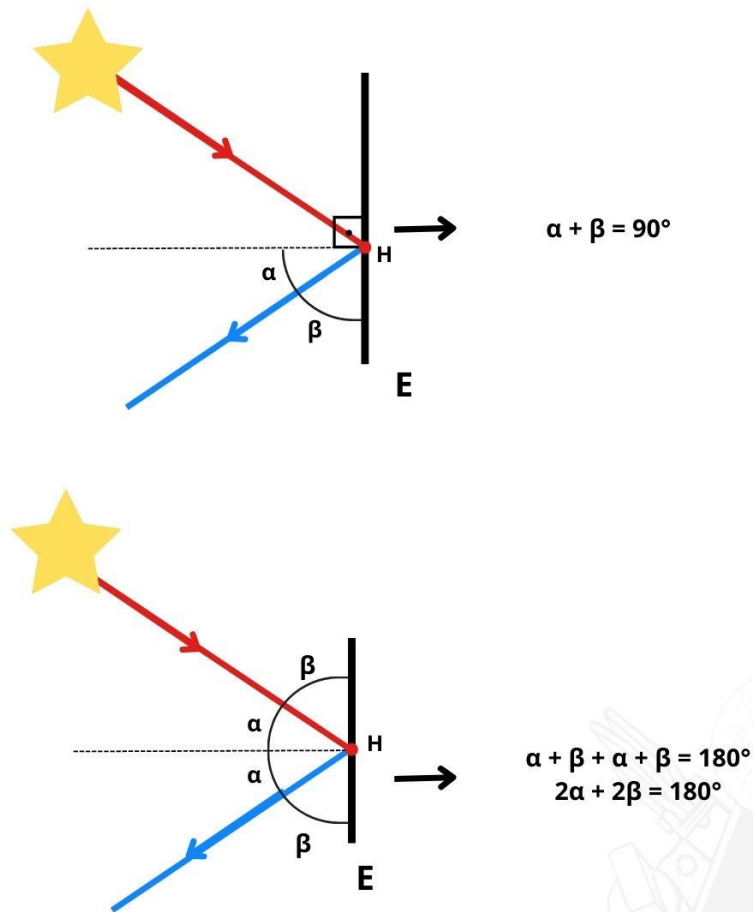
Figura 13: Feixe incidente e feixe refletor em uma reflexão



Fonte: Elaborado pela autora

A linha pontilhada no esquema anterior é uma reta perpendicular, ou seja, forma um ângulo de 90° e, além disso, como o espelho é plano, ele possui 180° . Dessa forma, temos que:

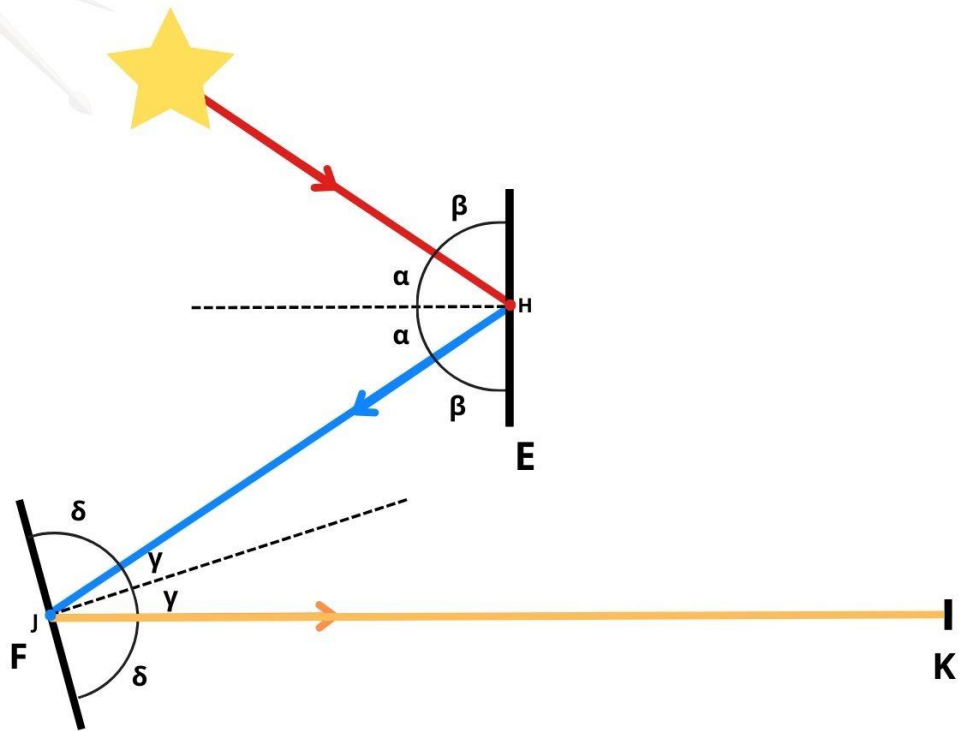
Figura 14: Relação dos ângulos na reflexão de feixes luminosos



Fonte: Elaborado pela autora

É isso que acontece durante o uso do Octante Reflexivo. O feixe de luz, que vem do astro escolhido para tomar a distância angular, vai em direção ao primeiro espelho, formando dois ângulos iguais entre os feixes incidentes e refletores (2α).

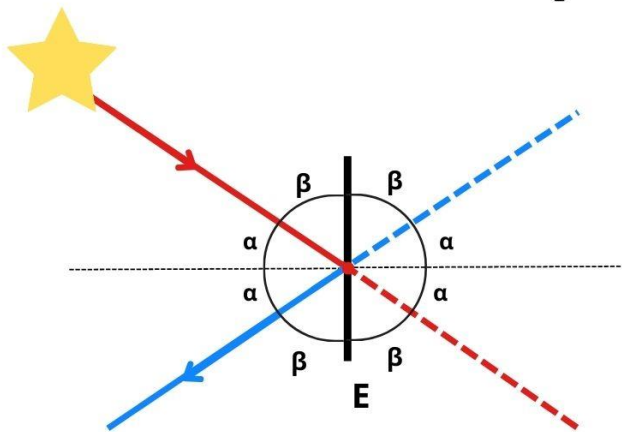
Figura 15: Relação dos ângulos na reflexão de feixes luminosos entre os dois espelhos do Octante Reflexivo



Fonte: Elaborado pela autora

Além disso, também temos a projeção da energia dos feixes projetadas atrás do espelho. Essa projeção é a imagem do objeto representada no espelho. Ela forma a mesma angulação dos feixes incidentes e refletores, formando o seguinte esquema.

Figura 16: Ângulos formados na reflexão de feixes luminosos e suas respectivas reflexões



Fonte: Elaborado pela autora

Bloco de tarefas 5

A partir do texto e do momento de socialização, lembrando sobre conceitos físicos da reflexão, responda as indagações a seguir:

1. Na matemática, como nomeamos o ângulo α e β formado pelos feixes, considerando que sua soma dá 90° ?

2. E quando somamos 2α e 2β , como os nomeamos, sabendo que sua soma resulta em 180° ?

3. Se tivéssemos um caso onde o ângulo formado por um feixe de incidência fosse de 36° , quais seriam os ângulos formados pelo feixe refletor? Faça um esquema no papel, semelhante a Figura 16, representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

4. Caso com ângulo complementar a α fosse **igual** 27° , quais seriam os valores dos ângulos do mesmo esquema? Faça outro esquema, semelhante a Figura 16, representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

5. Considere a situação do exemplo anterior, onde o espelho plano esteja em uma posição inclinada. Mudaria a forma que os ângulos formados pelo feixe refletor e o incidente? Faça um novo esquema, semelhante a Figura 15, representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

6. O que acontece quando o feixe refletor do espelho E vai em direção ao espelho F?

7. Depois de formado o feixe refletor do espelho F, o que acontece com ele? Para onde é direcionado?

8. Os ângulos formados na primeira reflexão do espelho E têm alguma influência nos ângulos formados na reflexão do espelho F?

Vamos investigar

Votando para a montagem do Octante Reflexivo, feita na atividade anterior, e utilizando os conceitos de ótica geométrica retomado, respondam aos seguintes questionamentos.

Bloco de tarefas 6

1. Se considerarmos o ponto G como o astro utilizado para observar a altitude, qual a sequência de segmentos que representam os seus feixes de luz na observação até o olhar do Observador?

2. Com a ferramenta Mover no GeoGebra, posicione o ponto G de uma maneira que exista a interseção do segmento GR e E1E2 e fique posicionado no ponto A. Agora, encontre os outros ângulos presentes de acordo com os ângulos incidentes e refletores e opostos pelo vértice. Se precisar, faça um esquema no papel. Apenas marque os ângulos. Iremos nomeá-los nas tarefas a frente.

- Consideremos inicialmente o triângulo MER. Denomine os ângulos formados pelo vértice de:
 - $\hat{E} = 2\beta$;
 - $\hat{R} = \theta$;
 - $\hat{M} = \varepsilon$.

3. O que significa o ângulo θ no esquema do simulador do Octante?

4. Qual a expressão que representa a soma dos ângulos internos do triângulo MER?

5. Agora, consideremos como 2δ , o suplementar do ângulo ε . Apresente a equação que representa essa afirmação.

6. Substitua o valor de ε na equação do item 4, baseando-se na expressão encontrada no item anterior.

7. Com a equação obtida no item 6, que representa a soma dos ângulos internos, simplifique e encontre a nova expressão para a distância angular (θ). Ou seja, podemos dizer, até agora que θ é igual a qual expressão?

- Consideremos o triângulo DME. Se 2δ é o suplementar de ε e ele também é suplementar dos ângulos formados pelos feixes de reflexão, então, podemos nomear os ângulos de DME de:

- $\hat{M} = \delta + \varepsilon$;

- $\hat{E} = \beta$;

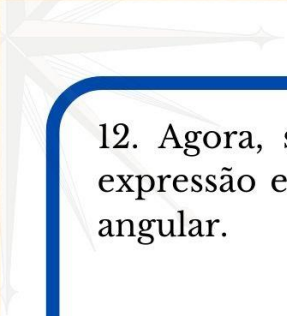
- $\hat{D} = \varphi$.

8. O que significa o ângulo φ no esquema do simulador do Octante?

9. Qual a expressão que representa a soma dos ângulos internos do triângulo DME?

10. Substituindo ε pela expressão encontrada no item 5 do questionário, como podemos reescrever a equação encontrada antes? Depois disso, simplifique-a.

11. Utilizando a equação encontrada anteriormente, obtenha uma expressão igual a δ .



12. Agora, substitua essa expressão igual a δ no valor da expressão encontrada no item 7, que representa a distância angular.

13. Qual o significado desta expressão para a tomada de ângulos no Octante? Qual a relação entre o ângulo tomado no Octante (δ) e o valor da distância angular (θ)?

Avaliando e socializando

Iremos fazer a produção de mapa mental, que consiste em uma sistematização de ideias, oriundas da investigação feita, organizadas de maneira visual. O mapa mental deverá abordar o que tratamos sobre o contexto histórico-matemático onde foi desenvolvido o Octante, a influência dos irmãos Hadley sobre isso, bem como o seu entendimento sobre os conhecimentos matemáticos por ele mobilizados, , assim como sobre sua visão do uso da história da matemática aliada às tecnologias digitais.

Questionário final para avaliar o Produto Educacional

Finalizamos o caderno de atividades! 😊

Agora, responda o seguinte questionário e nos diga o que achou do Produto Educacional. Durante o questionário, é possível falar sobre suas impressões e sugestões sobre ele. Para acessá-lo, basta ler o QR Code.



Expectativa de resposta para as atividades

Nesta seção, apresentaremos a expectativa de resposta para cada um dos questionamentos/investigações presente nas 3 atividades, organizadas na ordem em que aparecem no caderno de atividades.

ATIVIDADE 1

 Vamos explorar

Bloco de tarefas 1

1. O que podemos entender por “Matemática prática”, citada no fim do primeiro parágrafo?

A matemática prática refere-se aos conhecimentos matemáticos utilizados na prática de outras áreas do conhecimento, como a física, engenharia, astronomia.

2. Qual a função da *The Royal Society* e quando surgiu?

A *The Royal Society* é uma sociedade científica que surgiu em 1660 e é uma instituição responsável por promover e divulgar pesquisas de diversas áreas do conhecimento.

3. Quais os critérios para ser um membro da *The Royal Society* na época?

Para ser um membro da *The Royal Society*, era necessário ser natural ou residir no Reino Unido, República da Irlanda ou nos territórios da Commonwealth e terem feito uma contribuição substancial à melhoria dos conhecimentos científicos, incluindo a ciência matemática, ciência da engenharia e a ciência médica.

4. Qual a interpretação podemos fazer a partir do lema da *The Royal Society*?

O lema da sociedade é *Nullius in verba*, que significa “Nas palavras de ninguém” ou “Acredite nas palavras de ninguém”. Ou seja, resistir a qualquer autoridade e sempre verificar de qualquer afirmação que lhe seja passado.

5. Dos membros apresentados no texto anteriormente, você conhece algum deles? Se a resposta for sim, quais deles?

Resposta Pessoal

6. Pesquise algumas das contribuições e/ou estudos de cada um dos estudiosos citados.

John Wilkins (1614-1672): Estudioso inglês que também procurava a compreensão dos princípios do mundo material, além de ter proposto um sistema universal de medição semelhante ao sistema métrico.

Isaac Newton (1643-1727): Estudioso inglês das áreas conhecidas hoje como Matemática, física, astronomia e teologia. Bastante conhecido pelas contribuições nas leis do movimento e gravitação universal.

John Hadley (1682-1741): Estudioso inglês, membro da *The Royal Society* e responsável pela contribuição na área da navegação, astronomia, matemática e engenharia.

7. Dos membros citados, em quais áreas eles fizeram estudos?

John Wilkins: Filosofia Natural

Isaac Newton: Matemática, física, teologia, astronomia.

John Hadley: Matemática, astronomia, física e engenharia.

8. No fim do último parágrafo, há uma citação de Saito (2019), que fala sobre a matemática só ter sido institucionalizada no século XIX. Como eram feitos estudos na área da matemática que conhecemos hoje em dia se ela não era considerada uma área do conhecimento específica?

Antes do século XIX, não havia uma área especificamente da Matemática e de outras ciências como Física e Biologia. Ou seja, eram feitos estudos entre o desenvolvimento de outras áreas, e, junto a isso, eram realizados estudos sobre de modo que auxiliassem as pesquisas da época.

Bloco de tarefas 2

Vamos investigar

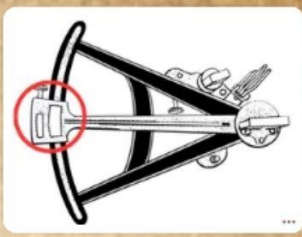
Link de acesso para modelo do mural no Padlet:

<https://padlet.com/annagomes708/mural-grupo-1-hhzt5s3iemtlztn>

A seguir, um exemplo de uma possível organização do mural:

45

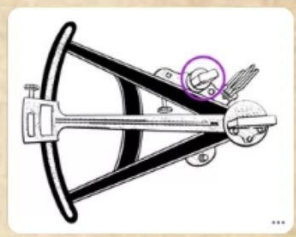
Indicador de ângulos



It hath an Index turn, being on a Pin in the Center, the other End finding on the graduated Arch, where it marks the Divisions.

Possui um Índice girando sobre um Pino no centro, as outras Extremidades deslizando sobre o arco graduado, onde marcam as divisões

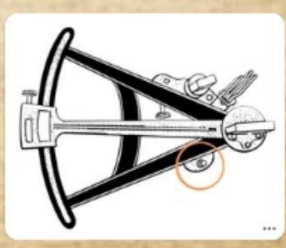
Espelho que recebe a segunda imagem do astro



to be observed by, and to reflect it to another lesser Piece of Looking glass, placed close to the Limb, that Part of it only which is next the Plane of the Instrument bear the name of the second Glass, and so far as it may be seen at any time be the perpendicular to the Plane of the Instrument.

Para ser observado e refleti-lo para outro pedaço menor de espelho, colocado em um dos membros, apenas aquela parte que fica próxima ao plano do instrumento sendo mercúrio, e assim colocado em seu braço de latão, que pode a qualquer momento ser colocado perpendicularmente ao plano do instrumento

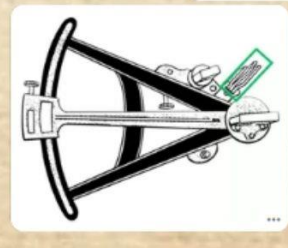
Pino observador



There is used a Sight-Vane, which may be fixed from one Limb to the other, according to which Observation is intended: In it are made two Holes, to direct the placing the Eye: the one being just so high above

É utilizado um pino-observador, que pode ser puxado de um membro para o outro, conforme a observação é utilizada: nele são feitos dois furos, para direcionar a colocação do olho: aquele que está tão alto

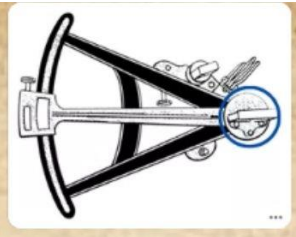
Vidros protetores



There are two dark Glasses, set in Frames of Brass fixed to a Pin, the one lighter, the other darker, so as at pleasure to be turned, either of them, or both together, as the Sun's Brightness may require.

Há dois vidros escuros, colocados em molduras de latão fixadas a um alfinete, um mais claro, o outro mais escuro, para que possam ser virados com prazer, qualquer um deles, ou ambos juntos, conforme o brilho do Sol exigir

Espelho que recebe a primeira imagem do astro



At the Center is placed a Piece of Looking-glass quicksilver'd, set in Brass, and fixed on the Index, perpendicular to the Plane of the Instrument. This Glass is to receive the first Image of the Sun, or other Object.

No centro é colocado um espelho de mercúrio, colocado em baixo e fixado no índice, perpendicular ao plano do instrumento, este vidro deve receber a primeira imagem do sol ou de outro objeto.

1. Qual o conceito de altitude?

A altitude pode ser definida entre a altura ou distância de qualquer objeto em relação ao nível do mar.

2. Porque encontrar a altitude durante a navegação pode ser útil?

Nos documentos escritos pelos irmãos Hadley não há nenhuma informação sobre a utilidade da altitude na navegação, porém, como a altitude refere-se a altura dos astros, é possível que os navegadores utilizassem de astros referências como o sol ou constelações para encontrar o tempo de distância ou do dia por meio de tabelas astronômicas.

3. Qual seria o conceito de distância angular?

É a distância entre dois pontos na unidade de medida de ângulos.

4. Para você, o que remete a palavra *Octante* no nome do instrumento?

A resposta é pessoal, porém, espera-se que o aluno entenda que Octante vem da palavra oitante e, o Octante mede 45° , ou seja, um oitavo de um círculo.

5. Para você, qual seria o motivo da palavra *Reflexivo* no nome do instrumento?

A resposta é pessoal, porém, espera-se que o aluno entenda que o instrumento leva o nome de reflexivo por utilizar da reflexão entre espelhos durante o seu uso.

6. Qual seria a diferença entre o Octante, Sextante e o Quadrante?

Os três utilizam do mesmo princípio. O que os diferenciam é o tamanho do arco. Enquanto o Octante possui 45° , o Sextante possui 60° e o Quadrante, 90° .

7. Baseando-se nas vantagens apresentada por George Hadley, podemos dizer que o Octante era o instrumento mais exato da época?

Não é possível afirmar que o Octante era o instrumento era o mais exato da época, apenas que possuía mais vantagens com os instrumentos que foram comparados por George Hadley, que não foram citados, apenas sabendo que eram os do século XVI e XVII.

8. Se utilizássemos o Octante para tomar altitudes hoje, ele poderia apresentar resultados semelhantes aos instrumentos mais atuais?

Pode ser que ele apresente algum resultado próximo, porém, não necessariamente igual. É importante deixar claro para o aluno que, por mais que o Octante tivesse uma boa exatidão na época, pode ser que essa exatidão era o máximo que eles conseguiam durante o século XVII e que o seu aprimoramento pode auxiliar na construção dos instrumentos de hoje.

9. Há alguma possibilidade de utilizarmos o Octante para tomar outras distâncias angulares além da do Horizonte com o sol ou entre dois astros?

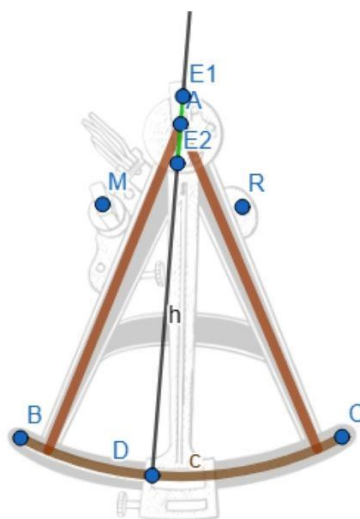
Por mais que possa existir distância angular entre dois pontos, o Octante precisa de uma certa distância para a sua utilização, considerando que é utilizado para pegar pontos do horizonte e de astros. Alguns exemplos que podem ser feitos é, por exemplo, a distância angular que defina a altura de uma montanha que dê para ser vista de uma certa distância ou exemplos similares.

ATIVIDADE 2

Vamos explorar

Bloco de tarefas 3

Ao fim da tarefa de construção do bloco de tarefas 3, espeça-se que os alunos obtenham a seguinte estrutura no GeoGebra:



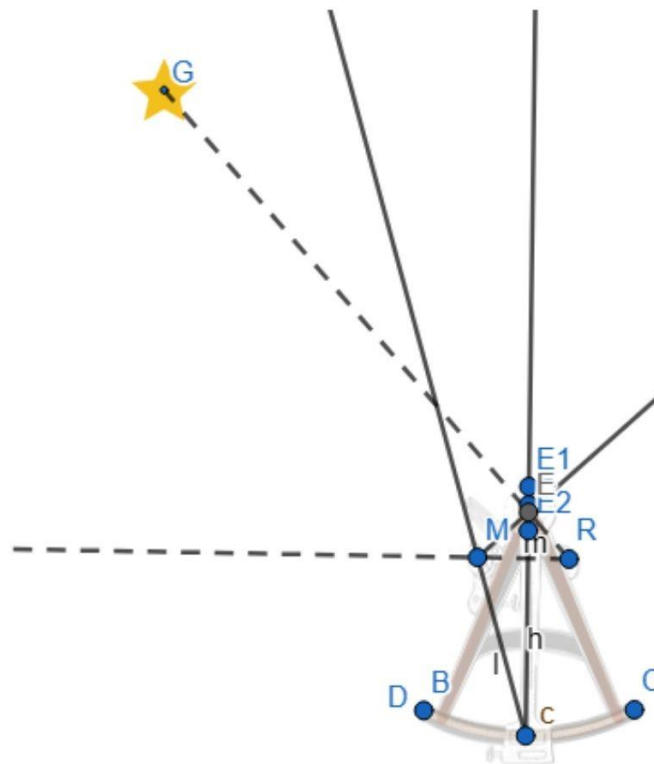
1. Qual elemento estruturante do Octante representa o ponto R?
O pino observador
2. Qual elemento estruturante do Octante representa o segmento AD?
O indicador de ângulos
3. Qual elemento estruturante do Octante representa o segmento E1E2?
O espelho que recebe a primeira imagem do Octante.

4. Quais conceitos geométricos foram possíveis perceber durante a montagem do simulador do Octante no GeoGebra?

Na construção do Octante, são utilizados pontos, semirretas, segmentos de reta, interseção entre dois objetos e arco circular.

Bloco de tarefas 4

Ao fim da tarefa de construção do bloco de tarefas 4, espere-se que os alunos obtenham a seguinte estrutura no GeoGebra:



50

ATIVIDADE 3

Vamos explorar

Bloco de tarefas 5

1. Na matemática, como nomeamos o ângulo β formado pelos feixes, considerando que sua soma com α dá 90° ?

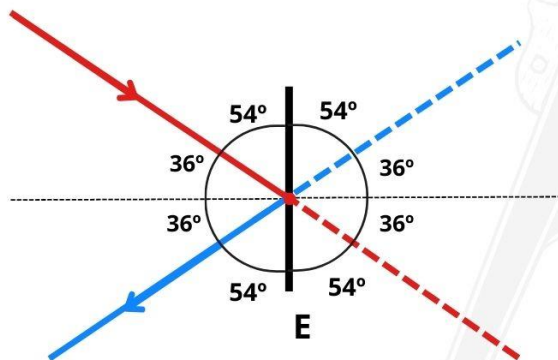
β e α são chamados de complementares.

2. E quando somamos 2α e 2β , como os nomeamos, sabendo que sua soma resulta em 180° ?

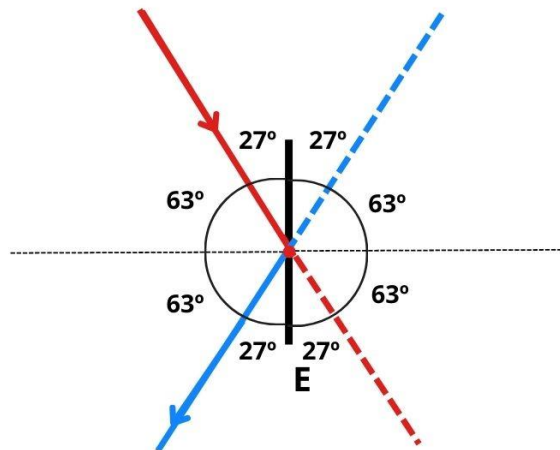
2α e 2β são chamados de suplementares.

3. Se tivéssemos um caso onde o ângulo formado por um feixe de incidência fosse de 36° , quais seriam os ângulos formados pelo feixe refletor? Faça um esquema representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.

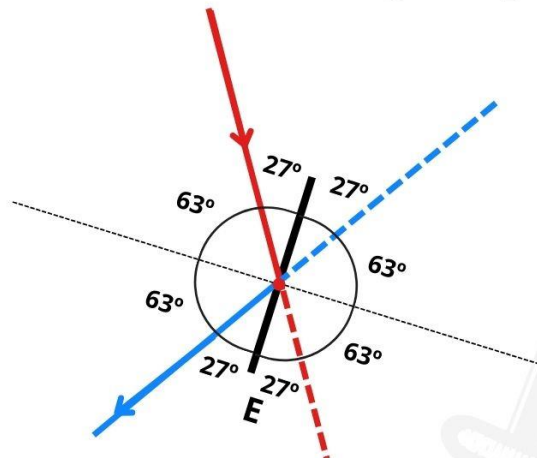
Espera-se que o aluno monte o seguinte ou similar a esse esquema:



4. Caso com ângulo complementar a α fosse igual 27° , quais seriam os valores dos ângulos do mesmo esquema? Faça um esquema representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa. Espera-se que o aluno monte o seguinte ou similar a esse esquema:



5. Considere a situação do exemplo anterior, onde o espelho plano esteja em uma posição inclinada. Mudaria a forma q forma que os ângulos formados pelo feixe refletor e o incidente? Faça um esquema representando a reflexão, considerando os ângulos formados pelos feixes incidentes e refletores e a sua imagem representativa.



Nesse caso, espera-se que o aluno entenda que não importa a inclinação de um espelho, se o ângulo de incidência, ângulo de reflexão ou seus complementares forem definidos, os outros relacionados a eles também não mudarão. Também é bom para o aluno perceber que, durante a reflexão, o espelho funciona como uma bissetriz, cortando um ângulo em duas partes iguais.

6. O que acontece quando o feixe refletor do espelho E vai em direção ao espelho F?

O feixe refletor do espelho E acaba virando para o espelho F, o feixe incidente, pois, ele recebe esse feixe e o reflete, criando o feixe refletor.

7. Depois de formado o feixe refletor do espelho F, o que acontece com ele? para onde é direcionado?

Ele vai em direção ao olhar do Observador, no pino observador.

8. Os ângulos formados na primeira reflexão do espelho E tem alguma influência nos ângulos formados na reflexão do espelho F?

Sim, pois, dependendo da angulação do feixe incidente e refletor no espelho E, ele chegará de outra forma no espelho F, ou seja, com outra angulação.

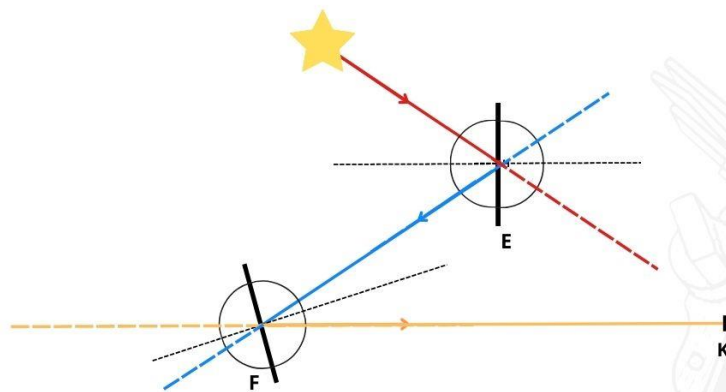
Vamos investigar Bloco de tarefas 6

1. Se considerarmos o ponto G como o astro utilizado para observar a altitude, qual a sequência de segmentos que representam os seus feixes de luz na observação até o olhar do Observador?

Seria a sequência: GE -> EM -> MR

2. Com a ferramenta Mover no GeoGebra, posicione o ponto G de uma maneira que exista a interseção do segmento GR e E1E2 e fique posicionado no ponto A. Agora, encontre os outros ângulos presentes de acordo com os ângulos incidentes e refletores e opostos pelo vértice. Se precisar, faça um esquema no papel. Apenas marque os ângulos. Iremos nomeá-los nos exercícios a frente.

Espera-se que o aluno faça um esquema semelhante ao já citado no texto exploratório, porém, sem nomear os ângulos.



3. O que significa o ângulo θ no esquema do simulador do Octante?

Representa a distância angular tomada entre o horizonte e um astro ou entre dois astros, ao se utilizar o instrumento.

4. Qual a expressão que representa a soma dos ângulos internos do triângulo MHR?

Ao somarmos os ângulos internos de MHR, temos a equação:

$$2\beta + \theta + \varepsilon = 180^\circ$$

5. Agora, consideremos como 2δ o suplementar do ângulo ε , apresente a equação que representa a afirmação anterior.

Como 2δ e ε são suplementares, então sua soma é igual a 180° , ou seja:

$$2\delta + \varepsilon = 180^\circ$$

6. Substitua o valor de ε na equação do item 4, baseando-se na expressão encontrada no item anterior.

Se $2\delta + \varepsilon = 180^\circ$, então $\varepsilon = 180^\circ - 2\delta$, então, ao substituindo o valor de ε , temos:

$$\begin{aligned} 2\beta + \theta + \varepsilon &= 180^\circ \\ 2\beta + \theta + (180^\circ - 2\delta) &= 180^\circ \end{aligned}$$

7. Com a equação obtida no item 6, que representa a soma dos ângulos internos, simplifique e encontre a nova expressão para a distância angular (θ). Ou seja, podemos dizer, até agora que θ é igual a qual expressão?

Simplificando a equação, temos:

$$\begin{aligned} 2\beta + \theta + (180^\circ - 2\delta) &= 180^\circ \\ 2\beta + \theta + 180^\circ - 2\delta &= 180^\circ \\ 2\beta + \theta + 180^\circ + 180^\circ - 2\delta &= 180^\circ + 180^\circ \\ 2\beta + \theta - 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

Como queremos encontrar uma expressão igual a θ , temos que:

$$2\beta - 2\delta = \theta$$

8. O que significa o ângulo φ no esquema do simulador do Octante?

Representa o ângulo que está sendo mostrado no Indicador do instrumento.

9. Qual a expressão que representa a soma dos ângulos internos do triângulo DMH?

Usando os ângulos determinados antes, temos:

$$\delta + \varepsilon + \beta + \varphi = 180^\circ$$

10. Substituindo ε pela expressão que representa o valor de ε , encontrada no item 6 do questionário, como podemos reescrever a equação encontrada acima? Depois disso, simplifique-a.

A equação encontrada no item 6 foi: $\varepsilon = 180^\circ - 2\delta$.

Portanto, quando substituimos o valor na equação do item 8, podemos obter:

$$\begin{aligned}\delta + \varepsilon + \beta + \varphi &= 180^\circ \\ \delta + (180^\circ - 2\delta) + \beta + \varphi &= 180^\circ \\ \delta + 180^\circ - 2\delta + \beta + \varphi &= 180^\circ \\ \delta + 180^\circ + 180^\circ - 2\delta + \beta + \varphi &= 180^\circ + 180^\circ \\ \delta - 2\delta + \beta + \varphi &= 0 \\ -\delta + \beta + \varphi &= 0\end{aligned}$$

10. Substituindo ε pela expressão encontrada no item 5 do questionário, como podemos reescrever a equação encontrada antes? Depois disso, simplifique-a.

Como:

$$-\delta + \beta + \varphi = 0$$

11. Utilizando a equação encontrada anteriormente, obtenha uma expressão igual a δ .

Como:

$$-\delta + \beta + \varphi = 0$$

Então:

$$\beta + \varphi = \delta$$

12. Agora, substitua essa expressão igual a δ no valor da expressão encontrada no item 7, que representa a distância angular.

A equação encontrada no item 7 é: $2\beta - 2\delta = \theta$.

Portanto, ao substituiremos pela equação encontrada no item anterior, temos:

$$2\beta - 2(\beta + \varphi) = \theta$$

$$2\beta - 2\beta + 2\varphi = \theta$$

$$2\varphi = \theta$$

13. Qual o significado desta expressão para a tomada de ângulos no Octante? Qual a relação entre o ângulo tomado no Octante (δ) e o valor da distância angular (θ)?

O ângulo θ representa a distância angular e o ângulo φ representa o ângulo tomado no octante. Portanto, podemos concluir com $2\varphi = \theta$, isto é, que a distância angular pode ser definida como 2 vezes o ângulo tomado no Octante.

Referências

Associação Nacional de Cruzeiros. Disponível em: <https://www.ancruzeiros.pt/ancdrp/octante>. Acesso em: 29 de janeiro de 2024.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. Fundamentos de Física: óptica e física moderna. São Paulo: Editora LTC. 2010.

Saito, F. (2018). A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. *Eventos Pedagógicos*, 9(2), 604–618. <https://doi.org/10.30681/reps.v9i2.10087>

SANTOS, Andressa Gomes dos Santos. Instrumentos matemáticos contidos no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise de 1623*. *Revista Hipátia*, v. 6, n. 2, p. 272-282, dez. 2021. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1825>. Acesso em: 11 fev de 2024.

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática. São Paulo: Livraria Física, 2020.



APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Caro (a) participante, solicitamos sua contribuição para responder ao presente questionário, após responder a sequência didática pertencente ao Produto Educacional fruto da dissertação **UMA PROPOSTA DA ALIANÇA ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS MEDIANTE MANIPULAÇÃO DO OCTANTE REFLEXIVO DE JOHN HADLEY PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**, desenvolvida durante o mestrado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). O objetivo deste questionário é efetivar e validar o referido Produto Educacional. Não precisa se identificar.

Mestranda: Anna Beatriz de Andrade Gomes

Orientadora: Dra. Giselle Costa de Sousa

INFORMAÇÕES PESSOAIS

- 1) Qual gênero você se identifica?
 - a) Masculino.
 - b) Feminino.
 - c) Não Binário.
 - d) Prefiro não responder.
- 2) Marque a faixa etária correspondente a sua idade
 - a) Até 20 anos.
 - b) Entre 21 e 30 anos.
 - c) Entre 31 e 40 anos.
 - d) Entre 41 e 50 anos.
 - e) Entre 51 e 60 anos.
 - f) Acima de 61 anos.

FORMAÇÃO ACADÊMICA

- 3) Sobre a sua formação acadêmica, marque aquela na qual você se enquadra.
 - a) Cursando Licenciatura em Matemática.
 - b) Professor de Matemática do ensino básico.

- c) Professor do Ensino Superior.
 - d) Outro.
- 4) Caso a resposta anterior tenha sido Cursando Licenciatura em Matemática, indique o percentual de integralização do curso que tem do curso até a presente data.
- a) Menos de 30%
 - b) Entre 30% e 50%
 - c) Mais de 50%
- 5) Exerce ou já exerceu atividade docente (mesmo que ainda não graduado, pode incluir, aula de reforço e/ou atuação em programas de ensino como PIBID, RP, monitoria, entre outros)?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 6) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, qual foi (é) o seu tempo de atuação?
Em que (quais) nível (ies) de ensino?

SOBRE A ALIANÇA ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS

- 7) Você já teve algum contato com História da Matemática durante a graduação e/ou durante o seu ensino básico (fundamental e/ou médio)?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 8) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, discorra brevemente sobre como foi sua experiência com a utilização da História da Matemática nas aulas de Matemática.
- 9) Você já participou de aulas que utilizaram recursos de tecnologias digitais?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 10) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, quais ferramentas foram empregadas?
- a) Datashow
 - b) Celular ou Tablet
 - c) Internet

- 11) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM** ou **NÃO**, discorra brevemente sobre o uso de tecnologias digitais para o ensino da Matemática.

SOBRE INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

- 12) Você já conhecia algum instrumento matemático além do octante reflexivo?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 13) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, apresente qual(is) instrumento(s) matemático(s) você já conhecia.
- 14) Você considera que exista potencial didático nos instrumentos matemáticos?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 15) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM** ou **NÃO**, justifique.
- 16) O Octante Reflexivo digital desperta curiosidade em aprender mais sobre o Octante Reflexivo e John Hadley?
- a) Sim.
 - b) Não.

SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

- 17) Antes de participar da atividade, você já tinha ouvido falar no Octante Reflexivo?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 18) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, o que você já sabia sobre?
- 19) Antes de participar da atividade, você já tinha ouvido falar no John Hadley?
- a) Sim.
 - b) Não.
- 20) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, o que você já sabia sobre?
- 21) Que conhecimentos de natureza matemática identificou na manipulação digital do Octante Reflexivo?
- 22) Você acha que precisaria revisar algum conteúdo matemático que foi utilizado durante a manipulação do Octante Reflexivo Digital?
- a) Sim.

- b) Não.
- 23) Caso a resposta anterior tenha sido **SIM**, qual (is) foi (foram) o (s) conteúdo (s).
- 24) Descreva brevemente o que achou desta possibilidade de estudar Geometria a partir da manipulação digital do Octante Reflexivo.
- 25) Você considera o software utilizado para a manipulação digital do Octante Reflexivo adequado para este tipo de atividade?
- a) Sim.
- b) Não.
- 26) Caso a resposta tenha sido SIM ou NÃO, discorra um pouco sobre o software utilizado e/ou ajustes sobre este item.
- 27) Você utilizaria este Produto Educacional para dar aulas de matemática no Ensino Básico?
- a) Sim.
- b) Não.
- c) Em parte.
- 28) Justifique o item anterior.
- 29) Você recomenda o uso deste Produto Educacional para licenciandos em Matemática?
- a) Sim.
- b) Não.
- c) Em parte.
- 30) Justifique o item anterior.
- 31) Você recomenda o uso deste Produto Educacional para professores em um curso de formação inicial e/ou continuada?
- a) Sim.
- b) Não.
- c) Em parte.
- 32) Justifique a resposta do item anterior.
- 33) O Produto Educacional em questão, fruto de uma dissertação de mestrado profissional, desperta curiosidade em ler a dissertação por completo?
- a) Sim.
- b) Não.
- c) Em parte.

34) Justifique a resposta do item anterior.

SUGESTÕES OU CRÍTICAS

35) Sua contribuição é muito importante, indique mais alguma alteração, sugestão, melhorias e refinamentos ao Produto Educacional.

APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

a) (Para Maiores de 18 anos)

Esclarecimentos

Este é um convite para você participar da pesquisa: Uma proposta de aliança entre História da Matemática e Tecnologias mediante manipulação do Octante Reflexivo dos Irmãos Hadley para o ensino de Geometria na formação de professores, que tem como pesquisador responsável Anna Beatriz de Andrade Gomes.

Esta pesquisa pretende elaborar e aplicar um produto educacional voltado para a formação de professores, que alie o uso do octante reflexivo dos Irmãos Hadley com as Tecnologias Digitais para um ensino de conhecimentos geométricos; no intuito de responder à seguinte questão: Que elementos extraídos do processo de uso do Octante Reflexivo aliado às Tecnologias Digitais podem contribuir para a elaboração de um produto educacional voltado para a formação de professores de matemática com ênfase no ensino de geometria?

O motivo que nos leva a fazer este estudo se dá pela necessidade de pesquisas mais aprofundadas sobre o assunto, o que certamente trará avanços à área de pesquisa relacionada a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais e o uso de instrumentos matemáticos em sala de aula. Além disso, também propicia uma capacitação aos professores interessados em ampliar seus conhecimentos e melhorar no ensino de Geometria.

Caso decida participar, você irá participar de uma aplicação do produto educacional caracterizado como uma sequência didática, onde iremos entender como era usado Octante Reflexivo em viagens marítimas no século VXII e XVIII. Para isso, durante a aplicação desta sequência, o participante será convidado a construir um protótipo do Octante Reflexivo online por meio de instruções presentes no próprio produto e, a partir disso, entender problemas históricos. E, após a aplicação, será submetido a um questionário que pode levar de 30 a 50 minutos na intenção do participante relatar sobre sua experiência durante a aplicação e validar o produto educacional.

Durante a realização da pesquisa poderão ocorrer eventuais desconfortos e possíveis riscos como constrangimento e timidez durante a aplicação do produto educacional e no preenchimento dos formulários, alterações na autoestima provocadas pela evocação de memórias relacionadas a lembranças do período escolar ou da própria graduação. Esses riscos poderão ser minimizados com as medidas tomada pelo pesquisador como garantir um ambiente acolhedor e a não utilização das informações em prejuízo das pessoas e/ou comunidade, como a possibilidade de recusa a responder perguntas do questionário, utilização de nomes fictícios para identificar ou até mesmo outra forma de manter o anonimato dos participantes que os mesmos julguem necessários na escrita do trabalho final.

Além disso, outro possível risco identificado nesta pesquisa é o risco à imagem e identidade dos participantes da pesquisa. No intuito de minimizar esses riscos, iremos assegurar a confidencialidade e privacidade durante a pesquisa e não expor imagens que possibilitem a identificação do participante na redação do trabalho, bem como o sigilo dos dados do mesmo. Nas imagens, tentaremos ao máximo evitar que saia o rosto dos participantes nos registros, porém, caso aconteça, utilizaremos uma tarja no rosto ou em algo que possa identificar o participante por meio de

edições que projeta a identidade do mesmo. Nas repostas apresentadas pelos participantes no papel ou no questionário, serão utilizadas fotos unicamente da resposta do participante e não de qualquer identificação sua, como nome ou gênero. E, caso seja necessário, será realizada uma transcrição das respostas, para melhor entendimento do leitor.

Como benefícios da pesquisa você terá a possibilidade de repensar algumas práticas pedagógicas e incluir a História da Matemática e as Tecnologias Digitais, bem como o uso de instrumentos matemáticos em sala de aula. Além disso, o participante poderá desenvolver novas habilidades e estratégias relacionadas a sua forma de ensinar.

Em caso de complicações ou danos à saúde que você possa ter relacionado com a pesquisa, compete ao pesquisador responsável garantir o direito à assistência integral e gratuita, que será prestada como a retirada do participante durante a aplicação do produto e em casos de desconforto, indicação de um profissional da saúde.

Durante todo o período da pesquisa você poderá tirar suas dúvidas ligando para Anna Beatriz de Andrade Gomes, Terceira Travessa da Floresta, número 9, bairro Nossa Senhora da Apresentação, com e-mail: gomesbeatriz.anna@gmail.com e telefone/celular: (84) 99852-8114.

Você tem o direito de se recusar a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo para você.

Os dados que você irá nos fornecer serão confidenciais e serão divulgados apenas em congressos ou publicações científicas, sempre de forma anônima, não havendo divulgação de nenhum dado que possa lhe identificar. Esses dados serão guardados pelo pesquisador responsável por essa pesquisa em local seguro e por um período de 5 anos.

Alguns gastos pela sua participação nessa pesquisa, eles serão assumidos pelo pesquisador e reembolsado para vocês.

Se você sofrer qualquer dano decorrente desta pesquisa, sendo ele imediato ou tardio, previsto ou não, você será indenizado.

Qualquer dúvida sobre a ética dessa pesquisa, você deverá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa UFRN - Lagoa Nova Campus Central (CEP Central/UFRN) - instituição que avalia a ética das pesquisas antes que elas comecem e fornece proteção aos participantes das mesmas, no telefone (84) 9.9193-6266 (WhatsApp) ou no e-mail cepufnr@reitoria.ufrn.br. Você ainda poderá ir pessoalmente à sede do CEP, de segunda a sexta, das 08h00min às 12h00min e das 14h00min às 18h00min, localizado na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), av. Sen. Salgado Filho, 3000, bairro Lagoa Nova. Natal/RN. CEP: 59078-900. Também é possível agendar atendimento por chamada de vídeo, conforme disponibilidade da secretaria. Ou ainda, poderá contatar a Conep, Comissão Nacional de Ética em Pesquisa, através do telefone (61) 3315-5877 e do e-mail conep@saude.gov.br.

Este documento foi impresso em duas vias. Uma ficará com você e a outra com o pesquisador responsável Anna Beatriz de Andrade Gomes.

Consentimento Livre e Esclarecido

Após ter sido esclarecido sobre os objetivos, importância e o modo como os dados serão coletados nessa pesquisa, além de conhecer os riscos, desconfortos e benefícios que ela trará para mim e ter ficado ciente de todos os meus direitos, concordo em participar da pesquisa Uma proposta de aliança entre História da Matemática e Tecnologias mediante manipulação do Octante Reflexivo dos Irmãos Hadley para o ensino de Geometria na formação de professores, e autorizo a divulgação das informações por mim fornecidas em congressos e/ou publicações científicas desde que nenhum dado possa me identificar.

Natal, 15 / 04 /2024.

Assinatura do participante da pesquisa

Declaração do pesquisador responsável

Como pesquisador responsável pelo estudo Uma proposta de Produto Educacional envolvendo a manipulação digital do octante reflexivo de John Hadley (1682-1744) aliada a atividades-históricas-com-tecnologia para o ensino de geometria, declaro que assumo a inteira responsabilidade de cumprir fielmente os procedimentos metodologicamente e direitos que foram esclarecidos e assegurados ao participante desse estudo, assim como manter sigilo e confidencialidade sobre a identidade do mesmo.

Declaro ainda estar ciente que na inobservância do compromisso ora assumido infringirei as normas e diretrizes propostas pela Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde – CNS, que regulamenta as pesquisas envolvendo o ser humano.

Natal, 15 / 04 /2024.

Assinatura da pesquisadora responsável

**APÊNDICE D – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E/OU
REGISTRO DE IMAGENS
TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO DE VOZ E/OU
REGISTRO DE IMAGENS (FOTOS E/OU VÍDEOS)**

Esclarecimentos

Este é um convite para você participar da pesquisa: Uma proposta de Produto Educacional envolvendo a manipulação digital do octante reflexivo de John Hadley (1682-1744) aliada a atividades-históricas-com-tecnologia para o ensino de geometria. Tem como pesquisadora responsável Anna Beatriz de Andrade Gomes. Esta pesquisa pretende elaborar e aplicar um produto educacional voltado para a formação de professores, que alie o uso do octante reflexivo de John Hadley as Tecnologias Digitais para um ensino de conhecimentos geométricos; no intuito de responder à seguinte questão: Que elementos extraídos do processo de fabricação e uso do octante reflexivo de John Hadley (1682-1744) aliada às Tecnologias Digitais podem contribuir para a elaboração de um produto educacional voltado para a formação de professores de matemática com ênfase no ensino de geometria?. O motivo deste estudo se dá pela necessidade de pesquisas mais aprofundadas sobre o assunto, o que certamente trará avanços à área de pesquisa relacionada a aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais e o uso de instrumentos matemáticos em sala de aula. Além disso, também propicia uma capacitação aos professores interessados em ampliar seus conhecimentos e melhorar no ensino de Geometria. Gostaríamos de solicitar sua autorização para efetuar a gravação de voz e/ou o registro de fotos e/ou vídeos, concedida mediante o compromisso dos pesquisadores acima citados com os seguintes direitos:

1. Ter acesso às fotos e/ou vídeos e/ou à gravação e transcrição dos áudios;
2. Ter a garantia que as fotos e/ou vídeos e/ou áudios coletadas serão usadas exclusivamente para gerar informações para a pesquisa aqui relatada e outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas e eventos científicos;
3. Não ter a identificação revelada em nenhuma das vias de publicação das informações geradas, utilizando mecanismos para este fim (tarjas, distorção da imagem, distorção da voz, entre outros).
4. Ter as fotos e/ou vídeos e/ou áudios obtidos de forma a resguardar a privacidade e minimizar constrangimentos;
5. Ter liberdade para interromper a participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse das fotos e/ou vídeos.

Você não é obrigado a permitir o uso das suas fotos e/ou vídeos e/ou áudios, porém, caso aceite, será de forma gratuita mesmo que imagens sejam utilizadas em publicações de livros, revistas ou outros documentos científicos.

As fotos e/ou vídeos e/ou áudios coletados serão: fotos da aplicação do produto educacional e no momento de responder os questionários.

Consentimento de Autorização de Uso de Imagens (fotos e/ou vídeos)

Após ter sido esclarecido sobre as condições para a minha participação no estudo, eu, _____ autorizo o uso de:

- () Minhas imagens (fotos e/ou vídeos)
() Minha voz
() Minhas imagens (fotos e/ou vídeos) e minha voz

Natal, data _____

Assinatura do participante da pesquisa

Assinatura do pesquisador responsável

ANEXOS

ANEXO A – PARECER CONSUBSTANCIADO (COM APROVAÇÃO) DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA DA UFRN

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO GRANDE DO NORTE -
LAGOA NOVA CAMPUS
CENTRAL - UFRN



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Uma proposta de Produto Educacional envolvendo a manipulação digital do octante reflexivo de John Hadley (1682-1744) aliada a atividades-históricas-com-tecnologia para o ensino de Geometria

Pesquisador: ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 75851423.2.0000.5537

Instituição Proponente: Departamento de Matemática

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.755.137

Apresentação do Projeto:

A pesquisa em tela, associada a um trabalho de Mestrado conduzido no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPgECM) do Centro de Ciências Exatas e da Terra (CCET) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) tem por objetivo produzir um produto educacional abordando a manipulação do Octante Reflexivo de John Hadley (1682-1744) no ensino de Geometria, na forma de uma sequência didática. A execução da pesquisa prevê a utilização desse produto educacional por 30 estudantes de Graduação, os quais responderão a um questionário de avaliação na esteira da integração entre o Octante Reflexivo e as tecnologias digitais.

Objetivo da Pesquisa:

O objetivo da pesquisa é -Elaborar e aplicar um produto educacional voltado para a formação de professores, que alie o uso do octante reflexivo de John Hadley as Tecnologias Digitais para o ensino de conhecimentos geométricos.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

O protocolo de pesquisa, em sua versão atual, elenca como riscos aos participantes de

Endereço: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Av. Sen. Salgado Filho, 3000.

Bairro: Lagoa Nova

CEP: 59.078-900

UF: RN

Município: NATAL

Telefone: (84)99193-6266

E-mail: cepufrn@reitoria.ufrn.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO GRANDE DO NORTE -
LAGOA NOVA CAMPUS
CENTRAL - UFRN



Continuação do Parecer: 6.755.137

pesquisa a ocorrência de eventuais desconfortos [...] como constrangimento e timidez durante a aplicação do produto educacional e no preenchimento dos formulários, alterações na autoestima provocadas pela evocação de memórias relacionadas a lembranças do período escolar ou da própria graduação. Outro risco identificado diz respeito à imagem e identidade dos participantes de pesquisa, para os quais são descritas medidas a serem tomadas para mitigá-los.

Quanto aos benefícios proporcionados pela pesquisa, espera-se principalmente o desenvolvimento de habilidades e estratégias relacionadas à utilização de tecnologias digitais na pedagogia envolvendo a História da Matemática.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Sem comentários ou considerações adicionais.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Todos os Termos de apresentação obrigatória e os documentos necessários à realização da pesquisa foram devidamente anexados.

Recomendações:

Cumpra ao pesquisador enviar os relatórios parcial e final da pesquisa. Ver modelos em <www.cep.propesq.ufrn.br>.

Qualquer mudança no protocolo aprovado, antes deverá ser solicitada através de emenda, via Plataforma Brasil. Ver manuais em <www.cep.propesq.ufrn.br>.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

A pesquisadora responsável apresentou ao Comitê de Ética em Pesquisa do Campus Central da UFRN carta respostas às pendências e inadequações identificadas na avaliação da versão anterior do protocolo de pesquisa. Após análise criteriosa, verificou-se que a versão atual do protocolo de pesquisa atende de forma satisfatória tais pendências e inadequações.

Diante do exposto, o parecer é por aprovar o protocolo de pesquisa pela inexistência de óbices

Endereço: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Av. Sen. Salgado Filho, 3000.
Bairro: Lagoa Nova **CEP:** 59.078-900
UF: RN **Município:** NATAL
Telefone: (84)99193-6266 **E-mail:** cepufrn@reitoria.ufrn.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO GRANDE DO NORTE -
LAGOA NOVA CAMPUS
CENTRAL - UFRN



Continuação do Parecer: 6.755.137

éticos a sua realização.

Considerações Finais a critério do CEP:

Em conformidade com a Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde - CNS e com o Manual Operacional para Comitês de Ética - CONEP é da responsabilidade do pesquisador responsável:

1. Elaborar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido — TCLE — em duas vias, rubricadas em todas as suas páginas e assinadas, ao seu término, pelo convidado a participar da pesquisa, ou por seu representante legal, assim como pelo pesquisador responsável, ou pela (s) pessoa (s) por ele delegada(s), devendo as páginas de assinatura estar na mesma folha (Res. 466/12 - CNS, item IV.5d);
2. Desenvolver o projeto conforme o delineado (Res. 466/12 - CNS, item XI.2c);
3. Apresentar ao CEP eventuais emendas ou extensões com justificativa (Manual Operacional para Comitês de Ética - CONEP, Brasília - 2007, p. 41);
4. Descontinuar o estudo somente após análise e manifestação, por parte do Sistema CEP/CONEP/CNS/MS que o aprovou, das razões dessa descontinuidade, a não ser em casos de justificada urgência em benefício de seus participantes (Res. 446/12 - CNS, item III.2u);
5. Elaborar e apresentar os relatórios parciais e finais (Res. 446/12 - CNS, item XI.2d);
6. Manter os dados da pesquisa em arquivo, físico ou digital, sob sua guarda e responsabilidade, por um período de 5 anos após o término da pesquisa (Res. 446/12 - CNS, item XI.2f);
7. Encaminhar os resultados da pesquisa para publicação, com os devidos créditos aos pesquisadores associados e ao pessoal técnico integrante do projeto (Res. 446/12 - CNS, item XI.2g) e,
8. Justificar fundamentadamente, perante o CEP ou a CONEP, interrupção do projeto ou não

Endereço: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Av. Sen. Salgado Filho, 3000.

Bairro: Lagoa Nova **CEP:** 59.078-900

UF: RN **Município:** NATAL

Telefone: (84)99193-6266

E-mail: cepufrn@reitoria.ufrn.br

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO GRANDE DO NORTE -
LAGOA NOVA CAMPUS
CENTRAL - UFRN**



Continuação do Parecer: 6.755.137

publicação dos resultados (Res. 446/12 – CNS, item XI.2h).

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2243423.pdf	19/03/2024 16:20:19		Aceito
Outros	cartadeanuencia_modificado.pdf	19/03/2024 16:17:04	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projetodemestrado_modificado2.pdf	19/03/2024 16:15:58	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Brochura Pesquisa	folhadeidentificacao_modificado2.pdf	19/03/2024 16:15:42	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Solicitação registrada pelo CEP	cartaderespostaaspendencias.pdf	19/03/2024 16:15:19	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMADEPESQUISA_modificado.pdf	19/03/2024 16:15:03	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Folha de Rosto	folhaderosto_modificado.pdf	19/03/2024 16:11:42	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Outros	questionario_modificado.docx	28/12/2023 16:19:24	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLEMENORES_modificado.docx	28/12/2023 16:18:52	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLEMAIORES_modificado.docx	28/12/2023 16:17:47	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TALE.docx	13/11/2023 11:34:45	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	termodeautorizacaoevoz.docx	09/11/2023 13:38:11	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Outros	questionario.docx	07/11/2023 23:41:44	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	DECLARACaODECOMPROMISSOeTICODENaOINiCIODAPESQUISA.pdf	07/11/2023 23:38:44	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito

Endereço: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Av. Sen. Salgado Filho, 3000.

Bairro: Lagoa Nova **CEP:** 59.078-900

UF: RN **Município:** NATAL

Telefone: (84)99193-6266

E-mail: cepufrn@reitoria.ufrn.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO GRANDE DO NORTE -
LAGOA NOVA CAMPUS
CENTRAL - UFRN



Continuação do Parecer: 6.755.137

Declaração de Pesquisadores	TERMODECONFIDENCIALIDADEASSI NADO.pdf	07/11/2023 23:37:04	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLEMENORES.docx	07/11/2023 23:36:24	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLEMAIORES.docx	07/11/2023 23:36:19	ANNA BEATRIZ DE ANDRADE GOMES	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

NATAL, 10 de Abril de 2024

Assinado por:

PAULA FERNANDA BRANDÃO BATISTA DOS SANTOS
(Coordenador(a))

Endereço: Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Av. Sen. Salgado Filho, 3000.

Bairro: Lagoa Nova

CEP: 59.078-900

UF: RN

Município: NATAL

Telefone: (84)99193-6266

E-mail: cepufrn@reitoria.ufrn.br

Página 05 de 05