



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de
Computação



Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável Discreto no Tempo

Isael Calistrato Jácome

Orientador: Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Natal, RN, fevereiro de 2013

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede
Catalogação da Publicação na Fonte

Jácome, Isael Calistrato.

Controle adaptativo por modelo de referência e estrutura variável discreto no tempo / Isael Calistrato Jácome - Natal, RN, 2013.

71 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação Engenharia Elétrica e da Computação.

1. Controle adaptativo - Dissertação. 2. Sistemas com estrutura variável - Dissertação. 3. Controle adaptativo por modelo de referência e estrutura variável - Dissertação. I. Araújo, Aldayr Dantas de. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 681.51

Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável Discreto no Tempo

Isael Calistrato Jácome

Dissertação de Mestrado aprovada em 05 de fevereiro de 2013 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo (orientador) DEE/UFRN

Prof. Dr. Samaherni Moraes Dias DEE/UFRN

Prof. Dr. Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz DEE/UFRN

Prof. Dr. Darlan Alexandria Fernandes DEE/UFPB

Aos meus pais - Messias e Eunice
À minha avó - Alice
Aos meus irmãos - Isac e Isabelly

Agradecimentos

A Deus por sempre iluminar meus caminhos e fazer possível a realização desse trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Aldayr Dantas de Araújo, sou muito grato pela orientação.

Aos Professores e amigos do LACI que sempre me ajudaram e contribuíram para a conclusão desse trabalho.

Aos meus Pais, por me darem todo o apoio necessário e incentivo para a conclusão desse trabalho.

Aos Professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN.

Aos demais colegas de Graduação e Pós-Graduação, pelas críticas e sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Com o avanço da tecnologia, sistemas embarcados utilizando técnicas adaptativas estão sendo utilizados com mais frequência. Uma dessas técnicas é o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC). A implementação dessa técnica em sistemas embarcados, requer a consideração de um período de amostragem que se não for levado em consideração, pode afetar de maneira negativa a performance do sistema e até mesmo levá-lo a instabilização.

Este trabalho propõe uma análise de estabilidade do VS-MRAC para o caso discreto para uma planta SISO linear, invariante no tempo, de grau relativo unitário. O objetivo é analisar a influência do período de amostragem no desempenho do sistema, e a relação desse período com o fenômeno de “*chattering*” e instabilização do sistema.

Palavras-chave: Controle Adaptativo, Sistemas com Estrutura Variável, Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável.

Abstract

With the technology progress, embedded systems using adaptive techniques are being used frequently. One of these techniques is the Variable Structure Model-Reference Adaptive Control (VS-MRAC). The implementation of this technique in embedded systems, requires consideration of a sampling period which if not taken into consideration, can adversely affect system performance and even takes the system to instability.

This work proposes a stability analysis of a discrete-time VS-MRAC accomplished for SISO linear time-invariant plants with relative degree one. The aim is to analyse the influence of the sampling period in the system performance and the relation of this period with the chattering and system instability.

Keywords: Adaptive Control, Variable Structure Systems, Variable Structure Model-Reference Adaptive Control.

Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	iii
1 Introdução	1
2 Sistemas com Estrutura Variável	6
2.1 Existência do Modo Deslizante	6
2.2 Descrição Geral	7
2.3 Método do Controle Equivalente	9
2.4 Solução por Filippov	10
3 MRAC e VS-MRAC	12
3.1 Estrutura de Controle do MRAC	13
3.2 Equação do Erro	15
3.3 Simulações do MRAC	17
3.4 Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável .	20
3.5 Simulações do VS-MRAC	21
4 Prova de estabilidade do VS-MRAC no caso contínuo	26
4.1 Planta de Primeira Ordem	26
4.1.1 Resultados de Simulação	29
4.2 Planta com Grau Relativo Unitário	29
4.2.1 Resultados de Simulação	31
5 Análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto	33
5.1 Planta de Primeira Ordem	34
5.1.1 Resultados de Simulação	38
5.2 Planta com Grau Relativo Unitário	43
5.2.1 Equação do Erro	44
5.2.2 Análise de Estabilidade	45
5.2.3 Resultados de Simulação	47
6 Conclusões	49
Referências Bibliográficas	50

A	Teoria de Estabilidade de Lyapunov	54
A.1	Pontos de Equilíbrio	54
A.2	Estabilidade e Instabilidade	54
A.3	Funções Definidas e Semi-Definidas	55
A.4	Teoremas de Estabilidade de Lyapunov	55
B	Solução para a forma no espaço de estado	57

Lista de Figuras

1.1	Controle Adaptativo Indireto	2
1.2	Controle Adaptativo Direto	3
2.1	Superfície de deslizamento em um sistema com estrutura variável. . .	8
2.2	Filtro passa-baixa para obtenção de u_{eq}	10
2.3	Campos vetoriais da solução de Filippov.	11
3.1	Controle por Modelo de Referência	12
3.2	MRAC direto	13
3.3	MRAC indireto	14
3.4	Estrutura do MRAC	15
3.5	Saídas da planta e do modelo de referência do MRAC	19
3.6	Parâmetros do controlador do MRAC	19
3.7	Sinal de controle do MRAC	20
3.8	Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC	22
3.9	Parâmetros do controlador VS-MRAC	23
3.10	Sinal de controle do VS-MRAC	23
3.11	Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,1$ s	24
3.12	Sinal de controle do VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,1$ s	24
3.13	Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,11$ s	25
3.14	Sinal de controle do VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,11$ s	25
4.1	Saídas da planta e do modelo de referência do VS-MRAC para uma planta de primeira ordem com uma perturbação no instante $t = 8$ s . .	30
4.2	Saídas da planta e do modelo de referência do VS-MRAC para uma planta com grau relativo unitário com uma perturbação no instante $t = 6$ s	32
5.1	Resultados do controlador VS-MRAC para $h=0,01$ s	39
5.2	Resultados do controlador VS-MRAC para $h=0,10$ s	39
5.3	Resultados do controlador VS-MRAC para $h=0,34$ s	40
5.4	Plano de fase do erro para $h=0,01$ s	40

5.5	Plano de fase do erro para $h=0,10s$	41
5.6	Plano de fase do erro para $h=0,34s$	41
5.7	Erro para $h=0,01s$	42
5.8	Erro para $h=0,10s$	42
5.9	Erro para $h=0,34s$	43
5.10	Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC para $h=0,0001s$	48

Lista de Abreviaturas e Siglas

- LTI - Linear Time Invariant (Linear Invariante no Tempo)
- MRAC - Model Reference Adaptive Controller (Controlador Adaptativo por Modelo de Referência)
- PLC - Programmable Logic Controller (Controlador Lógico Programável)
- SISO - Single Input, Single Output (Monovariável)
- SMC - Sliding Mode Control (Controle por Modos Deslizantes)
- VSS - Variable Structure Systems (Sistemas com Estrutura Variável)
- VS-MRAC - Variable Structure Model Reference Adaptive Controller (Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável)

Capítulo 1

Introdução

A partir dos anos 50, o projeto de pilotos automáticos para alto desempenho de aeronaves motivou uma atividade intensa na pesquisa sobre controle adaptativo. Desde essa época, a teoria de controle adaptativo vem crescendo e sendo fortemente estudada por pesquisadores do mundo todo. O controle adaptativo é bom em lidar com quantidades incertas em sistemas dinâmicos (sistemas que possuem modelagem precária), em que existam perturbações e parâmetros desconhecidos, e se tornou mais popular em muitos campos da engenharia e ciência em termos de algoritmos, técnicas de controle e projeto.

A grande maioria dos controladores utilizados nas indústrias é baseada em sistemas conhecidos. Esses controladores deixam de funcionar adequadamente para sistemas que apresentam variações, ou incertezas paramétricas. Além disso, o aparecimento de ruídos, perturbações e interferências de várias naturezas, podem também influenciar no desempenho do controlador e conseqüentemente do sistema, podendo levá-lo à instabilização. O controle adaptativo foi criado para realizar o controle nesses tipos de sistemas.

O controle adaptativo é um método utilizado por um controlador que pode modificar seu comportamento de acordo com o sistema controlado com parâmetros que variam, ou são inicialmente incertos. Por exemplo, quando uma aeronave voa, sua massa lentamente irá diminuir como resultado do consumo de combustível alterando os parâmetros do modelo dinâmico do avião. Então, uma lei de controle que ajusta-se a essas variações é necessária.

A teoria de controle adaptativo vem se desenvolvendo em duas linhas: uma, supondo que as variáveis de estado são mensuráveis [Landau 1979] e outra, supondo que somente medições de entrada e saída da planta são disponíveis [Narendra & Valavani 1978], [Goodwin & Sin 1984], [Goodwin & Mayne 1987]. Devido a dificuldade de medição das variáveis de estado da planta, esta última linha, na qual se baseia o presente trabalho, vem recebendo considerável atenção.

A ideia básica do controle adaptativo é calcular o sinal de controle utilizando estimativas dos parâmetros incertos da planta, ou, diretamente, dos parâmetros do controlador obtidas em tempo real através de informações provenientes dos sinais mensuráveis do sistema [Slotine 1991].

A forma como o estimador de parâmetros, também conhecido como lei adaptativa, é combinado com a lei de controle dá origem a duas abordagens diferentes. Na

primeira abordagem, conhecida como controle adaptativo indireto, os parâmetros são estimados em tempo real e usados para calcular os parâmetros do controlador [Ioannou & Sun 1996].

Na segunda abordagem, conhecida como controle adaptativo direto, o modelo da planta é parametrizado em função dos parâmetros do controlador que são estimados diretamente sem cálculos intermediários envolvendo estimativas dos parâmetros da planta [Ioannou & Sun 1996].

No controle adaptativo indireto, o modelo da planta $P(\theta^*)$ é parametrizado com algum vetor de parâmetro desconhecido θ^* . Por exemplo, para um modelo de planta linear invariante no tempo (LIT) de uma entrada e uma saída (SISO), θ^* pode representar os coeficientes desconhecidos do numerador e denominador da função de transferência do modelo da planta. Um estimador de parâmetros em tempo real gera uma estimativa $\theta(t)$ de θ^* no instante t através do processamento da entrada u e da saída y da planta. O parâmetro estimado $\theta(t)$ especifica uma estimativa do modelo da planta caracterizado por $P(\theta(t))$ que para efeito do projeto do controle é tratado como o “verdadeiro” modelo da planta e é usado para calcular os parâmetros do controlador $\theta_c(t)$ pela solução da equação algébrica $\theta_c(t) = F(\theta(t))$ no instante t . A forma da lei de controle $C(\theta_c)$ e a equação algébrica $\theta_c = F(\theta)$ são escolhidos para serem os mesmos da lei de controle $C(\theta_c^*)$ e da equação $\theta_c^*(t) = F(\theta^*)$ que poderiam ser usados para satisfazer os requisitos de desempenho para o modelo da planta $P(\theta^*)$ se θ^* fosse conhecido. Fica claro que com essa abordagem, $C(\theta_c(t))$ é projetado em cada instante t para satisfazer os requisitos de desempenho para o modelo estimado da planta $P(\theta(t))$, que pode ser diferente do modelo desconhecido da planta $P(\theta^*)$. O diagrama de blocos do esquema do controle adaptativo indireto é mostrado na Figura 1.1 [Ioannou & Sun 1996].

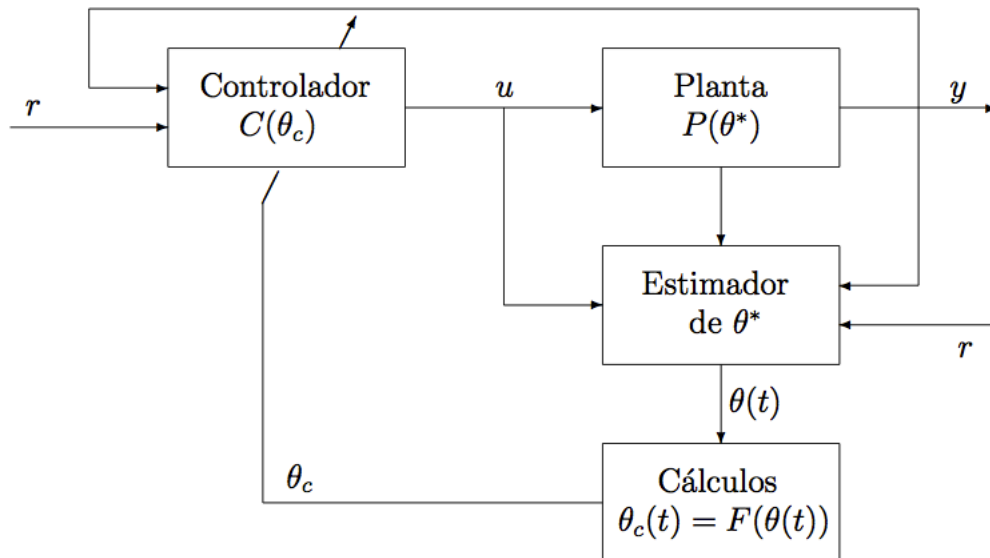


Figura 1.1: Controle Adaptativo Indireto

No controle adaptativo direto, o modelo da planta $P(\theta^*)$ é parametrizado em função do vetor de parâmetros desconhecidos do controlador θ_c^* , para que $C(\theta_c^*)$ satisfaça os requisitos de desempenho e para obter o modelo da planta $P_c(\theta_c^*)$ com a mesma característica de entrada e saída que $P(\theta^*)$ [Ioannou & Sun 1996].

O estimador de parâmetros em tempo real é projetado baseado em $P_c(\theta_c^*)$ em vez de $P(\theta^*)$ para fornecer estimativas diretas $\theta_c(t)$ de θ_c^* em cada instante de tempo t através do processamento da entrada u e saída y da planta. A estimativa $\theta_c(t)$ é usada para atualizar o vetor de parâmetros do controlador θ_c sem cálculos intermediários. A escolha da classe da lei de controle $C(\theta_c)$ e do estimador de parâmetros que geram $\theta_c(t)$, de forma que $C(\theta_c(t))$ atenda aos requisitos de desempenho para o modelo da planta $P(\theta^*)$, são os principais problemas no controle adaptativo direto. As propriedades do modelo da planta $P(\theta^*)$ são fundamentais para obter o modelo da planta parametrizado $P_c(\theta_c^*)$ que é conveniente para a estimativa em tempo real. Como resultado, o controle adaptativo direto é restrito a uma determinada classe de modelos de planta. Uma classe de modelos de planta que é adequada para controle adaptativo direto consiste em todos os modelos de planta lineares invariantes no tempo (LIT) de uma entrada e uma saída (SISO) que são de fase mínima, ou seja, seus zeros estão localizados no semi-plano esquerdo. O diagrama de blocos do esquema do controle adaptativo direto é mostrado na Figura 1.2 [Ioannou & Sun 1996].

Existem várias técnicas de controle adaptativo que se baseiam nessas duas abordagens e com o avanço da tecnologia essas técnicas estão podendo ser embarcadas em diferentes tipos de sistemas. Entretanto, os sistemas embarcados ainda possuem limitações com relação ao período de amostragem. Uma dessas técnicas é o VS-MRAC que utiliza a união da estratégia de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control - MRAC*) e Sistemas com Estrutura Variável (*Variable Structure System - VSS*).

A teoria de VSS também conhecida como Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control - SMC*) foi proposta e elaborada inicialmente nos anos 50 na

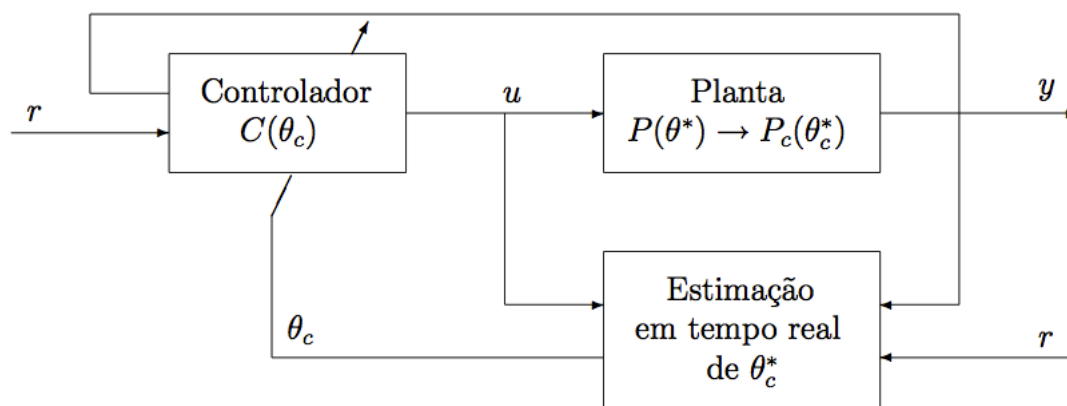


Figura 1.2: Controle Adaptativo Direto

União Soviética por Emelyanov e diversos outros pesquisadores (ver, Hung et al. [1993]). Estas ideias ficaram restritas à União Soviética até meados dos anos 70, quando foram divulgadas para o mundo através das publicações de Utkin [1977] e Itkis [1976]. Sua principal característica é empregar uma lei de controle chaveada que restringe a dinâmica do sistema a uma superfície desejada denominada superfície de deslizamento. O SMC necessita de uma frequência de chaveamento tendendo a infinito para obter um bom desempenho. Em casos práticos, essa frequência é limitada por um período de amostragem que resulta não só em *chattering* ao longo da superfície de deslizamento, como também pode instabilizar o sistema [Furuta 1990] e [Chan 1991]. O projeto do controlador contínuo no tempo considera períodos de amostragem muito pequenos, apresentando um bom desempenho [Bandyopadhyay & Saaaj 2002]. O primeiro trabalho que surgiu na literatura sobre VSS no caso discreto foi apresentado por Milosavljevic [1985], tornando essa teoria popular em aplicações de sistemas práticos, como pode ser visto em Garcia et al. [2005], Pan & Furuta [1997], Gao et al. [1995], Bartolini et al. [1995].

No caso do MRAC proposto por Narendra & Valavani [1977], sua ideia básica é escolher um modelo de referência e fazer com que a planta se comporte como este modelo de referência em malha fechada. Essa técnica é considerada umas das principais abordagens na literatura referente a controle adaptativo [Mareels 1996]. Controladores baseados nessa estratégia de controle costumam apresentar um bom comportamento em regime permanente, com um sinal de controle suave, porém costumam apresentar transitório lento e oscilatório. O MRAC apresentou problemas de robustez na presença de dinâmica não modelada e/ou distúrbios externos como comprovou Rohrs & Valavani [1985]. Assim, surgiu o VS-MRAC como uma das soluções para abordar esse problema. O caso discreto do MRAC tem sido tratado em Akhtar & Bernstein [2005] e Duarte & Ponce [1997], por exemplo.

O VS-MRAC foi proposto por Hsu & Costa [1989] e pode ser visto com detalhes em Hsu et al. [1994]. O caso geral para grau relativo qualquer foi apresentado em Hsu [1990]. Esse controlador apresenta a mesma ideia básica do MRAC convencional, porém, as leis adaptativas integrais são substituídas por leis chaveadas. Esse controlador apresentou uma grande melhoria no desempenho transitório, assim como robustez a dinâmica não modelada e variações paramétricas. Porém, o sinal de controle apresenta uma alta frequência de chaveamento gerando o fenômeno de *“chattering”*. Em casos reais, essa frequência de chaveamento fica limitada pelo período de amostragem do dispositivo que realizará o controle, podendo levar o sistema a instabilização. Assim, há a necessidade de uma análise na prova de estabilidade de Lyapunov do VS-MRAC no caso discreto onde a frequência de chaveamento é limitada por um período de amostragem.

A necessidade dessa análise na prova de estabilidade de Lyapunov do VS-MRAC no caso discreto surgiu de um projeto submetido ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Companhia Hidroelétrica do São Francisco (CHESF) que propõe substituir as estratégias de controladores clássicos por controladores adaptativos aplicados a um Gerador Síncrono. O objetivo desse projeto é utilizar uma estratégia alternativa de controle de um Gerador Síncrono, no

qual o VS-MRAC é implementado em um Controlador Lógico Programável (CLP). As simulações práticas feitas em protótipos utilizando um computador foram satisfatórias. No entanto, quando os algoritmos foram implementados no CLP que é utilizado pela CHESF, foi visto que o tempo de processamento ou período de amostragem do CLP é bastante alto o que deteriorou o desempenho do sistema. Uma outra motivação é de não se garantir a estabilidade do sistema em casos práticos onde o período de amostragem não tende a zero.

O objetivo deste trabalho é analisar a influência do período de amostragem no desempenho de uma planta SISO linear, invariante no tempo, de primeira ordem e de uma planta com grau relativo unitário. A análise será feita com base na teoria de estabilidade de Lyapunov do VS-MRAC no caso discreto seguindo uma abordagem adaptativa direta utilizando apenas medições de entrada e saída da planta. Uma motivação para essa abordagem adaptativa direta consiste em que o VS-MRAC foi inicialmente deduzido nessa abordagem, o que torna simples a lei de controle e a demonstração de estabilidade de Lyapunov quando comparada com a abordagem adaptativa indireta. O desempenho do VS-MRAC no caso discreto será analisado utilizando diferentes períodos de amostragem. Para o caso de uma planta de primeira ordem é mostrado como calcular o limite do período de amostragem que garante a estabilidade do VS-MRAC.

Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta uma descrição geral para Sistemas com Estrutura Variável (VSS) no caso contínuo com um exemplo de projeto para uma planta de segunda ordem; o capítulo 3 apresenta o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) e o Controlador Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC); o capítulo 4 apresenta a prova de estabilidade do VS-MRAC no caso contínuo para uma planta de primeira ordem e de uma planta com grau relativo unitário; e por último, o capítulo 5 apresenta a análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto para uma planta de primeira ordem e de uma planta com grau relativo unitário.

Capítulo 2

Sistemas com Estrutura Variável

A teoria de controle por modos deslizantes apresenta uma natureza descontínua da ação de controle que tem como função principal o chaveamento entre estruturas diferentes, gerando um novo tipo de movimento, denominado de modo deslizante. Uma vez as variáveis de estado do sistema tendo alcançado o modo deslizante, o sistema se torna robusto a incertezas paramétricas da planta e a distúrbios externos (dentro de uma faixa de tolerância). Além da robustez, outras características do SMC é o transitório rápido e convergência em tempo finito de um estado inicial qualquer para a superfície de deslizamento.

Esta teoria teve suas origens no estudo dos controladores “a relé” e foi inicialmente desenvolvida na Rússia ([Emelyanov 1970], [Emelyanov & Taran 1963a], [Emelyanov & Taran 1963b], [Taran 1964a], [Taran 1964b], [Itkis 1976] e [Utkin 1978]). Posteriormente, passou também a receber crescente interesse por parte de pesquisadores de outros países ([Young 1977], [Young 1978], [Slotine & Sastry 1983], [Balestrino et al. 1984] e [Paden & Sastry 1987]). Uma visão geral dos aspectos teóricos e práticos deste assunto pode ser obtida nos trabalhos de De Carlo et al. [1988], Utkin [1983] e Utkin [1987].

No modo deslizante as variáveis de estado do sistema ficam restritas a uma superfície de deslizamento definida por $s(x) = 0$ que é escolhida para levar o sistema a uma dinâmica de ordem reduzida estável proposta pelo projetista.

O sinal de controle é projetado para levar e manter as trajetórias do sistema em malha fechada na superfície de deslizamento. Nessa superfície, o sinal de controle apresenta uma alta frequência de chaveamento, fenômeno chamado de *chattering*.

O objetivo deste capítulo é mostrar alguns resultados da teoria de sistemas com estrutura variável fundamentais para o entendimento de um controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável.

2.1 Existência do Modo Deslizante

Para que as variáveis de estado do sistema alcancem a superfície de deslizamento e entrem em modo deslizante, essa superfície tem que ser pelo menos localmente atrativa. Então, a atratividade local da superfície deslizante pode ser expressa pela condição

$$\lim_{s^+ \rightarrow 0} \dot{s} < 0 \text{ e } \lim_{s^- \rightarrow 0} \dot{s} > 0$$

ou, de uma forma mais concisa,

$$s\dot{s} < 0 \tag{2.1}$$

a qual é chamada de condição de alcançabilidade [Itkis 1976]. No caso da condição (2.1) ser satisfeita globalmente, a função

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 > 0$$

será uma função de Lyapunov, uma vez $\dot{V}(s) = \dot{s}s < 0$. Assim como $V(s) \rightarrow \infty$ quando $\|s\| \rightarrow \infty$, o sistema terá estabilidade assintótica global.

2.2 Descrição Geral

Considere o seguinte sistema de segunda ordem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u \end{cases} \tag{2.2}$$

onde a_1 e a_2 são conhecidos com incertezas.

Definire-se uma superfície de deslizamento s como

$$s = \{x \in \mathfrak{R}^2 \mid s(x) = c x_1 + x_2 = 0, c > 0\}$$

onde deseja-se que as variáveis de estado x_1 e x_2 deslizem. Para que o sistema tenha o comportamento indicado pela Figura 2.1, a condição (2.1) deve ser satisfeita. Assim, a trajetória de qualquer estado inicial $x(0)$ sempre será direcionada para a superfície de deslizamento $s(x) = 0$.

O sinal de controle é descontínuo e dado por:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} u^+(x_1, x_2), & s(x_1, x_2) > 0 \\ u^-(x_1, x_2), & s(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$$

Então, o sistema torna-se

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x_1, x_2), & s(x_1, x_2) > 0 \\ f^-(x_1, x_2), & s(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$$

Considera-se o sinal de controle

$$u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \tag{2.3}$$

onde

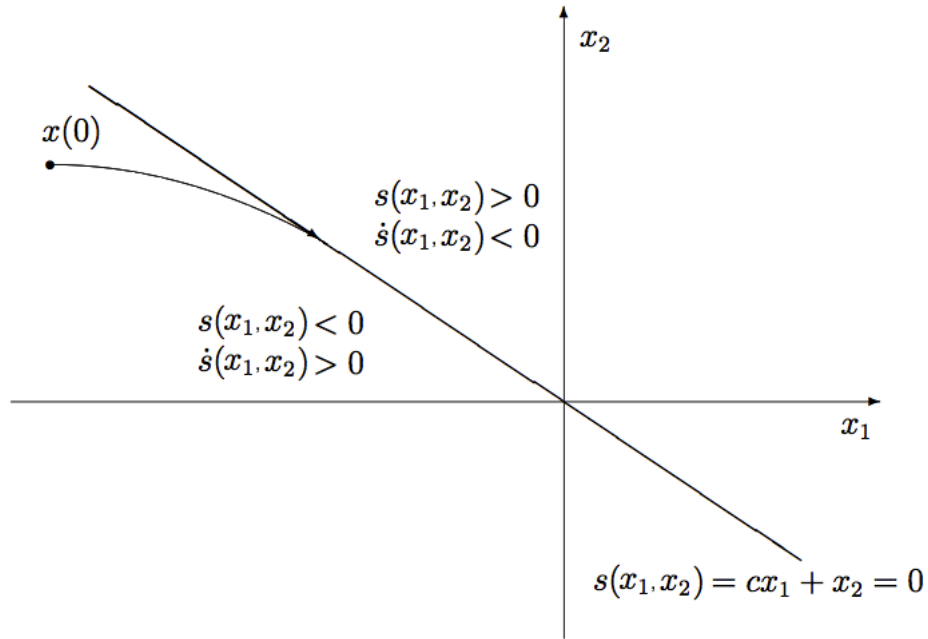


Figura 2.1: Superfície de deslizamento em um sistema com estrutura variável.

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(s x_1) \\ \theta_2 &= -\bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(s x_2)\end{aligned}\quad (2.4)$$

e

$$\operatorname{sgn}(s x) = \begin{cases} 1, & s x > 0 \\ -1, & s x < 0 \end{cases}$$

Os valores dos parâmetros $\bar{\theta}_i$ determinam a rapidez com que a trajetória atinge a superfície de deslizamento. Pela condição (2.1), tem-se

$$s \dot{s} = s (c \dot{x}_1 + \dot{x}_2). \quad (2.5)$$

Substituindo (2.2) em (2.5), obtém-se

$$s \dot{s} = s (c x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u). \quad (2.6)$$

Substituindo (2.3) em (2.6), verifica-se

$$s \dot{s} = s (c x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2). \quad (2.7)$$

Usando (2.4) em (2.7), obtém-se

$$\begin{aligned}s \dot{s} &= s [c x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - \bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(s x_1) x_1 - \bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(s x_2) x_2] \\ s \dot{s} &= a_1 s x_1 - \bar{\theta}_1 |s x_1| + (a_2 + c) s x_2 - \bar{\theta}_2 |s x_2|.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Observando a equação (2.8), percebe-se que a condição de deslizamento (2.1) será satisfeita com $\bar{\theta}_1 > |a_1|$ e $\bar{\theta}_2 > |c + a_2|$. Assim, o sistema obtém um comportamento descrito pela Figura 2.1, onde a superfície de deslizamento é alcançada em tempo finito como pode ser observado. Também,

$$\begin{aligned} s(x) = 0 &\rightarrow c x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -c x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 &\rightarrow \dot{x}_1 = -c x_1 \\ x_1(t) &= e^{-ct} x_1(0) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0. \end{aligned}$$

No caso dos parâmetros a_1 e a_2 serem variantes no tempo e/ou conhecidos com incertezas, para a condição de deslizamento (2.1) ser satisfeita, a expressão

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &> \sup_{t>0} |a_1(t)| \\ \bar{\theta}_2 &> \sup_{t>0} |c + a_2(t)| \end{aligned}$$

terá que ser atendida.

2.3 Método do Controle Equivalente

O controle equivalente u_{eq} proposto por Utkin [1992] pode ser considerado como o valor médio do controle descontínuo quando o sistema está na superfície de deslizamento. O u_{eq} é o controle necessário que deve ser aplicado para manter o sistema na superfície de deslizamento.

No caso de deslizamento ideal, tem-se que $\dot{s} \equiv 0$. Então

$$\begin{aligned} c \dot{x}_1 + \dot{x}_2 &= 0 \\ c x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + u &= 0 \\ u_{eq} &= -a_1 x_1 - (a_2 + c) x_2. \end{aligned}$$

Esta definição tem sido usada no desenvolvimento de diversas estratégias de controle por modos deslizantes [Utkin 1987] e, fisicamente, pode-se pensar no controle equivalente como o valor médio do controle u (u_{av}) obtido através de um filtro passa-baixa com frequência de corte suficientemente alta como mostra a Figura 2.2, na ausência de dinâmica não modelada da planta e de incertezas no chaveamento real [Utkin 1978]. Se a frequência de corte do filtro ($1/\tau$) for suficientemente elevada, então $u_{av} \approx u_{eq}$.

Como dificuldades para a aplicação de controle com estrutura variável pode-se citar a necessidade das incertezas paramétricas serem uniformemente limitadas e a medição das variáveis de estado da planta. Esta última exigência é bastante restritiva em virtude do estado completo não ser disponível em muitos sistemas físicos.

Outra dificuldade que pode-se citar é o fenômeno de *chattering* que consiste no

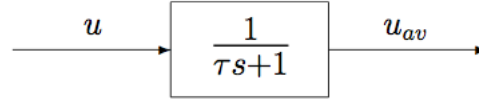


Figura 2.2: Filtro passa-baixa para obtenção de u_{eq} .

surgimento de sinais de alta frequência indesejáveis e excessiva atividade de controle. Este fenômeno ocorre quando o sistema entra em modo deslizante devido às imperfeições introduzidas pelos mecanismos de chaveamento reais, tais como zona morta, histerese, atraso, etc, e/ou à presença de dinâmica não modelada da planta.

2.4 Solução por Filippov

Devido a descontinuidade do chaveamento do sinal de controle não é possível garantir a existência e unicidade de uma solução para o sistema. Portanto, Filippov [Filippov 1964] propôs uma definição que é particularmente adequada para o tipo de equações diferenciais que surgem em sistemas com estrutura variável. Basicamente, as soluções no sentido de Filippov são absolutamente contínuas como funções do tempo e, também, contínuas em relação às condições iniciais. Isto torna possível a extensão do método direto de Lyapunov na análise de estabilidade de sistemas com estrutura variável.

Na frequência de chaveamento quando a condição (2.1) é satisfeita em uma vizinhança de $s(x) = 0$, a solução será dada por um campo vetorial f^* , dado pela equação (2.9), que é a combinação de dois campos vetoriais f^+ e f^- direcionados conforme a Figura 2.3, onde f^+ e f^- são os vetores do campo diferencial em dois pontos vizinhos a $s(x)$. Desta maneira é obtido um fecho convexo mínimo que é a base do método de Filippov. Uma vez que o deslizamento ideal ocorre na superfície de deslizamento, o campo vetorial permanece em um plano tangencial à superfície. Assim, a equação para o deslizamento ideal, definida de acordo com Filippov, é dada por

$$f^* = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.9)$$

onde α é um parâmetro que depende das direções e magnitudes dos campos vetoriais f^+ , f^- e do gradiente da função $s(x)$.

A definição acima permite garantir a existência e unicidade da solução em equações diferenciais com lado direito descontínuo e é muito útil em problemas de engenharia. Suponha que $f(x, t)$ seja função de um relé não ideal, por exemplo, com um pequeno atraso de chaveamento. A solução de Filippov corresponde ao limite da solução de $\dot{x} = f(x, t)$ com o atraso do relé tendendo a zero [Utkin 1978].

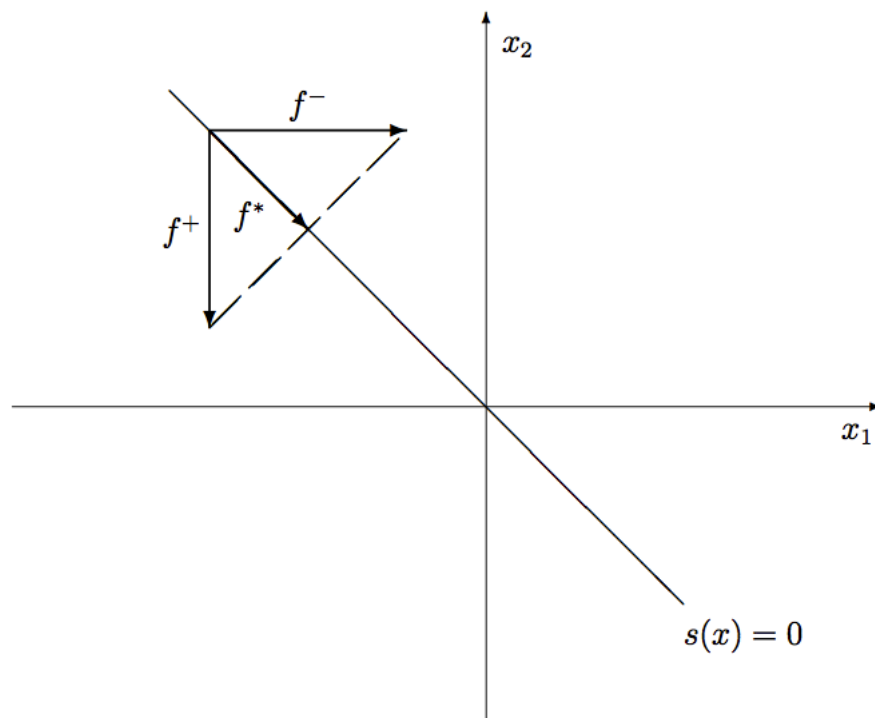


Figura 2.3: Campos vetoriais da solução de Filippov.

Capítulo 3

MRAC e VS-MRAC

Neste capítulo são revisados os principais conceitos e equações do MRAC e VS-MRAC diretos para o caso de grau relativo unitário. A ideia geral do Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control* - MRAC) é criar um controlador em malha fechada com parâmetros que são atualizados para alterar a resposta do sistema. A saída do sistema é comparada com uma saída desejada de um modelo de referência e um sinal de erro é gerado. Os parâmetros do controlador são atualizados com base neste erro. O objetivo é fazer com que os parâmetros convirjam para valores que façam a resposta da planta coincidir com a resposta do modelo de referência. Quando isso acontece, o sinal do erro se torna nulo e a condição de *matching* é alcançada.

Se os parâmetros da planta (θ^*) fossem conhecidos, o diagrama de blocos referente ao Controle por Modelo de Referência seria o mostrado pela Figura 3.1.

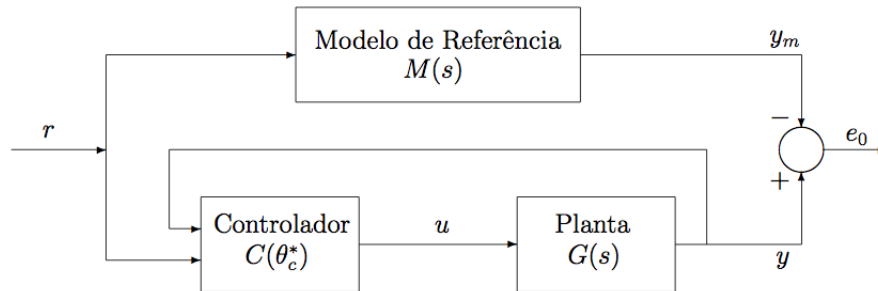


Figura 3.1: Controle por Modelo de Referência

$C(\theta_c^*)$ é projetado para que todos os sinais do sistema sejam uniformemente limitados e a função de transferência da planta em malha fechada, entre r e y , seja igual a do modelo de referência. Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_m(t)] = 0$$

A condição de *matching* é obtida pelo cancelamento dos zeros e reposicionamento dos pólos da função de transferência da planta, durante o período de adaptação. Esses zeros são substituídos pelos zeros do modelo de referência. O cancelamento dos

zeros impõe uma restrição da planta ser de fase mínima, ou seja, ter zeros no semi-plano esquerdo. Se a planta for de fase não mínima, como o cancelamento nunca é exato, o sistema em malha fechada torna-se instável. No caso anterior (planta de fase mínima), o não cancelamento exato apenas introduz um termo exponencialmente decrescente e o sistema continua sendo estável.

O cálculo de $C(\theta_c^*)$ necessita do conhecimento de θ^* . Se θ^* for desconhecido o diagrama de blocos mostrado na Figura 3.1 não pode ser aplicado, pois, necessita substituir θ_c^* pela sua estimativa $\theta_c(t)$ obtida usando o método direto ou indireto.

No método direto mostrado na Figura 3.2, substitui-se θ_c^* pela sua estimativa $\theta_c(t)$. E no método indireto mostrado na Figura 3.3, substitui-se θ_c^* pelo cálculo de $\theta_c(t)$ em função da estimativa $\theta(t)$.

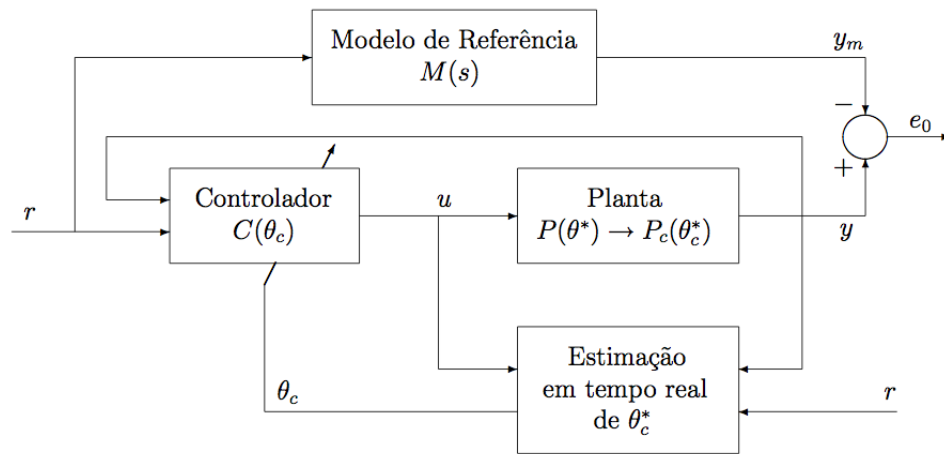


Figura 3.2: MRAC direto

3.1 Estrutura de Controle do MRAC

Para o projeto de um MRAC para o caso de grau relativo igual a 1, as seguintes hipóteses são consideradas para a planta e o modelo de referência:

1. Planta

$$W(s) = k_p \frac{n_p(s)}{d_p(s)}. \quad (3.1)$$

- **Hipótese 1** $n_p(s)$ e $d_p(s)$ são polinômios mônicos com grau $[n_p(s)] = m$ e grau $[d_p(s)] = n$, com m e n conhecidos, ou seja, o grau relativo da planta também é conhecido ($n^* = n - m = 1$);
- **Hipótese 2** A planta é controlável e observável ($n_p(s)$ e $d_p(s)$ são polinômios coprimos);

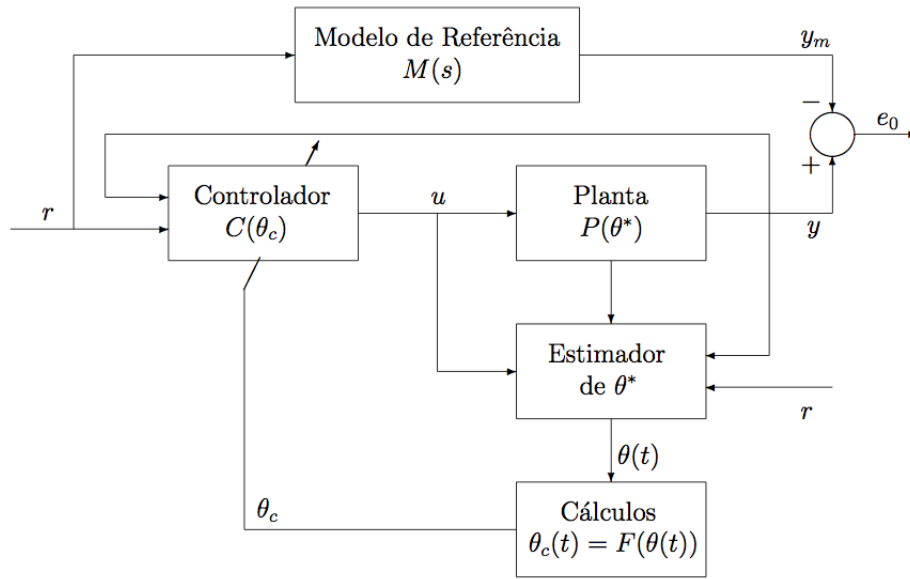


Figura 3.3: MRAC indireto

- **Hipótese 3** O sinal do ganho de alta frequência (k_p) da planta é conhecido e positivo;
- **Hipótese 4** A planta é de fase mínima ($n_p(s)$ é Hurwitz);
- **Hipótese 5** Somente a saída da planta é mensurável.

2. Modelo de Referência

$$M(s) = k_m \frac{n_m(s)}{d_m(s)}. \quad (3.2)$$

- **Hipótese 6** $n_m(s)$ e $d_m(s)$ são polinômios mônicos e com o mesmo grau relativo da planta ($\text{grau}[n_m(s)] = \text{grau}[n_p(s)]$ e $\text{grau}[d_m(s)] = \text{grau}[d_p(s)]$);
- **Hipótese 7** $M(s)$ é estritamente real positivo, o que implica $M(s)$ estável, de fase mínima e com $k_m > 0$.

O projeto é baseado na combinação de uma lei de controle com uma lei de adaptação que gera estimativas em tempo real dos parâmetros do controlador. Como o número de parâmetros da planta é igual a $2n$, onde n é a ordem da planta, há a necessidade de gerar $2n$ sinais para estimarmos os parâmetros do controlador. Assim, para gerar o sinal de controle, são utilizados filtros de entrada e saída

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \Lambda v_1 + g u, & v_1 \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + g y, & v_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \quad (3.3)$$

onde g é o ganho dos filtros e Λ é escolhido de modo que o polinômio $\det(sI - \Lambda) = n_m(s)$ seja Hurwitz.

O sinal de controle será definido por meio de uma combinação linear do sinal de referência r , do sinal de saída da planta y e dos sinais dos filtros v_1 e v_2 . Esses sinais

estarão definidos pelo vetor regressor ω , como sendo

$$\omega^T(t) = [v_1^T \ y \ v_2^T \ r], \quad (3.4)$$

e o sinal de controle

$$u(t) = \theta^T(t) \omega(t). \quad (3.5)$$

onde $\theta^T(t) = \underbrace{[\theta_1(t) \cdots \theta_{n-1}(t)]}_{\theta_{v_1}^T(t)} \ \theta_n(t) \ \underbrace{[\theta_{n+1}(t) \cdots \theta_{2n-1}(t)]}_{\theta_{v_2}^T(t)} \ \theta_{2n}(t)$.

Existe um único vetor constante θ^* tal que a função de transferência da planta em malha fechada se comporte como o modelo de referência, ou seja, $y = W(s) u = W(s) \theta^{*T} \omega = M(s) r$ (condição de *matching*). A estrutura do MRAC é mostrada pelo diagrama de blocos da Figura 3.4.

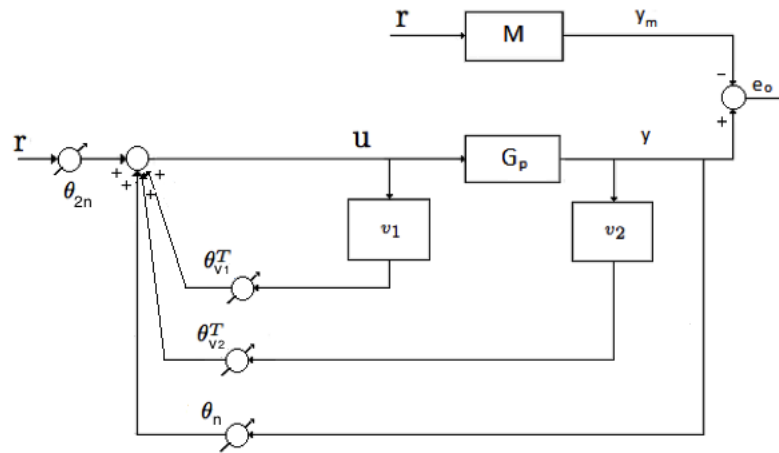


Figura 3.4: Estrutura do MRAC

3.2 Equação do Erro

Nesta seção será definido o erro de saída e_o . A Equação (3.6) é a descrição da planta (3.1) por variáveis de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases} \quad (3.6)$$

O vetor de estado $X^T = [x^T \ v_1^T \ v_2^T]$ do sistema é formado pela planta e pelos filtros de entrada e saída. Assim, derivando esse vetor de estado, tem-se a seguinte representação no espaço de estado

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ g c^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{b}} u, \quad y = [c^T \ 0 \ 0] X. \quad (3.7)$$

Somando e subtraindo $\theta^{*T} \omega$ na equação (3.5), tem-se

$$u = \theta^T \omega - \theta^{*T} \omega + \theta^{*T} \omega = \underbrace{(\theta^T - \theta^{*T})}_{\tilde{\theta}^T} \omega + \theta^{*T} \omega. \quad (3.8)$$

Substituindo a equação (3.4) em (3.8) e desenvolvendo, obtém-se

$$u = \tilde{\theta}^T \omega + [\theta_n^* c^T \ \theta_{v_1}^{*T} \ \theta_{v_2}^{*T}] X + \theta_{2n}^* r. \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.9) em (3.7), tem-se

$$\begin{cases} \dot{X} = \bar{A} X + \bar{b} (\tilde{\theta}^T \omega + [\theta_n^* c^T \ \theta_{v_1}^{*T} \ \theta_{v_2}^{*T}] X + \theta_{2n}^* r) \\ y = c_c^T X. \end{cases} \quad (3.10)$$

Desenvolvendo a equação (3.10), tem-se

$$\begin{cases} \dot{X} = (\bar{A} + \bar{b} [\theta_n^* c^T \ \theta_{v_1}^{*T} \ \theta_{v_2}^{*T}]) X + \bar{b} \theta_{2n}^* r + \bar{b} \tilde{\theta}^T \omega \\ y = c_c^T X \end{cases}$$

onde $A_c = \bar{A} + \bar{b} [\theta_n^* c^T \ \theta_{v_1}^{*T} \ \theta_{v_2}^{*T}]$, $b_c = \bar{b} \theta_{2n}^*$ e $c_c^T = [c^T \ 0 \ 0]$.

Então, o sistema em malha fechada passa a ser representado por

$$\begin{cases} \dot{X} = A_c X + b_c r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega \\ y = c_c^T X \end{cases}$$

Note que pela condição de *matching* ($\theta = \theta^* \rightarrow \tilde{\theta} = 0$) a planta se comporta como o modelo de referência. Então,

$$\begin{cases} \dot{X}_m = A_c X_m + b_c r \\ y_m = c_c^T X_m \end{cases}$$

Definindo $e = X - X_m$ e $e_o = y - y_m$ (erro de saída), tem-se as seguintes equações para os erros

$$\dot{e} = A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega \quad (3.11)$$

e

$$e_o = c_c^T e. \quad (3.12)$$

3.3 Simulações do MRAC

Para verificar o desempenho do MRAC foram realizadas simulações em uma planta instável

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} \quad (3.13)$$

que atende as hipóteses (hipóteses 1-5 da seção 3.1) usuais de projeto do MRAC.

O modelo de referência foi escolhido de maneira que satisfaça as hipóteses (hipóteses 6-7 da seção 3.1) como mostrado abaixo

$$M(s) = \frac{1,5(s+2)}{(s+1)(s+3)}. \quad (3.14)$$

Os filtros são escolhidos conforme a equação (3.3). Λ é escolhido de modo que o polinômio $\det(sI - \Lambda) = n_m(s)$ seja Hurwitz. Dessa forma, tem-se

$$\det(sI - \Lambda) = N_m(s) \Rightarrow \det(sI - \Lambda) = s+2 \Rightarrow s - \Lambda = s+2 \Rightarrow \Lambda = -2.$$

Portanto, tem-se as seguintes funções de transferência para os sinais filtrados

$$\frac{v_1(s)}{u(s)} = \frac{g}{s+2} \quad (3.15)$$

$$\frac{v_2(s)}{y(s)} = \frac{g}{s+2}. \quad (3.16)$$

Para esse tipo de controle MRAC tem-se $\theta^T = [\theta_{v_1} \theta_n \theta_{v_2} \theta_{2n}]$, o vetor de parâmetros adaptativos, e $w^T = [v_1 \ y \ v_2 \ r]$, o vetor regressor, tal que o controle é definido como: $u = \theta^T w$.

- Sinal de controle

$$u = \theta_{v_1} v_1 + \theta_n y + \theta_{v_2} v_2 + \theta_{2n} r. \quad (3.17)$$

Os parâmetros do controlador (θ_i) são ajustados em função do erro entre a saída da planta e a saída do modelo de referência através de leis integrais, como pode ser visto abaixo.

- Erro de Saída

$$e_o = y - y_m. \quad (3.18)$$

- Parâmetros do controlador

$$\dot{\theta}_{v_1} = -\gamma_1 e_o v_1$$

$$\dot{\theta}_n = -\gamma_2 e_o y$$

$$\dot{\theta}_{v_2} = -\gamma_3 e_o v_2$$

$$\dot{\theta}_{2n} = -\gamma_4 e_o r.$$

onde $\gamma_i > 0$ são os ganhos da lei de adaptação dos parâmetros.

Os parâmetros do controlador na condição de *matching* para plantas com grau relativo unitário podem ser calculados pelas expressões abaixo [Oliveira 2007]

$$\begin{aligned} \theta_{v1,i}^* &= \frac{\beta_{m,n-i} - \beta_{n-i}}{g}, i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_n^* &= \frac{\alpha_1 - \alpha_{m,1}}{k_p}, \\ \theta_{v2,i}^* &= \frac{\alpha_{n-i+1} - \alpha_{m,n-i+1} - k_p \theta_n^* \beta_{m,n-i}}{k_p g}, i = 1, \dots, n-1, \\ \theta_{2n}^* &= \frac{k_m}{k_p}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Fazendo $g = -\Lambda$ ($g = 2$) e calculando os parâmetros do controlador na condição de *matching* pela equação (3.19) encontra-se $\theta^* = [0, 5; -6, 0; 5, 0; 1, 5]^T$.

Para essa simulação utiliza-se uma referência do tipo degrau unitário, passo de integração $h = 10^{-4}$, $\gamma_{1,2,3,4} = 10$, $y(0) = 0, 5$ (estado inicial da planta) e $y_m(0) = 0, 0$ (estado inicial do modelo de referência).

Pode-se observar na Figura 3.5 que a planta segue o modelo de referência com erro em regime permanente nulo, apresentando uma convergência de duas constantes de tempo e resposta oscilatória. Pode-se observar também que as condições iniciais da planta e do modelo de referência são diferentes, mas, mesmo assim a planta segue o modelo de referência. Percebe-se que na Figura 3.6 nenhum parâmetro do controlador converge para o valor correto, todos vão para valores diferentes e isso faz com que o sistema perca robustez apesar do erro de saída tender para zero. Existem infinitas soluções para valores dos parâmetros do controlador que fazem com que a planta se comporte como o modelo de referência em malha fechada e uma dessas soluções na presença de uma perturbação, por não ser a solução correta, pode levar o sistema a instabilização. Pode-se corrigir isso utilizando um sinal persistentemente excitante como referência. Por último, observa-se na Figura 3.7 que o sinal de controle apresentou uma amplitude baixa o que viabiliza a implementação prática desse tipo de controle.

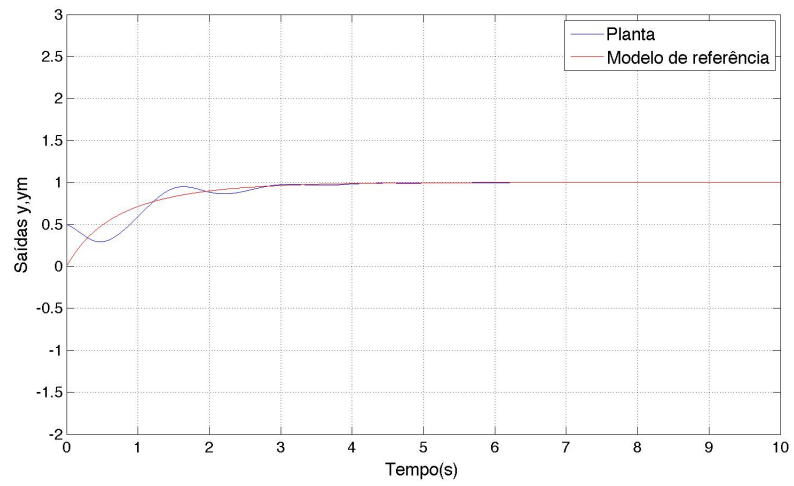


Figura 3.5: Saídas da planta e do modelo de referência do MRAC

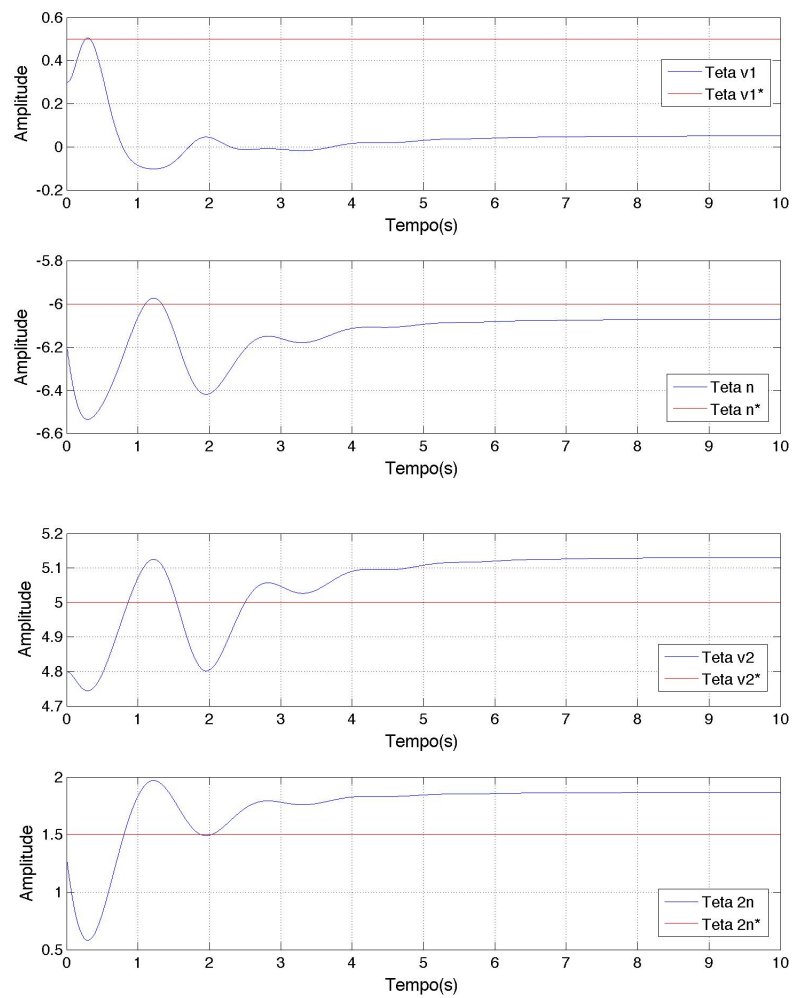


Figura 3.6: Parâmetros do controlador do MRAC

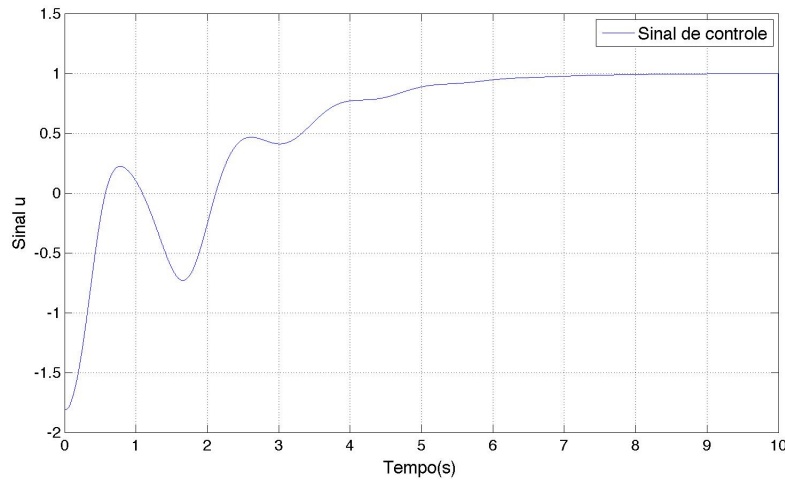


Figura 3.7: Sinal de controle do MRAC

3.4 Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável

Através dos exemplos de Rohrs & Valavani [1985], percebeu-se que o MRAC convencional apresenta problemas de robustez na presença de dinâmicas não-modeladas e/ou distúrbios externos. Além disso, o transitório da adaptação é oscilatório e a convergência pode ser muito lenta. Para tentar resolver os problemas apresentados por esse controlador foi desenvolvido um controlador que mantém o mesmo princípio de funcionamento do MRAC, porém, apresentando robustez aos problemas mencionados no trabalho de Rohrs.

O VS-MRAC proposto por Hsu & Costa [1989] apresenta a mesma ideia básica do MRAC convencional, porém, as leis adaptativas integrais são substituídas pelas leis chaveadas. Esse controlador apresentou uma grande melhoria no desempenho transitório assim como robustez. Porém, o sinal de controle de alta frequência dificulta a implementação prática.

Para o projeto do controlador VS-MRAC com grau relativo unitário, utiliza-se a mesma estrutura do controlador MRAC apresentado na seção 3.1. Assim, o VS-MRAC utiliza medições apenas de entrada e saída para gerar o sinal de controle. Será considerada a mesma planta (3.1), o mesmo modelo de referência (3.2), os mesmos filtros (3.3), o mesmo erro (3.12) e as mesmas hipóteses (hipóteses 1-7 da seção 3.1) do projeto do controlador MRAC.

O objetivo é projetar uma lei de controle $u(t)$ de modo que todos os sinais do sistema realimentado sejam uniformemente limitados e o erro de rastreamento $e_o = y - y_m$ tenda assintoticamente para zero ($\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = 0$), ou para um conjunto residual pequeno em torno de zero. O sinal de controle é expresso pela equação (3.5). Os parâmetros θ_i são adaptados pela lei com estrutura variável

$$\theta_i = -\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_o \omega_i), \quad (3.20)$$

onde $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$ são limitantes superiores que são assumidos conhecidos.

3.5 Simulações do VS-MRAC

Para verificar o desempenho do VS-MRAC foram realizadas simulações na planta instável (3.13) e o modelo de referência escolhido foi (3.14). As funções de transferência dos filtros são (3.15) e (3.16). O sinal de controle é dado pela equação (3.17) e o erro por (3.18).

- Parâmetros do controlador

$$\begin{aligned} \theta_{v_1} &= -\bar{\theta}_{v_1} \operatorname{sgn}(e_o v_1) \\ \theta_n &= -\bar{\theta}_n \operatorname{sgn}(e_o y) \\ \theta_{v_2} &= -\bar{\theta}_{v_2} \operatorname{sgn}(e_o v_2) \\ \theta_{2n} &= -\bar{\theta}_{2n} \operatorname{sgn}(e_o r). \end{aligned}$$

Fazendo $g = -\Lambda$ ($g = 2$) e calculando os parâmetros do controlador na condição de *matching* pela equação (3.19) encontra-se $\theta^* = [0, 5; -6, 0; 5, 0; 1, 5]^T$. Como as amplitudes dos relés devem ser maiores que o módulo dos parâmetros do controlador na condição de *matching* ($\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$), $\bar{\theta}$ foi escolhido como sendo um valor um pouco maior do que seus valores corretos $\bar{\theta} = [0, 9; 6, 4; 5, 4; 1, 9]$.

Para essa simulação utiliza-se uma referência do tipo degrau unitário, passo de integração $h = 10^{-4}$, $y(0) = 0, 5$ (estado inicial da planta) e $y_m(0) = 0, 0$ (estado inicial do modelo de referência).

Pode-se observar na Figura 3.8, com o VS-MRAC, que a planta segue o modelo de referência com transitório rápido e sem oscilações, mostrando um excelente desempenho em comparação com o MRAC. Mesmo com os valores iniciais da planta e do modelo de referência diferentes, o sinal do erro tendeu para zero ou para um conjunto residual pequeno em torno de zero. Como esperado, na Figura 3.9, os parâmetros do controlador ficam chaveando entre determinados valores devido a lei de adaptação dos parâmetros serem chaveadas. E por último, na Figura 3.10 o sinal de controle não é bom, pois, ele apresenta uma alta frequência de chaveamento, o que pode inviabilizar o uso na prática devido a limitações dessa frequência em dispositivos digitais.

As Figuras 3.11 e 3.12 mostram o efeito da saída da planta e do sinal de controle do VS-MRAC respectivamente, quando submetido a um período de amostragem de $h = 0, 1$ s. Observa-se pela Figura 3.11, que a saída da planta se tornou muito oscilatória devido o sinal de controle não apresentar um chaveamento de alta frequência. À medida que esse período de amostragem aumenta, as oscilações também aumentam e o sistema pode se tornar instável, como pode ser observado nas Figuras 3.13 e

3.14 para $h = 0, 11$. Então, é necessária uma análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto para ver a influência desse período no comportamento do sistema.

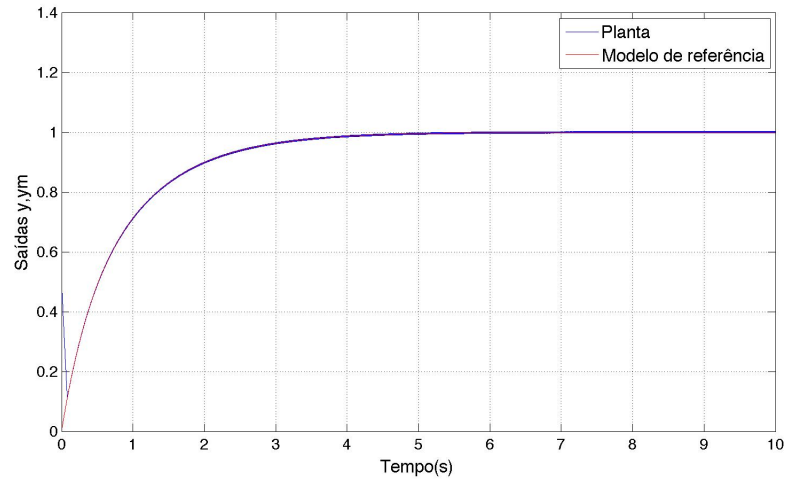


Figura 3.8: Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC

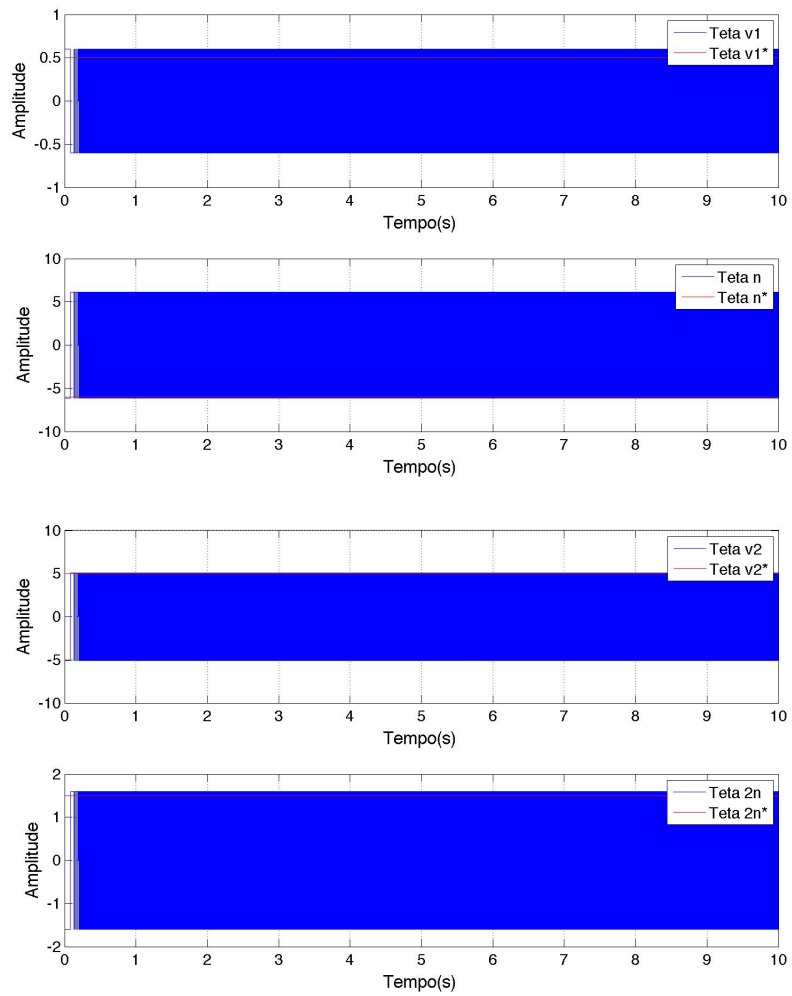


Figura 3.9: Parâmetros do controlador VS-MRAC

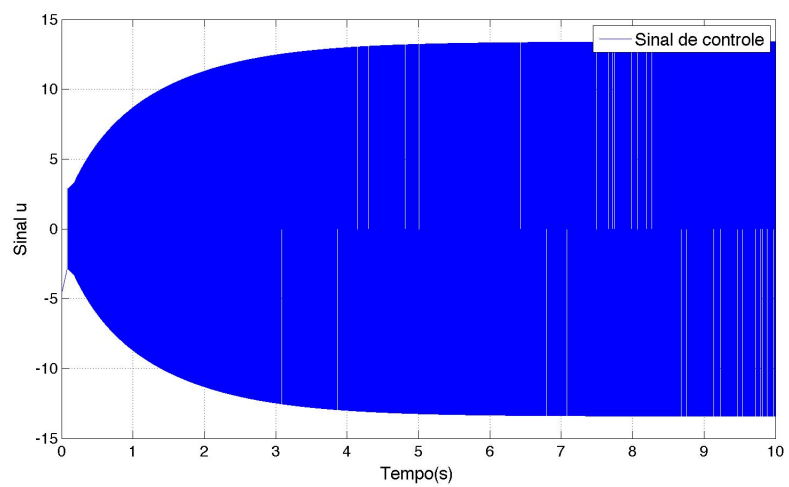


Figura 3.10: Sinal de controle do VS-MRAC

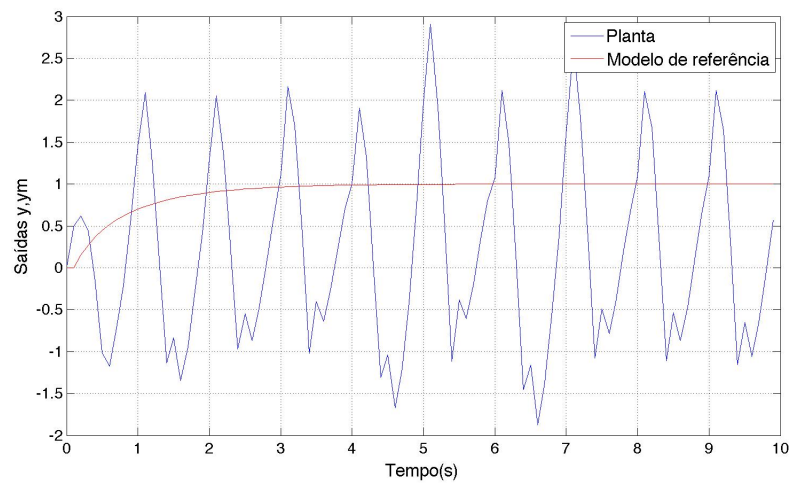


Figura 3.11: Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,1$ s

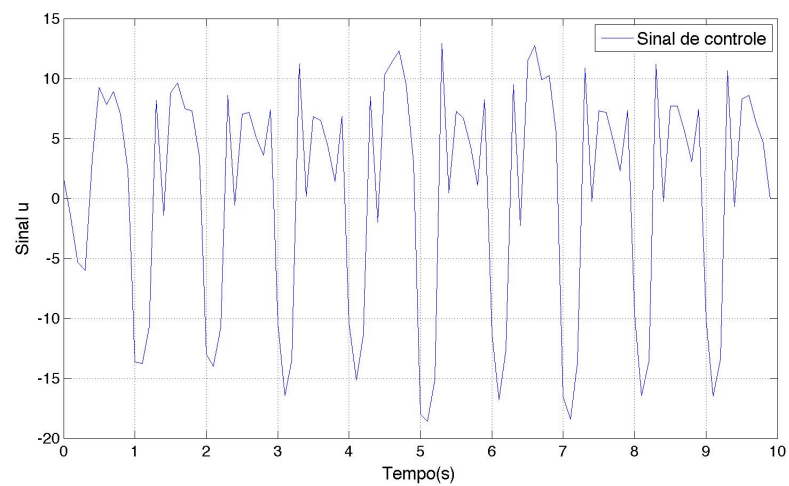


Figura 3.12: Sinal de controle do VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,1$ s

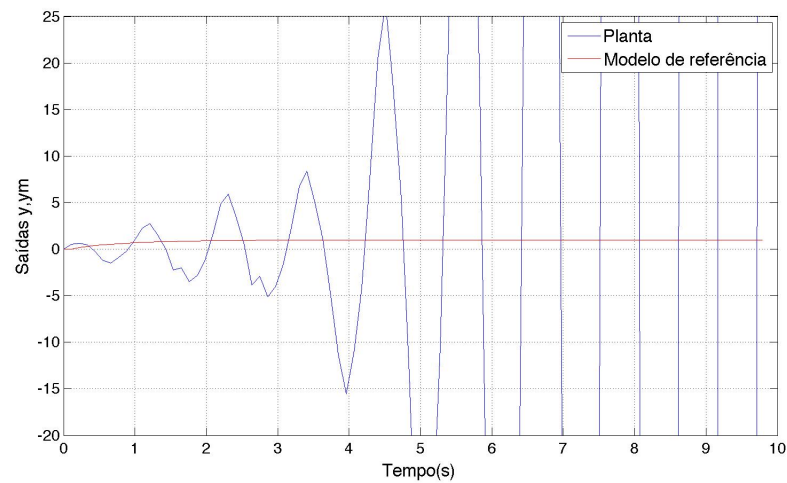


Figura 3.13: Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,11$ s

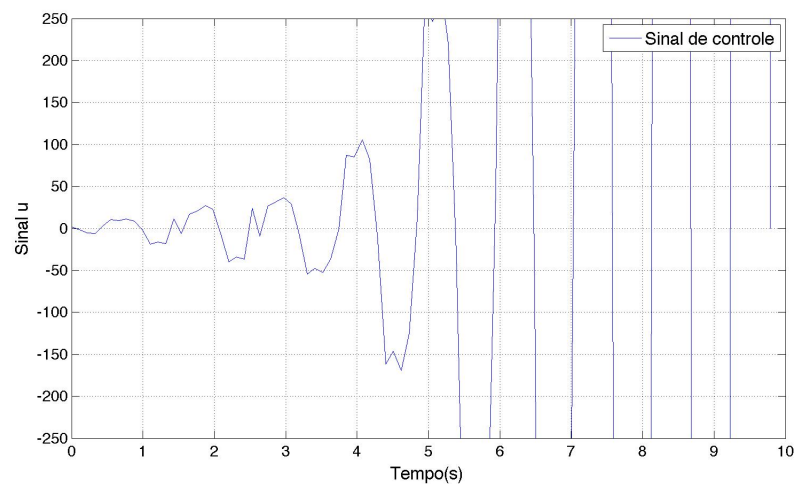


Figura 3.14: Sinal de controle do VS-MRAC com um período de amostragem de $h = 0,11$ s

Antes de iniciar a análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto, o capítulo 4 mostrará a prova de estabilidade do VS-MRAC no caso contínuo e alguns conceitos relacionados à teoria de estabilidade de Lyapunov.

Capítulo 4

Prova de estabilidade do VS-MRAC no caso contínuo

Este capítulo é destinado a mostrar a prova de estabilidade do VS-MRAC no caso contínuo para plantas SISO lineares, invariantes no tempo, de primeira ordem e grau relativo unitário. A prova de estabilidade é uma característica fundamental no projeto de um sistema de controle.

Um dos conceitos fundamentais de estabilidade foi introduzido pelo matemático e engenheiro russo Aleksandr Lyapunov que definiu a estabilidade em termos de energia associada a um sistema [Lyapunov 1892]. Nesse trabalho, ele sugere duas maneiras de analisar a estabilidade de um sistema: método de linearização e o método direto. O método de linearização é utilizado para sistemas não-lineares, onde lineariza-se esse sistema em torno de um ponto de equilíbrio e obtém-se conclusões sobre estabilidade local. O método direto, que é utilizado nesse trabalho, não é restrito ao comportamento local, e determina as propriedades de estabilidade de um sistema através da construção de uma função escalar de energia para o sistema e análise da variação desta função com o tempo.

Para se ter uma boa compreensão sobre a prova de estabilidade do VS-MRAC, é necessário entender alguns conceitos importantes sobre a teoria de estabilidade de Lyapunov que podem ser vistos no Apêndice A.

4.1 Planta de Primeira Ordem

Considere uma planta SISO linear e invariante no tempo de primeira ordem com função de transferência

$$W(s) = \frac{k_p}{s + a_p} \quad (4.1)$$

com entrada u e saída y , e um modelo de referência tendo entrada r e saída y_m representado pela função de transferência

$$M(s) = \frac{k_m}{s + a_m}. \quad (4.2)$$

Considere as seguintes hipóteses:

- **Hipótese 8** $\text{sgn}(k_p) = \text{sgn}(k_m) > 0$ (positivos, por simplicidade).
- **Hipótese 9** O modelo de referência é estável, ou seja, $a_m > 0$

As equações (4.1) e (4.2) podem ser descritas da seguinte forma:

$$\dot{y} + a_p y = k_p u \quad (4.3)$$

$$\dot{y}_m + a_m y_m = k_m r. \quad (4.4)$$

O objetivo é encontrar um sinal de controle $u(t)$ tal que o erro de saída

$$e_o(t) = y(t) - y_m(t) \quad (4.5)$$

tenda para zero assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$ com condições iniciais arbitrárias, e para um sinal de referência $r(t)$ uniformemente limitado.

Definindo $\theta^{*T}(t) = [\theta_1^* \ \theta_2^*]$ como o vetor dos parâmetros conhecidos do controlador, e $\omega^T(t) = [y \ r]$ como o vetor regressor, a lei de controle para a planta com parâmetros conhecidos é dada por

$$u^*(t) = \theta^{*T}(t) \omega(t). \quad (4.6)$$

Assim, existe um único vetor constante θ^* tal que a função de transferência da planta em malha fechada se comporta como o modelo de referência, e com u^* , a condição de *matching* é alcançada.

Substituindo a equação (4.6) em (4.3) obtém-se

$$\dot{y} + (a_p - k_p \theta_1^*) y = k_p \theta_2^* r. \quad (4.7)$$

Juntando os termos semelhantes das equações (4.4) e (4.7), obtém-se

$$\begin{cases} \theta_1^* = \frac{a_p - a_m}{k_p} \\ \theta_2^* = \frac{k_m}{k_p} \end{cases} \quad (4.8)$$

Se a planta apresenta incertezas paramétricas não será possível conhecer θ_1^* e θ_2^* . Assim, define-se um novo sinal de controle

$$u = \theta_1 y + \theta_2 r \quad (4.9)$$

onde θ_1 e θ_2 são adaptados até que $e_o(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e, com um sinal rico em frequências, $\theta_1(t) \rightarrow \theta_1^*$ e $\theta_2(t) \rightarrow \theta_2^*$ [Ioannou & Sun 1996].

Para este novo sinal de controle dado pela equação (4.9), deve-se calcular uma nova expressão para o erro de saída entre a planta e o modelo de referência. Para isto, introduz-se os erros paramétricos

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_1^* \\ \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_2^* \end{cases} \quad (4.10)$$

na equação (4.9), o que resulta em um sinal de controle

$$u(t) = \tilde{\theta}_1 y(t) + \tilde{\theta}_2 r(t) + \theta_1^* y(t) + \theta_2^* r(t). \quad (4.11)$$

Aplicando o sinal de controle (4.11) na equação (4.3) tem-se

$$\dot{y} = -a_p y + k_p \tilde{\theta}_1 y + k_p \tilde{\theta}_2 r + k_p \theta_1^* y + k_p \theta_2^* r. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.8) na equação (4.12) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -a_p y + k_p \tilde{\theta}_1 y + k_p \tilde{\theta}_2 r + k_p \left(\frac{a_p - a_m}{k_p} \right) y + k_p \left(\frac{k_m}{k_p} \right) r \\ &= -a_m y + k_m r + k_p (\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r). \end{aligned}$$

Substituindo o parâmetro da planta pelo do modelo de referência ($k_p = \frac{k_m}{\theta_2^*}$) tem-se

$$\dot{y} = -a_m y + k_m r + \frac{k_m}{\theta_2^*} (\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r). \quad (4.13)$$

A partir das equações (4.4), (4.5) e (4.13), obtém-se a seguinte expressão para o erro

$$\dot{e}_o = -a_m e_o + \frac{k_m}{\theta_2^*} (\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r). \quad (4.14)$$

O projeto das leis adaptativas que geram os parâmetros estimados θ_1 e θ_2 motiva a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(e_o) = \frac{1}{2} e_o^2 > 0. \quad (4.15)$$

A derivada no tempo \dot{V} é dada por

$$\dot{V}(e_o) = e_o \dot{e}_o. \quad (4.16)$$

Substituindo a equação (4.14) em (4.16) tem-se

$$\dot{V}(e_o) = e_o \left[-a_m e_o + \frac{k_m}{\theta_2^*} (\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r) \right]. \quad (4.17)$$

Substituindo a equação (4.10) em (4.17) obtém-se

$$\dot{V}(e_o) = e_o \left[-a_m e_o + \frac{k_m}{\theta_2^*} (\theta_1 y - \theta_1^* y + \theta_2 r - \theta_2^* r) \right] \quad (4.18)$$

Para garantir que $\dot{V}(e_o) < 0$, definiu-se

$$\begin{cases} \theta_1 = -\bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(e_o y) \\ \theta_2 = -\bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(e_o r) \end{cases} \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 > |\theta_1^*| \\ \bar{\theta}_2 > |\theta_2^*| \end{cases}$$

Substituindo (4.19) na equação (4.18) tem-se

$$\dot{V}(e_o) = -a_m e_o^2 - \frac{k_m}{\theta_2^*} [\bar{\theta}_1 |e_o y| + \theta_1^* e_o y + \bar{\theta}_2 |e_o r| + \theta_2^* e_o r] < 0.$$

Assim, a lei de controle descrita pela equação (4.9) e as leis adaptativas descritas pela equação (4.19) garantem que $V(e_o) > 0$, $\dot{V}(e_o) < 0$ e $V(e_o) \rightarrow \infty$ quando $\|e_o\| \rightarrow \infty$, tornando a equação (4.15) uma função de Lyapunov. Assim, o sistema possui um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável ($e_o = 0$), ou seja, o estado da planta converge assintoticamente para o estado do modelo de referência para qualquer sinal de entrada $r(t)$.

4.1.1 Resultados de Simulação

Para verificar o desempenho do VS-MRAC foram realizadas simulações em uma planta de primeira ordem e instável. Considere a planta

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s-1} \quad (4.20)$$

e o modelo de referência

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{1}{s+1}. \quad (4.21)$$

Os parâmetros ideais do controlador são $\theta_1^* = -2, 0$ e $\theta_2^* = 1, 0$. Foram escolhidas para as simulações condições iniciais diferentes para a planta $y(0) = 0, 5$ e o modelo de referência $y_m(0) = 0, 0$. Os valores das amplitudes dos relés foram escolhidos como sendo um pouco maiores do que seus valores corretos $\bar{\theta}_1 = 2, 1$ e $\bar{\theta}_2 = 1, 1$. Para uma referência tipo degrau unitário, passo de integração $h = 10^{-3}$ e uma perturbação de 30% do valor da referência na saída da planta no instante $t = 8s$, o resultado obtido pelo sistema está representado na Figura 4.1. Pode-se observar que o sistema percebe a perturbação no instante $t = 8s$ e em seguida é direcionado a seguir o modelo de referência novamente, comprovando a robustez do sistema.

4.2 Planta com Grau Relativo Unitário

Para a prova de estabilidade do controlador VS-MRAC com grau relativo unitário, utiliza-se a mesma estrutura do controlador MRAC apresentado na seção 3.1.

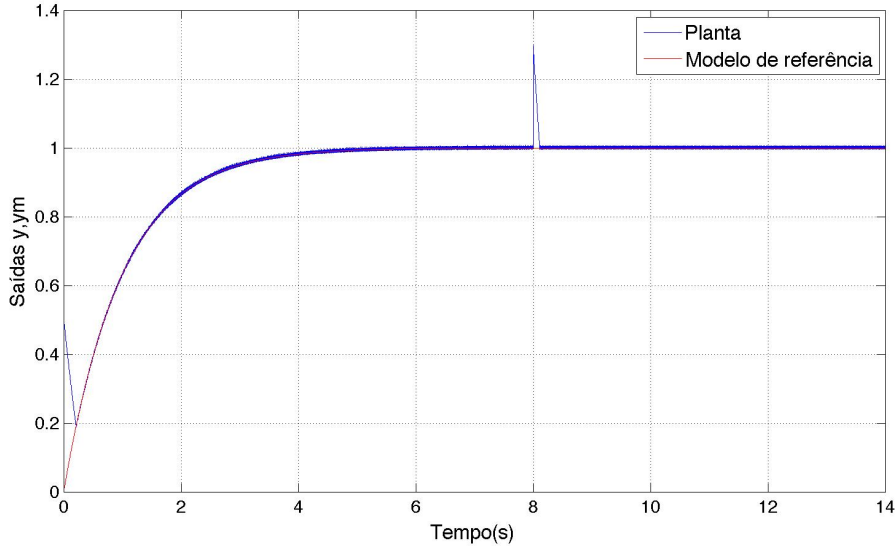


Figura 4.1: Saídas da planta e do modelo de referência do VS-MRAC para uma planta de primeira ordem com uma perturbação no instante $t = 8s$

Assim, será considerada a planta (3.1), o modelo de referência (3.2), os filtros (3.3), o erro (3.12) e as hipóteses (hipóteses 1-7 da seção 3.1) do projeto do controlador MRAC.

O projeto das leis adaptativas que geram os parâmetros estimados θ_1 e θ_2 motiva a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T P e > 0, \quad P = P^T > 0. \quad (4.22)$$

A derivada no tempo \dot{V} é dada por

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}). \quad (4.23)$$

Substituindo (3.11) em (4.23), tem-se

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2} \left[(e^T A_c^T + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c^T \tilde{\theta}^T \omega) P e + e^T P (A_c e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega) \right]. \quad (4.24)$$

Desenvolvendo a equação (4.24) tem-se

$$\dot{V}(e) = \frac{1}{2} \left[e^T (A_c^T P + P A_c) e + \frac{2}{\theta_{2n}^*} e^T P b_c \tilde{\theta}^T \omega \right]. \quad (4.25)$$

Considerando o Lema de Kalman-Yakubovich ($A_c^T P + P A_c = -2Q$, $P b_c = c_c$, $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$) [Andrievsky et al. 1996], tem-se $e^T P b_c = e^T c_c = c_c^T e = e_o$. Aplicando o Lema na equação (4.25) obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= \frac{1}{2}(-2e^T Q e + \frac{2}{\theta_{2n}^*} e_o \tilde{\theta}^T \omega) \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e + \frac{1}{\theta_{2n}^*} e_o \tilde{\theta}^T \omega.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Desenvolvendo a equação (4.26) tem-se

$$\dot{V}(e) = -e^T Q e - \frac{1}{\theta_{2n}^*} \sum_{i=1}^{2n} (-\theta_i e_o \omega_i + \theta_i^* e_o \omega_i). \quad (4.27)$$

Para garantir que $\dot{V}(e_o) < 0$, definiu-se as leis adaptativas como descrito pela equação (3.20) e, substituindo na equação (4.27), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= -e^T Q e - \frac{1}{\theta_{2n}^*} \sum_{i=1}^{2n} (\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_o \omega_i) e_o \omega_i + \theta_i^* e_o \omega_i) \\ \dot{V}(e) &= -e^T Q e - \frac{1}{\theta_{2n}^*} \sum_{i=1}^{2n} (\bar{\theta}_i |e_o \omega_i| + \theta_i^* e_o \omega_i) < 0.\end{aligned}$$

Assim, a lei de controle descrita pela equação (3.17) e as leis adaptativas descritas pela equação (3.20) garantem que $V(e_o) > 0$, $\dot{V}(e_o) < 0$ e $V(e_o) \rightarrow \infty$ quando $\|e_o\| \rightarrow \infty$, tornando a equação (4.22) uma função de Lyapunov. Assim, o sistema possui um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável ($e_o = 0$), ou seja, o estado da planta converge assintoticamente para o estado do modelo de referência para qualquer sinal de entrada $r(t)$ uniformemente limitado.

4.2.1 Resultados de Simulação

Para verificar o desempenho do VS-MRAC foram realizadas simulações com uma planta com grau relativo unitário e instável. Considere a planta

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}$$

e o modelo de referência

$$M(s) = \frac{1,5(s+2)}{(s+1)(s+3)}.$$

Os parâmetros ideais do controlador são $\theta_{v_1}^* = 0,5$, $\theta_n^* = -6,0$, $\theta_{v_2}^* = 5,0$ e $\theta_{2n}^* = 1,5$. Foram escolhidas para as simulações condições iniciais diferentes para a planta $y(0) = 0,5$ e o modelo de referência $y_m(0) = 0,0$. Os valores das amplitudes dos relés foram escolhidos como sendo um pouco maiores do que seus valores corretos $\bar{\theta}_{v_1} = 0,6$, $\bar{\theta}_n = 6,1$, $\bar{\theta}_{v_2} = 5,1$ e $\bar{\theta}_{2n} = 1,6$. Os parâmetros dos filtros são: $\Lambda = -2$ e $g = 2$. Para uma referência tipo degrau unitário, passo de integração $h = 10^{-3}$ e uma perturbação de 30% do valor da referência na saída da planta no instante

$t = 6s$, o resultado obtido pelo sistema está representado na Figura 4.2. Pode-se observar que o sistema percebe a perturbação no instante $t = 6s$ e em seguida é direcionado a seguir o modelo de referência novamente, comprovando a robustez do sistema.

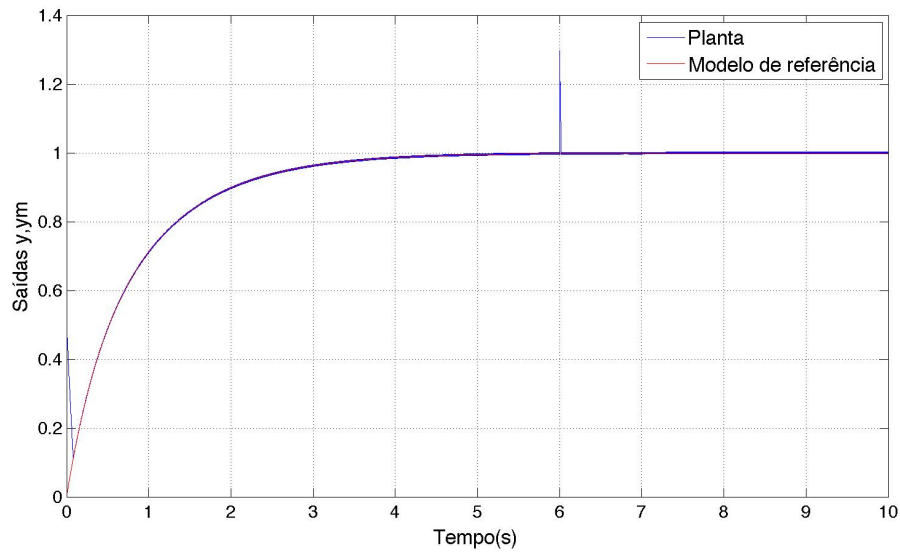


Figura 4.2: Saídas da planta e do modelo de referência do VS-MRAC para uma planta com grau relativo unitário com uma perturbação no instante $t = 6s$

Capítulo 5

Análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto

Este capítulo é destinado a mostrar uma análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto para plantas SISO lineares, invariantes no tempo, de primeira ordem e grau relativo unitário. A motivação foi devido ao avanço da tecnologia que está permitindo embarcar técnicas de controle adaptativo, tornando o estudo da estabilidade do sistema utilizando essas técnicas no caso discreto importantes. Para o caso contínuo, sabe-se que a estabilidade assintótica global é garantida como foi visto no Capítulo 4. Porém, para o caso discreto isso não é verdade pois o sistema pode se instabilizar à medida que o período de amostragem cresce como foi mostrado no Capítulo 3. Ou seja, existe uma limitação em relação a esse período de amostragem utilizado. Primeiro será mostrada a análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto para plantas de primeira ordem [Jacome et al. 2012] e depois para plantas com grau relativo unitário.

A planta e o modelo de referência descritos nesse capítulo serão discretizados com base no segurador de ordem zero (ZOH) sem atraso da seguinte maneira. Considere um sistema SISO descrito por variáveis de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $u(t) \in \mathfrak{R}$ é o sinal de controle, $x(t) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ é o vetor de estado, $y(t) \in \mathfrak{R}$ é a saída e $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ e $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$.

Uma solução para a equação de estado acima é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (5.2)$$

onde t_o é o tempo inicial, $x(t_o)$ a condição inicial do estado e $x(t)$ o estado do sistema. A obtenção de (5.2) é reproduzida no Apêndice B.

Para obter a equação diferença sobre um determinado período de amostragem h da equação (5.2), é necessário mudar a notação ($t = kh + h$ e $t_o = kh$). Portanto, surge uma solução particular de (5.2):

$$x(kh + h) = e^{Ah} x(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A(kh+h-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (5.3)$$

Uma suposição comum e tipicamente válida para um segurador de ordem zero (ZOH) sem atraso, é que

$$u(\tau) = u(kh), \quad kh \leq \tau < kh + h.$$

Para facilitar a solução de (5.3) para um ZOH sem atraso, mudam-se as variáveis na integral de τ para η , tal que

$$\eta = kh + h - \tau.$$

Assim,

$$x(kh + h) = e^{Ah} x(kh) + \int_0^h e^{A\eta} d\eta B u(kh).$$

Definindo

$$\Phi = e^{Ah}$$

e

$$\Gamma = \int_0^h e^{A\eta} d\eta B,$$

então o sistema (5.1) será representado pelo sistema discreto da seguinte forma

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

onde $x(k) \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, $y(k)$ e $u(k) \in \mathfrak{R}$ são os sinais amostrados, $\Phi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ e $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$.

A matriz Φ pode ser calculada pela transformada inversa de Laplace de $(sI - A)^{-1}$ ou por expansão em série de Taylor

$$\Phi = I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \dots,$$

onde I é a matriz identidade.

5.1 Planta de Primeira Ordem

Para a análise de estabilidade do controlador VS-MRAC no caso discreto para plantas de primeira ordem, será considerada a planta (4.1), o modelo de referência (4.2) e as hipóteses (hipóteses 8 e 9 da seção 4.1) do VS-MRAC contínuo para plantas de primeira ordem.

Utilizando um segurador de ordem zero, discretiza-se as equações (4.1) e (4.2) obtendo a planta

$$W(z) = \frac{\Gamma_p}{z - \Phi_p} \quad (5.4)$$

e o modelo de referência discreto

$$M(z) = \frac{\Gamma_m}{z - \Phi_m}, \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{cases} \Gamma_p = \int_0^h e^{A\tau} d\tau b \\ \Phi_p = e^{Ah} \\ \Gamma_m = \int_0^h e^{A_m\tau} d\tau b_m \\ \Phi_m = e^{A_m h} \end{cases}$$

e h é o período de amostragem do sistema.

As equações (5.4) e (5.5) podem ser descritas respectivamente da seguinte forma

$$y(k+1) = \Phi_p y(k) + \Gamma_p u(k) \quad (5.6)$$

$$y_m(k+1) = \Phi_m y_m(k) + \Gamma_m r(k). \quad (5.7)$$

onde k é o instante de amostragem.

O objetivo é encontrar um sinal de controle $u(k)$ tal que o erro de rastreamento

$$e_o(k) = y(k) - y_m(k) \quad (5.8)$$

tenda para zero assintoticamente com condições iniciais arbitrárias quando $k \rightarrow \infty$, para um sinal de referência $r(k)$ uniformemente limitado.

Seja a lei de controle para a planta com parâmetros conhecidos dada por

$$u^*(k) = \theta_1^* y(k) + \theta_2^* r(k).$$

Assim, existe um único vetor constante $\theta^{*T} = [\theta_1^* \theta_2^*]$ tal que a função de transferência da planta em malha fechada se comporta como o modelo de referência (condição de “*matching*”) onde

$$\theta_1^* = \frac{\Phi_m - \Phi_p}{\Gamma_p}, \quad \theta_2^* = \frac{\Gamma_m}{\Gamma_p}. \quad (5.9)$$

Se a planta apresenta incertezas paramétricas não será possível conhecer θ_1^* e θ_2^* . Assim, define-se um novo sinal de controle

$$u(k) = \theta_1(k) y(k) + \theta_2(k) r(k) \quad (5.10)$$

onde θ_1 e θ_2 são adaptados até que $e_o(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ [Ioannou & Sun 1996].

Para este novo sinal de controle dado pela equação (5.10), deve-se calcular uma nova expressão para o erro de saída entre a planta e o modelo de referência. Para

isto, introduz-se os erros paramétricos

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_1^* \\ \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_2^* \end{cases} \quad (5.11)$$

na equação (5.10), o que resulta em um sinal de controle

$$u(k) = \tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k) + \theta_1^* y(k) + \theta_2^* r(k). \quad (5.12)$$

Aplicando o sinal de controle da equação (5.12) na equação (5.6) tem-se

$$y(k+1) = \Phi_p y(k) + \Gamma_p \tilde{\theta}_1 y(k) + \Gamma_p \tilde{\theta}_2 r(k) + \Gamma_p \theta_1^* y(k) + \Gamma_p \theta_2^* r(k). \quad (5.13)$$

Substituindo a equação (5.9) na equação (5.13) obtém-se

$$y(k+1) = \Gamma_p (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) + \Phi_m y(k) + \Gamma_m r(k).$$

Substituindo o parâmetro da planta pelo do modelo de referência ($\Gamma_p = \frac{\Gamma_m}{\theta_2^*}$) tem-se

$$y(k+1) = \frac{\Gamma_m}{\theta_2^*} (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) + \Phi_m y(k) + \Gamma_m r(k). \quad (5.14)$$

Das equações (5.7), (5.8) e (5.14) tem-se

$$e_o(k+1) = \frac{\Gamma_m}{\theta_2^*} (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) + \Phi_m e_o(k). \quad (5.15)$$

Considere como função candidata de Lyapunov

$$V(k) = e_o^2(k) > 0.$$

A variação de $V(k)$ é dada por

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = e_o^2(k+1) - e_o^2(k). \quad (5.16)$$

Substituindo a equação (5.15) em (5.16) obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) e_o(k) \left[\left(\frac{\Gamma_m}{\theta_2^*} \right)^2 \frac{1}{e_o(k)} (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\Gamma_m}{\theta_2^*} \Phi_m \right] - e_o^2(k) (1 - \Phi_m^2). \end{aligned}$$

Seja $\vartheta(k) = (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) e_o(k)$. Assim,

$$\Delta V(k) = \vartheta(k) \left[\frac{\Gamma_m^2 \vartheta(k)}{\theta_2^{*2} e_o^2(k)} + \frac{2 \Phi_m \Gamma_m}{\theta_2^*} \right] - e_o^2(k) (1 - \Phi_m^2).$$

Para garantir que $\vartheta(k) = (\tilde{\theta}_1 y(k) + \tilde{\theta}_2 r(k)) e_o(k) < 0$, definiu-se

$$\begin{cases} \theta_1 = -\bar{\theta}_1 \operatorname{sgn}(e_o(k) y(k)) \\ \theta_2 = -\bar{\theta}_2 \operatorname{sgn}(e_o(k) r(k)) \end{cases} \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 > |\theta_1^*| \\ \bar{\theta}_2 > |\theta_2^*| \end{cases}$$

Baseado nas definições da equação (5.17), para $\Delta V(k) < 0$, basta garantir

$$\left(\frac{\Gamma_m^2}{\theta_2^{*2} e_o^2(k)} \vartheta(k) + \frac{2 \Phi_m \Gamma_m}{\theta_2^*} \right) > 0, \quad (5.18)$$

a qual pode ser expandida com a substituição dos erros dos parâmetros da equação (5.11) na equação (5.18) obtendo

$$\left[-\frac{\Gamma_m^2}{\theta_2^{*2}} \left(\frac{\bar{\theta}_1 |y(k)| + \bar{\theta}_2 |r(k)|}{|e_o(k)|} + \frac{u^*(k)}{e_o(k)} \right) + 2 \frac{\Phi_m \Gamma_m}{\theta_2^*} \right] > 0.$$

Assim, para a variação da função candidata de Lyapunov ser definida negativa ($\Delta V(k) < 0$) deve-se garantir que

$$2 \Phi_m \theta_2^* > \Gamma_m \left(\frac{\bar{\theta}_1 |y(k)| + \bar{\theta}_2 |r(k)|}{|e_o(k)|} + \frac{u^*(k)}{e_o(k)} \right). \quad (5.19)$$

Garantindo que a equação (5.19) seja satisfeita e mediante a escolha de h , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$, a amplitude do erro pode ser estimada pela inequação (5.20). Ou seja, dependendo das escolhas de h , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$, o erro satisfaz

$$|e_o(k)| > \frac{\Gamma_m}{2 \Phi_m \theta_2^*} \left[\bar{\theta}_1 |y(k)| + \bar{\theta}_2 |r(k)| + u^*(k) \operatorname{sgn}(e_o(k)) \right]. \quad (5.20)$$

Analisando a inequação (5.20), percebe-se que a medida que h aumenta, Γ_m aumenta e Φ_m diminui, e conseqüentemente, a amplitude do erro de rastreamento aumenta. Por essa mesma inequação, percebe-se que aumentando o valor de $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$, também aumenta a amplitude do erro de rastreamento.

Desenvolvendo a equação (5.19) e resolvendo $\Gamma_m = \int_0^h e^{A_m \tau} d\tau b_m$, obtém-se

$$2 e^{-A_m h} \theta_2^* > \frac{b_m}{A_m} (1 - e^{-A_m h}) \left(\frac{\bar{\theta}_1 |y(k)| + \bar{\theta}_2 |r(k)|}{|e_o(k)|} + \frac{u^*(k)}{e_o(k)} \right). \quad (5.21)$$

Aplicando o logaritmo neperiano na equação (5.21), e desenvolvendo, obtém-se

$$h < \frac{\ln(2 A_m \theta_2^* + b_m d) - \ln(b_m) - \ln(d)}{A_m} \quad (5.22)$$

$$\text{onde } d = \frac{\bar{\theta}_1 |y(k)| + \bar{\theta}_2 |r(k)|}{|e_o(k)|} + \frac{u^*(k)}{e_o(k)}.$$

Através da equação (5.22) pode-se calcular o período de amostragem limite h que pode ser utilizado no sistema sem instabilizá-lo. Assim, conhecendo o período de amostragem limite, pode-se definir o sistema embarcado que será utilizado no sistema sem instabilizá-lo.

5.1.1 Resultados de Simulação

Nesta seção, alguns resultados de simulação são apresentados para o caso discreto do VS-MRAC utilizando a planta instável (4.20) e o modelo de referência (4.21).

Foi utilizado um segurador de ordem zero para discretizar a planta

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{e^h - 1}{z - e^h}$$

e o modelo de referência

$$\frac{y_m(z)}{r(z)} = \frac{1 - e^{-h}}{z - e^{-h}}$$

onde h é o período de amostragem.

Os parâmetros ideais do controlador (para a planta contínua no tempo) são $\theta_1^* = -2,0$ e $\theta_2^* = 1,0$. Foram escolhidas para as simulações condições iniciais diferentes para a planta $y(0) = 0,5$ e o modelo de referência $y_m(0) = 0,0$. Os valores das amplitudes dos relés foram escolhidos como sendo um pouco maiores do que seus valores corretos $\bar{\theta}_1 = 2,1$ e $\bar{\theta}_2 = 1,1$.

As Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam a saída da planta e do modelo de referência para $h = 0,01s$, $h = 0,10s$ e $h = 0,34s$ (esses períodos de amostragem foram escolhidos de modo a facilitar a visualização nas figuras do aumento da amplitude do erro até a instabilização), respectivamente. Note que à medida que o período de amostragem cresce, a amplitude do sinal de saída da planta aumenta até se instabilizar, como pode ser visto na Figura 5.3. O erro oscila como apresentam as Figuras 5.4 e 5.5 para $h = 0,01s$ e $h = 0,10s$, respectivamente. Já para $h = 0,34s$, o sistema torna-se instável como demonstra a Figura 5.6. Nas Figuras 5.7 e 5.8 tem-se o erro, para $h = 0,01s$ e $h = 0,10s$, respectivamente, com uma amplitude que pode ser calculada pela equação (5.20) mediante as escolhas de h , $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$. Na Figura 5.9, percebe-se que o erro cresce indefinidamente para $h = 0,34s$.

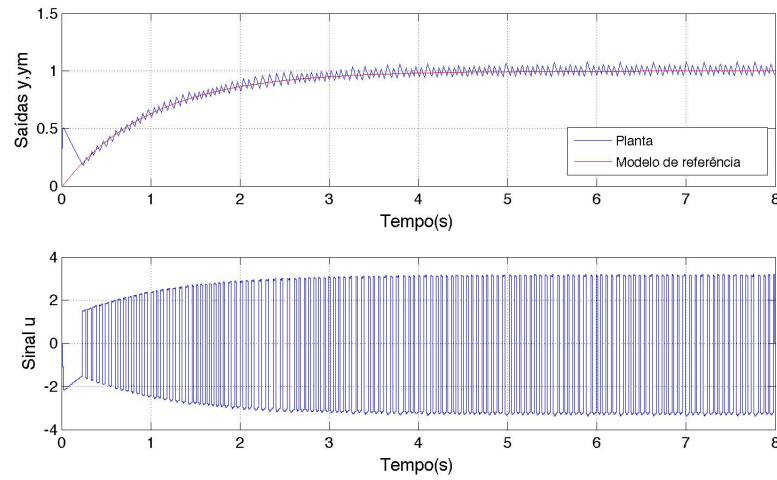


Figura 5.1: Resultados do controlador VS-MRAC para $h=0,01s$

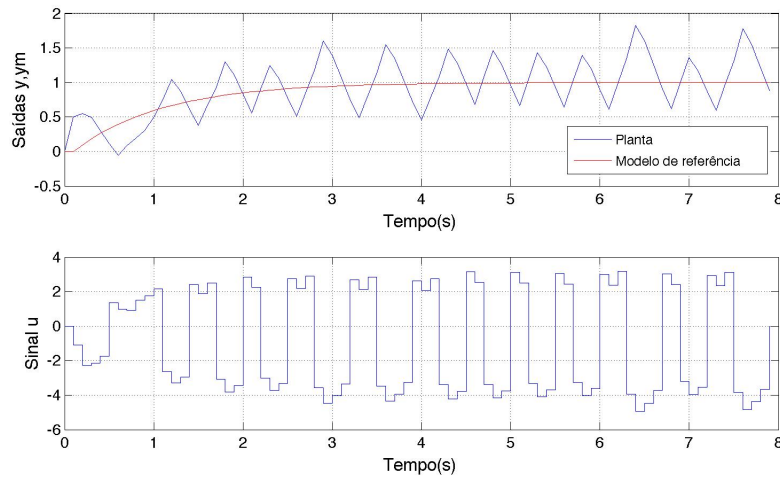


Figura 5.2: Resultados do controlador VS-MRAC para $h=0,10s$

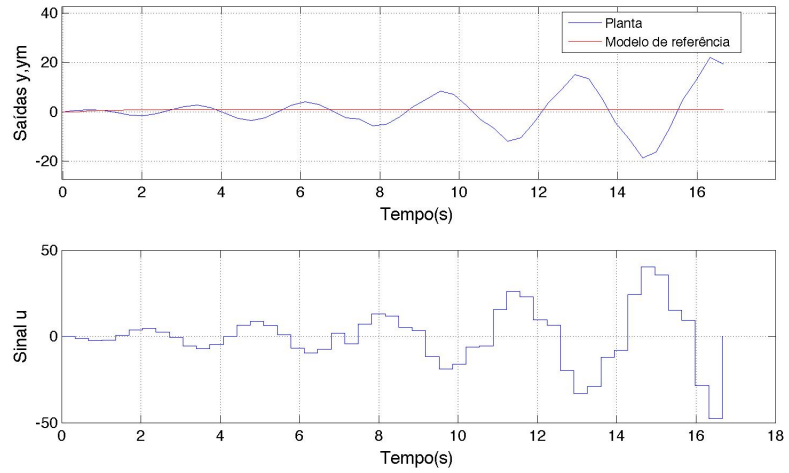


Figura 5.3: Resultados do controlador VS-MRAC para $h=0,34s$

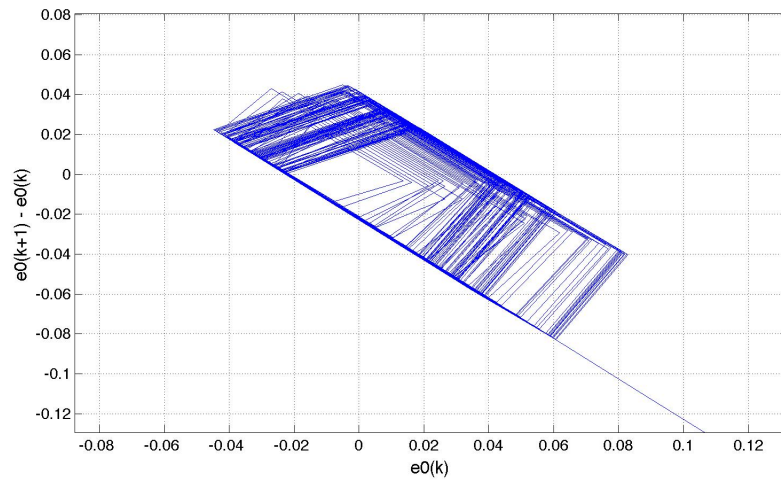


Figura 5.4: Plano de fase do erro para $h=0,01s$

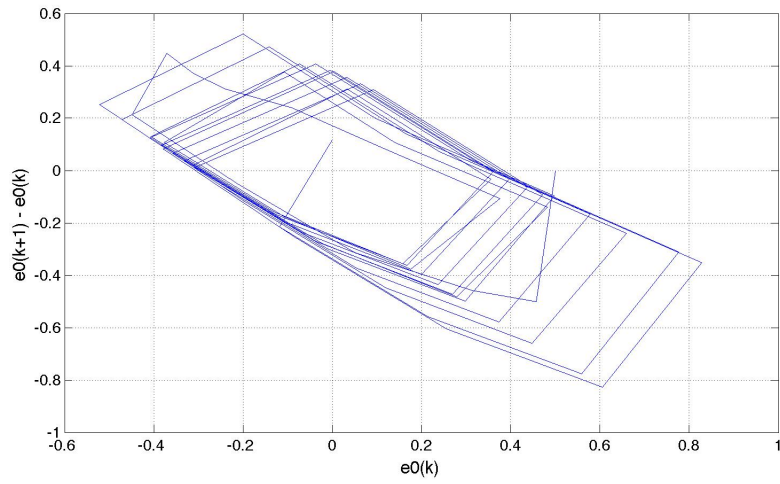


Figura 5.5: Plano de fase do erro para $h=0,10s$

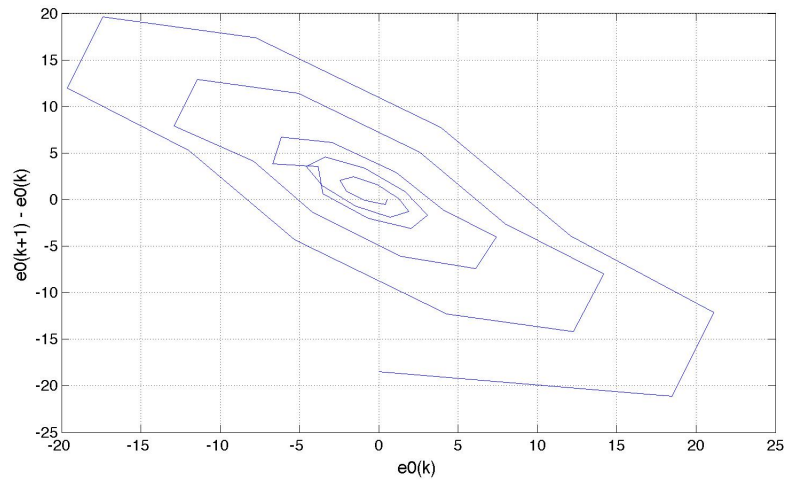


Figura 5.6: Plano de fase do erro para $h=0,34s$

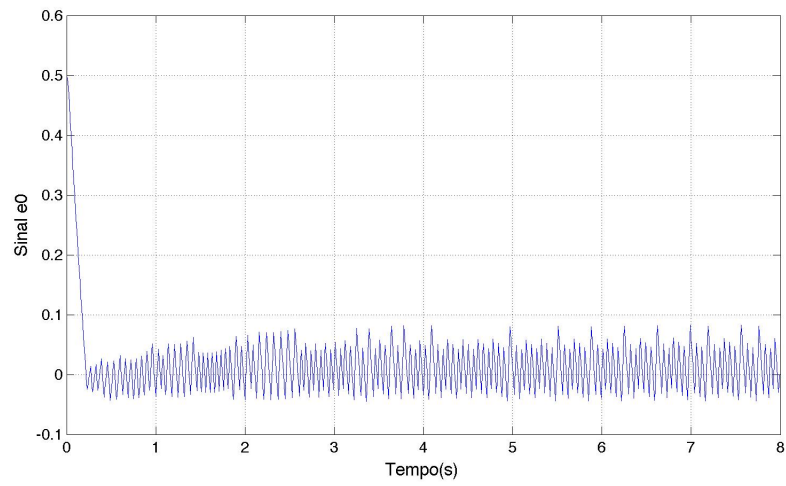


Figura 5.7: Erro para $h=0,01s$

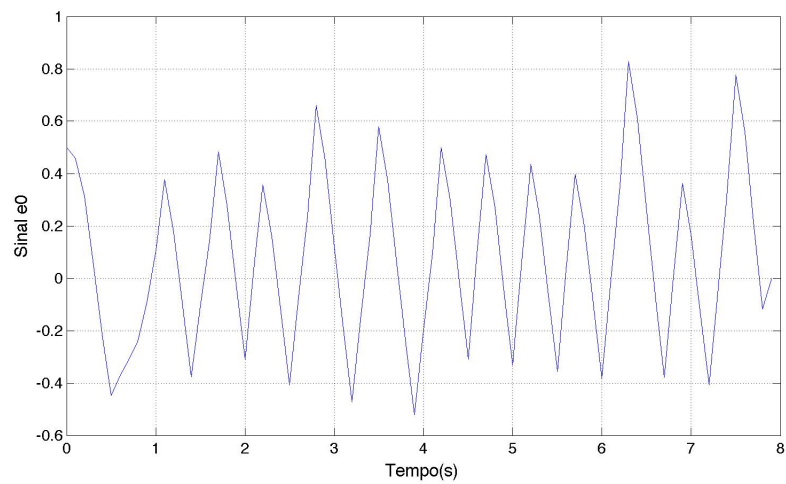
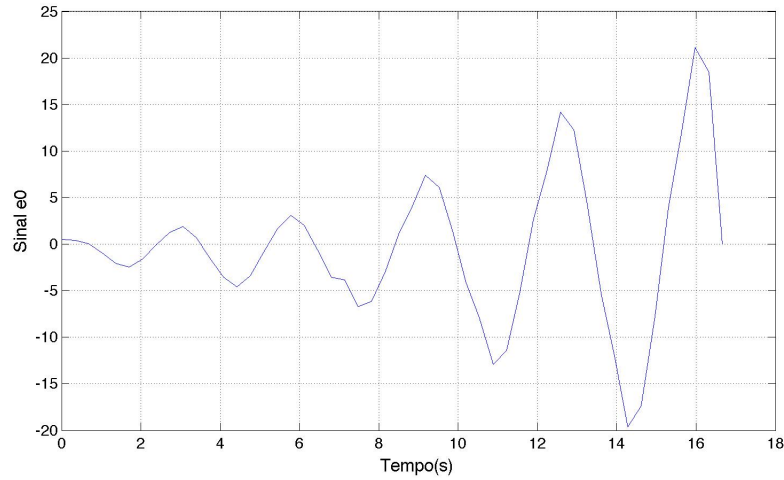


Figura 5.8: Erro para $h=0,10s$


 Figura 5.9: Erro para $h=0,34s$

5.2 Planta com Grau Relativo Unitário

Para a análise de estabilidade do controlador VS-MRAC com grau relativo unitário, utiliza-se a mesma estrutura do controlador MRAC apresentado na seção 3.1. Assim, será considerada a planta (3.1), o modelo de referência (3.2), os filtros (3.3) e as hipóteses (hipóteses 1-7 da seção 3.1) do projeto do controlador MRAC.

Passando a planta (3.1) para o espaço de estado, tem-se

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases} \quad (5.23)$$

Utilizando um segurador de ordem zero sem atraso, discretiza-se as equações (5.23) e (3.3) obtendo a planta

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = c^T x(k) \end{cases}$$

e os filtros discretos

$$\begin{cases} v_1(k+1) = \Phi_v v_1(k) + \Gamma_v u(k), & v_1 \in R^{n-1} \\ v_2(k+1) = \Phi_v v_2(k) + \Gamma_v c^T x(k), & v_2 \in R^{n-1} \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} d\tau b \\ \Phi = e^{Ah} \\ \Gamma_v = \int_0^h e^{A\tau} d\tau g \\ \Phi_v = e^{\Lambda h} \end{cases}$$

Assim, o sinal de controle será definido por meio de uma combinação linear do sinal de referência $r(k)$, do sinal de saída da planta $y(k)$ e dos sinais dos filtros

discretos $v_1(k)$ e $v_2(k)$. Esses sinais estarão definidos pelo vetor regressor $\omega(k)$, como sendo:

$$\omega^T(k) = [v_1^T(k) \ y(k) \ v_2^T(k) \ r(k)]. \quad (5.24)$$

O sinal de controle discreto é definido como sendo:

$$u(k) = \theta^T(k) \omega(k), \quad (5.25)$$

$$\text{onde } \theta^T(k) = \underbrace{[\theta_1(k) \cdots \theta_{n-1}(k)]}_{\theta_{v_1}^T(k)} \ \theta_n(k) \ \underbrace{[\theta_{n+1}(k) \cdots \theta_{2n-1}(k)]}_{\theta_{v_2}^T(k)} \ \theta_{2n}(k).$$

Existe um único vetor constante θ^* tal que a função de transferência da planta em malha fechada se comporte como o modelo de referência, ou seja, $y = W(z) u = W(z) \theta^{*T} \omega = M(z) r$ (condição de *matching*).

5.2.1 Equação do Erro

Nesta seção será definido o erro de saída $e_o(k)$. O vetor de estado $X(k)^T = [x^T(k) \ v_1^T(k) \ v_2^T(k)]$ do sistema é formado pela planta e pelos filtros de entrada e saída. Assim, a equação diferença é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \end{bmatrix}}_{X(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_v & 0 \\ \Gamma_v c^T & 0 & \Phi_v \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix}}_{X(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \Gamma_v \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{b}} u(k), \quad y(k) = c_c^T X(k). \quad (5.26)$$

Somando e subtraindo $\theta^{*T} \omega(k)$ na equação (5.25), tem-se:

$$u(k) = \theta^T \omega(k) - \theta^{*T} \omega(k) + \theta^{*T} \omega(k) = \underbrace{(\theta^T - \theta^{*T})}_{\tilde{\theta}^T} \omega(k) + \theta^{*T} \omega(k). \quad (5.27)$$

Substituindo a equação (5.24) em (5.27) e desenvolvendo, chega-se na seguinte equação:

$$u(k) = \tilde{\theta}^T \omega(k) + [\theta_n^* c^T \ \theta_{v_1}^{*T} \ \theta_{v_2}^{*T}] X(k) + \theta_{2n}^* r(k). \quad (5.28)$$

Substituindo a equação (5.28) em (5.26), tem-se:

$$\begin{cases} X(k+1) = \bar{A} X(k) + \bar{b} (\tilde{\theta}^T \omega(k) + [\theta_n^* c^T \ \theta_{v_1}^{*T} \ \theta_{v_2}^{*T}] X(k) + \theta_{2n}^* r(k)) \\ y(k) = c_c^T X(k) \end{cases} \quad (5.29)$$

Desenvolvendo a equação (5.29), obtém-se:

$$\begin{cases} X(k+1) = (\bar{A} + \bar{b} [\theta_n^* c^T \theta_{v_1}^{*T} \theta_{v_2}^{*T}]) X(k) + \bar{b} \theta_{2n}^* r(k) + \bar{b} \tilde{\theta}^T \omega(k) \\ y(k) = c_c^T X(k) \end{cases}$$

onde $A_c = \bar{A} + \bar{b} [\theta_n^* c^T \theta_{v_1}^{*T} \theta_{v_2}^{*T}]$, $b_c = \bar{b} \theta_{2n}^*$ e $c_c^T = [c^T \ 0 \ 0]$.

Então, o sistema em malha fechada passa a ser representado por:

$$\begin{cases} X(k+1) = A_c X(k) + b_c r(k) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega(k) \\ y(k) = c_c^T X(k) \end{cases}$$

Note que pela condição de *matching* ($\theta = \theta^* \rightarrow \tilde{\theta} = 0$) a planta se comporta como o modelo de referência. Então,

$$\begin{cases} X_m(k+1) = A_c X_m(k) + b_c r(k) \\ y_m(k) = c_c^T X_m(k) \end{cases}$$

Definindo $e(k) = X(k) - X_m(k)$ e $e_o(k) = y(k) - y_m(k)$ (erro de saída), tem-se as seguintes equações para os erros:

$$e(k+1) = A_c e(k) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega(k) \quad (5.30)$$

$$e_o(k) = c_c^T e(k). \quad (5.31)$$

5.2.2 Análise de Estabilidade

O projeto das leis adaptativas que geram os parâmetros estimados motiva a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V(e(k)) = e^T(k) P e(k) > 0, \quad P = P^T > 0.$$

A variação de $V(k)$ é dada por

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= V(e(k+1)) - V(e(k)) \\ &= e^T(k+1) P e(k+1) - e^T(k) P e(k). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Substituindo a equação (5.30) na equação (5.32) obtém-se

$$\Delta V(e(k)) = [A_c e(k) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega(k)]^T P [A_c e(k) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega(k)] - e^T(k) P e(k)$$

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= [e^T(k) A_c^T + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c^T \tilde{\theta}^T \omega(k)] P [A_c e(k) + \frac{1}{\theta_{2n}^*} b_c \tilde{\theta}^T \omega(k)] \\ &\quad - e^T(k) P e(k). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Desenvolvendo a equação (5.33) tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= e^T(k)[A_c^T P A_c - P] e(k) + \frac{2}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k) e^T(k) A_c^T P b_c \\ &\quad + \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k)\right)^2 b_c^T P b_c. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Considerando o Lema de Kalman-Yakubovich-Popov no caso discreto ($A_c^T P A_c - P = -LL^T$, $A_c^T P b_c = c_c - LW$, $b_c^T P b_c = -W^T W$, $P = P^T > 0$, L e W são matrizes reais) [Hitz & Anderson 1969], obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= -e^T(k)LL^T e(k) + \frac{2}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k) e^T(k)[c_c - LW] + \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k)\right)^2 (-W^T W) \\ \Delta V(e(k)) &= -e^T(k)LL^T e(k) - \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k)\right)^2 W^T W \\ &\quad + \frac{2}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k) e^T(k) c_c - \frac{2}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k) e^T(k) LW. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Substituindo a equação (5.31) na equação (5.35) e juntando os termos semelhantes, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= -e^T(k)LL^T e(k) - \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k)\right)^2 W^T W + \frac{2}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k) [e_o(k) - e^T(k) LW] \\ \Delta V(e(k)) &= -e^T(k)LL^T e(k) - \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k)\right)^2 W^T W \\ &\quad + \frac{2}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega(k) e_o(k) \left(1 - \frac{e^T(k)}{e_o(k)} LW\right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Observando a equação (5.36), percebe-se que o último termo é o único que pode deixar $\Delta V(e(k)) > 0$. Assim, torna-se necessária a análise desse termo para definir o sinal de $\Delta V(e(k))$. Tomando o último termo, e manipulando-o, tem-se:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\theta_{2n}^*} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\theta}_i \omega_i(k) e_o(k) \left(1 - \frac{e^T(k)}{e_o(k)} LW\right) = \\ &= -\frac{2}{\theta_{2n}^*} \sum_{i=1}^{2n} \left(-\theta_i e_o(k) \omega_i(k) + \theta_i^* e_o(k) \omega_i(k)\right) \left(1 - \frac{e^T(k)}{e_o(k)} LW\right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Utilizando a mesma lei dos parâmetros adaptativos do VS-MRAC no caso contínuo ($\theta_i = -\bar{\theta}_i \text{sgn}(e_o(k) \omega_i(k))$, $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$) e substituindo na equação (5.37), obtém-se

$$-\frac{2}{\theta_{2n}^*} \sum_{i=1}^{2n} \left(\bar{\theta}_i |e_o(k) \omega_i(k)| + \theta_i^* e_o(k) \omega_i(k) \right) \left(1 - \frac{e^T(k)}{e_o(k)} L W \right). \quad (5.38)$$

Percebe-se pela equação (5.38), que para a variação da função de Lyapunov discreta ser definida negativa, a inequação (5.39) tem que ser atendida.

$$1 - \frac{e^T(k)}{e_o(k)} L W \geq 0 \quad (5.39)$$

Substituindo a equação do Lema de Kalman-Yakubovich-Popov no caso discreto ($A_c^T P b_c = c_c - L W$) na inequação (5.39), tem-se

$$1 - \frac{e^T(k)}{e_o(k)} [c_c - A_c^T P b_c] \geq 0. \quad (5.40)$$

Pode-se perceber quando h tende a zero, ou seja, quando o sistema se comporta como no caso contínuo, b_c tende a zero. Assim,

$$e^T(k) [c_c - A_c^T P b_c] = e^T(k) c_c = e_o(k)$$

e a inequação (5.40) se aproxima de

$$1 - \frac{e_o(k)}{e_o(k)} = 0$$

Obs: $e_o(k) = y(k) - y_m(k) = c_c^T X(k) - c_c^T X_m(k) = c_c^T (X(k) - X_m(k)) = c_c^T e(k) = e^T(k) c_c$.

Com h tendendo a zero a inequação (5.40) é satisfeita e a variação da função de Lyapunov se torna definida negativa. Assim, para o caso em que h é muito próximo de zero, o sistema é estável. Portanto, como foi demonstrado no capítulo anterior, para h muito próximo de zero, ou seja, o sistema se comportando no tempo contínuo, o VS-MRAC se torna estável.

5.2.3 Resultados de Simulação

Nesta seção, alguns resultados de simulação são apresentados para o caso discreto do VS-MRAC utilizando a planta instável com grau relativo unitário

$$W(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)}$$

e o modelo de referência

$$M(s) = \frac{1,5(s+2)}{(s+1)(s+3)}.$$

Os parâmetros ideais do controlador (para a planta contínua no tempo) são $\theta_n^* = -7, 0$, $\theta_{v1}^* = 0, 5$, $\theta_{2n}^* = 1, 5$ e $\theta_{v2}^* = 6, 5$. Foram escolhidas para as simulações condições iniciais diferentes para a planta $y(0) = 0, 5$ e o modelo de referência $y_m(0) = 0, 0$, passo de integração $h = 10^{-4}$ e uma referência degrau unitário. Os valores das amplitudes dos relés foram escolhidos como sendo um pouco maiores do que seus valores corretos $\bar{\theta}_n = 7, 4$, $\bar{\theta}_{v1} = 0, 9$, $\bar{\theta}_{2n} = 1, 9$ e $\bar{\theta}_{v2} = 6, 9$.

Pode-se observar na Figura 5.10, que a planta segue o modelo de referência com transitório rápido e sem oscilações. Mesmo com os valores iniciais da planta e do modelo de referência diferentes, o sinal do erro tendeu para zero ou para um conjunto residual pequeno em torno de zero. Assim, para um período de amostragem muito pequeno ($h = 10^{-4}$), percebe-se que o sistema se comporta como no caso contínuo, pois, com h tendendo a zero a inequação (5.40) é satisfeita e a variação da função de Lyapunov se torna definida negativa.

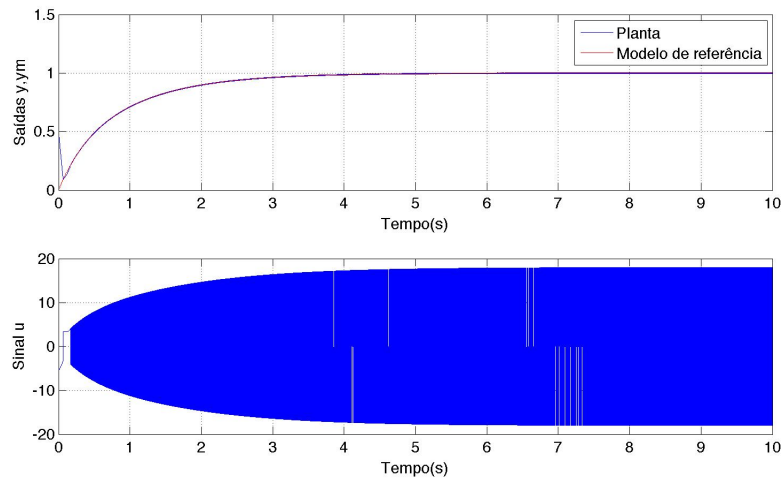


Figura 5.10: Saída da planta e modelo de referência utilizando um controlador VS-MRAC para $h=0,0001s$

Capítulo 6

Conclusões

Um dos principais e fundamentais objetivos num sistema de controle é a prova de estabilidade. Este trabalho apresentou algumas contribuições ao estudo da estabilidade de controladores adaptativos por modelo de referência e estrutura variável no caso discreto quando somente os sinais de entrada e saída da planta são mensuráveis. A motivação foi devido ao problema apresentado na implementação do VS-MRAC em um CLP devido ao seu alto tempo de processamento ou período de amostragem. Assim, a análise de estabilidade do VS-MRAC no caso discreto em função do período de amostragem adquire fundamental importância.

Neste trabalho foi analisada a prova de estabilidade do controlador VS-MRAC no caso discreto, para plantas de primeira ordem e com grau relativo igual a 1, utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov. Sabe-se que no caso do VS-MRAC contínuo, a estabilidade assintótica global é garantida, o que não é verdade para o caso discreto. Para o caso discreto, existe uma limitação em relação ao período de amostragem (h) utilizado e, dependendo desse período, o sistema pode sob certas circunstâncias se instabilizar. Existe um período de amostragem limite que pode ser utilizado sem instabilizar o VS-MRAC no caso discreto, e esse período de amostragem pode ser calculado. Demonstra-se que o erro de rastreamento pode ter sua amplitude também calculada e essa amplitude tende a aumentar à medida que o período de amostragem aumenta. Para um período de amostragem tendendo a zero, o sistema se comporta como no caso contínuo. Como perspectiva para futuros trabalhos, pode-se propor a generalização desta análise para plantas com grau relativo qualquer e para plantas com grau relativo unitário obter uma expressão explícita para h .

Referências Bibliográficas

- Akhtar, S. & D.S. Bernstein [2005], Lyapunov-stable discrete-time model reference adaptive control, *em* 'International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Portland, OR, USA', pp. 3174 – 3179 vol. 5.
- Andrievsky, B.R., A.N. Churilov & A.L. Fradkov [1996], Feedback kalman-yakubovich lemma and its applications to adaptive control, *em* 'Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE', Vol. 4, pp. 4537 –4542 vol.4.
- Balestrino, A., G. De Maria & A.S.I. Zinober [1984], 'Nonlinear adaptive model-following control', *Automatica* **20**(5), 559–568.
- Bandyopadhyay, B. & C.M. SaaJ [2002], 'Algorithm on robust sliding mode control for discrete-time system using fast output sampling feedback', *IEE Proceedings Control Theory & Applications* - **149**(6), 497 – 503.
- Bartolini, G., A. Ferrara & V.I. Utkin [1995], 'Adaptive sliding mode control in discrete-time systems', *Automatica* **31**(5), 769 – 773.
- Chan, C.Y. [1991], 'Servo-systems with discrete-variable structure control', *Systems & Control Letters* **17**(4), 321 – 325.
- De Carlo, R.A., K.H. Zak & G.P. Matthews [1988], 'Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial', *Proceedings of the IEEE* **76**(3), 212–232.
- Duarte, M.A. & F. Ponce, Rodrigo [1997], 'Discrete-time combined model reference adaptive control', *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **11**(6), 501–517.
- Emelyanov, S.V. [1970], 'Theory of variable structure systems', *Nauka Publishers, Moscow* .
- Emelyanov, S.V. & V.A. Taran [1963a], 'Use of inertial elements in the design of a class of variable structure control systems - i', *Automation and Remote Control* **24**(1), 29–42.
- Emelyanov, S.V. & V.A. Taran [1963b], 'Use of inertial elements in the design of a class of variable structure control systems - ii', *Automation and Remote Control* **24**(2), 183–190.

- Filippov, A.F. [1964], ‘Differential equations with discontinuous right-hand sides’, *American Math. Soc. Translations* **42(2)**(4), 199–231.
- Furuta, Katsuhisa [1990], ‘Sliding mode control of a discrete system’, *Systems & Control Letters* **14**(2), 145 – 152.
- Gao, Weibing, Yufu Wang & A. Homaifa [1995], ‘Discrete-time variable structure control systems’, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **42**(2), 117 –122.
- Garcia, J.P.F., J.M.S. Ribeiro, J.J.F. Silva & E.S. Martins [2005], ‘Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer’, *IEE Proceedings Control Theory & Applications* - **152**(2), 220 – 228.
- Goodwin, G.C. & D.Q. Mayne [1987], ‘A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control’, *Automatica* **23**(1), 57–70.
- Goodwin, G.C. & K.S. Sin [1984], *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Vol. 23, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Hitz, L. & B.D.O. Anderson [1969], ‘Discrete positive-real functions and their application to system stability’, *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of* **116**(1), 153 –155.
- Hsu, L. [1990], ‘Variable structure model-reference adaptive control (vs-mrac) using only input and output measurements: the general case’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(11), 1238 –1243.
- Hsu, L., A.D. Araujo & R.R. Costa [1994], ‘Analysis and design of i/o based variable structure adaptive control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(1), 4 –21.
- Hsu, L. & R.R. Costa [1989], ‘Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements’, *International Journal of Control* **49**(2), 399–416.
- Hung, J.Y., W. Gao & J.C. Hung [1993], ‘Variable structure control: a survey’, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **40**(1), 2 –22.
- Ioannou, P. A. & J. Sun [1996], *Robust Adaptive Control*, Englewood Cliffs.
- Itkis, U. [1976], *Control systems of variable structure*, Wiley (New York).
- Jacome, I.C., Dias S.M., Queiroz K.I.P.M. & A.D. Araujo [2012], ‘Análise de estabilidade do vs-mrac no caso discreto’, *XIX Congresso Brasileiro de Automática*.
- Khalil, H. K. [1992], *Nonlinear Systems*, Macmillan.
- Landau, Y.D. [1979], *Adaptive Control - The Model Reference Approach*, Vol. 23, Marcel Dekker, New York.

- Lyapunov, A.M. [1892], ‘The general problem of motion stability’, *Translated to English, Ann. Math. Study, no. 17, 1949, Princeton University Press, 1947*.
- Mareels, I. & Polderman, J. W. [1996], *Adaptive systems an introduction*, Birkhauser.
- Milosavljevic, C. [1985], ‘General conditions for the existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems’, *Automation and Remote Control* **3**, 36–44.
- Narendra, K.S. & L.S. Valavani [1977], Stable adaptive controller design part i: Direct control, *em* ‘Decision and Control including the 16th Symposium on Adaptive Processes and a Special Symposium on Fuzzy Set Theory and Applications, 1977 IEEE Conference on’, Vol. 16, pp. 881–886.
- Narendra, K.S. & L.S. Valavani [1978], ‘Stable adaptive controller design - part i - direct control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-23**(4), 570–583.
- Oliveira, J. B. [2007], Estabilidade e Robustez de um Controlador Adaptativo Indireto por Modelo de Referência e Estrutura Variável, Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN.
- Paden, B.E. & S.S. Sastry [1987], ‘A calculus for computing filippov’s differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators’, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **CAS-34**(1), 73–82.
- Pan, Yaodong & Katsuhisa Furuta [1997], ‘Discrete-time vss controller design’, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **7**(4), 373–386.
- Rohrs, C. & L. Valavani [1985], ‘Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**(9), 881–889.
- Slotine, J. & Li, W. [1991], *Applied Nonlinear Control*.
- Slotine, J.J.E. & S.S. Sastry [1983], ‘Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators’, *International Journal of Control* **38**(2), 465–492.
- Taran, V.A. [1964a], ‘Control of a linear plant with an astatic variable structure controller without pure derivatives in control law - i’, *Automation and Remote Control* **25**(10), 1278–1288.
- Taran, V.A. [1964b], ‘Control of a linear plant with an astatic variable structure controller without pure derivatives in control law - ii’, *Automation and Remote Control* **25**(11), 1406–1412.
- Utkin, V.I. [1977], ‘Variable structure systems with sliding modes’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(2), 212–222.

- Utkin, V.I. [1978], ‘Sliding modes and their application in variable structure systems’, *Mir Publishers, Moscow* .
- Utkin, V.I. [1983], ‘Variable structure systems: Present and future’, *Automation and Remote Control* **44**(9), 1105–1120.
- Utkin, V.I. [1987], ‘Discontinuous control systems: State of art in theory and applications’, *Proceedings of the 10th IFAC World Congress, Munich* **1**, 75–94.
- Utkin, V.I. [1992], ‘Optimization and control using sliding modes’, *New York: Springer-Verlag* .
- Young, K.K.D. [1977], ‘Asymptotic stability of model reference systems with variable structure control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-22**(2), 279–281.
- Young, K.K.D. [1978], ‘Design of variable structure model-following control systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-23**(6), 1079–1085.

Apêndice A

Teoria de Estabilidade de Lyapunov

A.1 Pontos de Equilíbrio

Um estado x^* é considerado um ponto de equilíbrio do sistema ($\dot{x} = f(x)$) se, uma vez que a trajetória do sistema $x(t)$ se torna igual a x^* , esta permanece igual a x^* para todo t . Todas as definições serão realizadas para o caso em que o ponto de equilíbrio está na origem do \mathbb{R}^n , isto é, $x^* = 0$. Não há perda de generalidade ao fazer isto porque qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem via uma mudança de variável [Khalil 1992].

A.2 Estabilidade e Instabilidade

Considere a equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_o.\end{aligned}$$

Ponto de equilíbrio estável: A origem $\dot{x}(t) = f(x(t))$ é estável se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que, se $\|x_o\| < \delta(\epsilon)$ então $\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$. Ou seja, para qualquer condição inicial dentro de uma bola com raio $\delta(\epsilon)$, a solução correspondente não sai de dentro da bola de raio ϵ , permanecendo dentro dessa vizinhança.

Ponto de equilíbrio assintoticamente estável: A origem $\dot{x}(t) = f(x(t))$ é assintoticamente estável se a origem é estável e atrativa, ou seja, $\forall \delta > 0$ tal que se $\|x_o\| < \delta$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$. Em outras palavras, além da estabilidade, para toda condição inicial x_o dentro da bola de raio $\delta(\epsilon)$ a solução correspondente tende para o ponto de equilíbrio x_o .

Ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável: A origem de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ é globalmente assintoticamente estável se $\forall x_o \in \mathbb{R}^n$, então, $\|x(t)\|$ é uniformemente limitada e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$. Portanto, além da estabilidade, todas as soluções tendem para a origem.

Quando a origem de $\dot{x} = f(x)$ não satisfaz a condição de estabilidade, a origem é instável.

A.3 Funções Definidas e Semi-Definidas

1. Uma função $f(x)$ é definida positiva ($f(x) > 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $f(x) > 0, \forall x$ tal que $\|x\| < \epsilon, \epsilon > 0, x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Ou seja, $f(x)$ é uma função que sempre é positiva fora da origem e somente na origem é nula.
2. Uma função $f(x)$ é semi-definida positiva ($f(x) \geq 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $f(x) \geq 0, \forall x$ tal que $\|x\| < \epsilon, \epsilon > 0$, e $f(0) = 0$. Ou seja, $f(x)$ é uma função que pode ser positiva ou nula fora da origem e na origem é nula.
3. Uma função $f(x)$ é definida negativa ($f(x) < 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $f(x) < 0, \forall x$ tal que $\|x\| < \epsilon, \epsilon > 0, x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Ou seja, $f(x)$ é uma função que sempre é negativa fora da origem e somente na origem é nula.
4. Uma função $f(x)$ é semi-definida negativa ($f(x) \leq 0$) em uma vizinhança de $x = 0$ se $f(x) \leq 0, \forall x$ tal que $\|x\| < \epsilon, \epsilon > 0$, e $f(0) = 0$. Ou seja, $f(x)$ é uma função que pode ser negativa ou nula fora da origem e na origem é nula.

A.4 Teoremas de Estabilidade de Lyapunov

As relações entre estabilidade e funções de Lyapunov são determinadas através de teoremas do método direto de Lyapunov, tanto para versões globais como locais. Lyapunov definiu a estabilidade de um sistema em termos de energia associada a um sistema. Essas funções de energia podem ser formas quadráticas definidas positivas.

Teorema 4.1 (Estabilidade Local) Se para um sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$ (a origem é um ponto de equilíbrio), existe uma função $V(x)$ tal que

- $V(x)$ é continuamente diferenciável
- $V(x) > 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0$

então, a origem é um ponto de equilíbrio estável.

Teorema 4.2 (Estabilidade assintótica) Se para um sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$ (a origem é um ponto de equilíbrio), existe uma função $V(x)$ tal que

- $V(x)$ é continuamente diferenciável
- $V(x) > 0$
- $\dot{V}(x) < 0$

então, a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Teorema 4.3 (Estabilidade assintótica global) Se para um sistema $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$ (a origem é um ponto de equilíbrio), existe uma função $V(x)$ tal que

- $V(x)$ é continuamente diferenciável

- $V(x) > 0$
- $\dot{V}(x) < 0$
- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$

então, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Apêndice B

Solução para a forma no espaço de estado

Considere o modelo contínuo no espaço de estado, representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_1\omega(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde $u(t)$ é a entrada escalar de controle e $\omega(t)$ é uma entrada escalar de distúrbios. A saída escalar $y(t)$ foi expressa como uma combinação linear das variáveis de estado, $x(t)$, e da entrada, $u(t)$.

A representação dada por (B.1) não é a única. Dada a representação de estado, qualquer transformação linear não-singular da forma $\zeta(t) = Tx(t)$ é também uma possível realização para o mesmo sistema.

De fato, assumindo $\zeta(t) = Tx(t)$ em (B.1), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= T\dot{x}(t) = T(Ax(t) + Bu(t) + B_1\omega(t)) \\ \dot{\zeta}(t) &= TAx(t) + TBu(t) + TB_1\omega(t) \\ \dot{\zeta}(t) &= TAT^{-1}\zeta(t) + TBu(t) + TB_1\omega(t) \\ y(t) &= CT^{-1}\zeta(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{B.2}$$

Se as matrizes do sistema forem designadas para o novo estado $\zeta(t)$ como F , G , G_1 , H e J , então

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= F\zeta(t) + Gu(t) + G_1\omega(t) \\ y(t) &= H\zeta(t) + Ju(t)\end{aligned}\tag{B.3}$$

onde $F = TAT^{-1}$, $G = TB$, $G_1 = TB_1$, $H = CT^{-1}$ e $J = D$.

Inicialmente, resolve-se a equação apenas com condições iniciais e sem entrada externa. Assim, é obtida a seguinte equação homogênea

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_o) = x_o.\tag{B.4}$$

Para resolver isso, assume-se a expansão em série como uma possível solução

$$x(t) = F_o + F_1(t - t_o) + F_2(t - t_o)^2 + \dots.\tag{B.5}$$

Se for assumido que $t = t_o$, encontrar-se-á imediatamente que $F_o = x_o$. Diferenciando (B.5) e substituindo em (B.4),

$$F_1 + 2F_2(t - t_o) + 3F_3(t - t_o)^2 + \dots = Ax(t) \quad (\text{B.6})$$

e, em $t = t_o$, $F_1 = Ax_o$. Continuando a diferenciar as séries e a equação diferencial, igualando-as em t_o , surge uma nova série

$$x(t) = \left[I + A(t - t_o) + \frac{A^2(t - t_o)^2}{2} + \frac{A^3(t - t_o)^3}{6} + \dots \right] x_o. \quad (\text{B.7})$$

Esta série é definida como uma exponencial matricial

$$x(t) = e^{A(t-t_o)} x(t_o), \quad (\text{B.8})$$

onde, por definição, a exponencial matricial é

$$\begin{aligned} e^{A(t-t_o)} &= I + A(t - t_o) + \frac{A^2(t - t_o)^2}{2!} + \frac{A^3(t - t_o)^3}{3!} + \dots \\ e^{A(t-t_o)} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t - t_o)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

É possível mostrar que a solução dada por (B.8) é única, e leva a propriedades interessantes. Por exemplo, considere dois valores de t : t_1 e t_2 . Assim

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_o)} x(t_o)$$

e

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_o)} x(t_o).$$

Pelo fato de t_o ser arbitrário, é possível expressar $x(t_2)$ como se a solução da equação começasse em t_1 , ou seja

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)} x(t_1).$$

Substituindo o valor de $x(t_1)$ obtém-se

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)} e^{A(t_1-t_o)} x(t_o).$$

Agora há duas expressões separadas para $x(t_2)$ e, se a solução é única, ambas devem ser iguais. Consequentemente, conclui-se que

$$e^{A(t_2-t_o)} = e^{A(t_2-t_1)} e^{A(t_1-t_o)} \quad (\text{B.10})$$

para todo t_2 , t_1 e t_o . Note especialmente que se $t_2 = t_o$,

$$I = e^{-A(t_1-t_o)} e^{A(t_1-t_o)}.$$

Assim, é possível obter a inversa de e^{At} meramente mudando o sinal de t . Este resultado é utilizado para calcular a solução particular de (B.1).

A solução particular quando $u(t)$ é diferente de zero é obtida usando o *método da variação de parâmetros* (proposto por Joseph Louis Lagrange, matemático francês, 1736-1813). Assumimos $\omega(t) = 0$. Pelo fato das equações serem lineares, os efeitos de $\omega(t)$ podem ser inseridos posteriormente. Deseja-se que a solução esteja na forma

$$x(t) = e^{A(t-t_o)} v(t), \quad (\text{B.11})$$

onde $v(t)$ é um vetor de parâmetros variáveis a serem determinados (como contraste aos parâmetros constantes $x(t_o)$ em (B.8)). Substituindo (B.11) em (B.1), obtém-se

$$A e^{A(t-t_o)} v(t) + e^{A(t-t_o)} \dot{v}(t) = A e^{A(t-t_o)} v(t) + B u(t),$$

e, usando o fato de que a inversa é encontrada pela troca do sinal do expoente, é possível resolver $\dot{v}(t)$ como

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_o)} B u(t).$$

Assumindo que o controle $u(t)$ é zero para $t < t_o$, pode-se integrar $\dot{v}(t)$ de t_o a t , obtendo

$$v(t) = \int_{t_o}^t e^{-A(\tau-t_o)} B u(\tau) d\tau.$$

Consequentemente, de (B.11), tem-se

$$x(t) = e^{A(t-t_o)} \int_{t_o}^t e^{-A(\tau-t_o)} B u(\tau) d\tau,$$

e simplificando, usando os resultados de (B.10), surge a solução particular (convolução)

$$x(t) = \int_{t_o}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (\text{B.12})$$

A solução total para $\omega(t) = 0$ e $u(t) \neq 0$ é a soma de (B.8) e (B.12)

$$x(t) = e^{A(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (\text{B.13})$$