

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dinâmica e Estrutura de Redes Complexas no Modelo de Afinidade

POR

MAURÍCIO LOPES DE ALMEIDA

NATAL-RN, BRASIL

JULHO DE 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dinâmica e Estrutura de Redes Complexas no Modelo de Afinidade

Maurício Lopes de Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos pré-requisitos à obtenção do título de **MESTRE em FÍSICA**.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva

NATAL RN, BRASIL
JULHO DE 2009

Resumo

Neste trabalho, elaboramos e discutimos um modelo de rede complexa que apresenta escala livre (distribuição de conectividade tipo lei de potência). Para isso, modificamos a regra de ligação preferencial do modelo de Bianconi-Barabási, inserindo um fator que retrata quanta semelhança é guardada entre os parâmetros de qualidades dos sítios da rede. O termo que nos dá essa informação é a chamada afinidade, sendo, a mesma, dada pelo módulo da diferença entre a qualidade do novo sítio, que está sendo inserido na rede, e as dos que já fazem parte dela. Essa variação na ligação preferencial permitiu, ao nosso modelo, obter resultados bastantes interessantes, como por exemplo, a evolução temporal da conectividade de um sítio que segue uma lei potência $k_i \propto (\frac{t}{t_0})^\beta$, onde o expoente β , que indica a taxa com que um sítio consegue ligações, certamente, depende de sua afinidade com os demais sítios da rede. Além disso, mostraremos também, os resultados que foram obtidos, via simulação numérica, para o menor caminho médio e o coeficiente de agregação da rede gerada pelo nosso modelo, isto é, pelo modelo de afinidade.

Abstract

In this work we elaborate and discuss a Complex Network model which presents connectivity scale free probability distribution (power-law degree distribution). In order to do that, we modify the rule of the preferential attachment of the Bianconi-Barabasi model, including a factor which represents the similarity of the sites. The term that corresponds to this similarity is called the affinity, and is obtained by the modulus of the difference between the fitness (or quality) of the sites. This variation in the preferential attachment generates very interesting results, by instance the time evolution of the connectivity, which follows a power-law distribution $k_i \propto (\frac{t}{t_0})^\beta$, where β indicates the rate to the site gain connections. Certainly this depends on the affinity with other sites. Besides, we will show by numerical simulations results for the average path length and for the clustering coefficient.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
lista de figuras	x
lista de tabelas	xi
Introdução	1
1 Noções Básicas e Características de Redes	4
1.1 O que são redes ?	5
1.2 Grafos	6
1.3 Distribuição de Conectividade	7
1.4 Coeficiente de agregação	9
1.5 Menor Caminho Médio	11
1.6 <i>Betweenness</i>	13
1.7 Redes Reais	14

1.7.1	O Mundo é Pequeno	14
1.7.2	World Wide Web (WWW)	16
1.7.3	Internet	18
1.7.4	Rede de contatos sexuais	19
1.7.5	Rede Metabólica	21
1.7.6	Rede de Citações Científicas	22
2	Os Primeiros Modelos de Redes Complexas	25
2.1	Modelo de Erdős-Rényi	26
2.1.1	Propriedades Topológicas do Modelo de Erdős-Rényi	29
2.2	Modelo de Watts e Strogatz	32
3	Redes de Escala Livre	37
3.1	Modelo de Barabási e Albert	38
3.1.1	Condições básicas para se obter uma rede com distribuição de conectividade em lei de potência	43
3.2	Propriedades do modelo de Barabási-Albert	45
3.2.1	Comprimento do menor caminho médio	46
3.2.2	Coefficiente de Agregação	47
3.3	Modelo de Bianconi-Barabási ou Modelo de Qualidade	47
3.3.1	Modelo de Escala Livre	53
3.3.2	Distribuição de qualidade uniforme	53
4	Modelo de afinidade	57
	Conclusões e Perspectivas	67
	Referências bibliográficas	70

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de uma pequena rede, com 8 nós (em vermelho) e 10 arestas (azuis). . . .	5
1.2	A figura ilustra a presença de um circuito formado pelos sítios verdes. Neste caso, ele é de ordem 3.	7
1.3	O conceito de coeficiente de agregação do vértice ν , é obtido quando conhecemos seus primeiros vizinhos e sabemos como estes estão ligados entre si. Para esta figura temos, $z_\nu = 6$ e $y = 5$, logo $c_\nu = 1/3$. Figura proveniente da ref. [15].	10
1.4	Ilustração de uma rede com $\bar{z} = 3$. Observa-se que quando $l = 1$, visita-se $N = 3^1 = 3$ nós. Quando $l = 2$, temos $N = 3^2 = 9$ nós visitados. Quando $l = 3$, temos $N = 3^3 = 27$ e assim por diante ($N \sim \bar{z}^l$).	12
1.5	Podemos observar que o vértice central (vinho) desempenha um papel fundamental na conectividade da rede, logo, este, tem o maior <i>betweenness</i>	14
1.6	Mapa dos Estados Unidos. Os estados em vermelho representam a origem das correspondências e o estado em verde representa o destino final. Figura proveniente da ref. [15].	16
1.7	Distribuição de <i>links</i> saindo (a) e entrando (b) em uma Web page. Em (c), menor caminho médio como função do tamanho da rede. Figura proveniente da ref. [6]. .	17
1.8	Comportamento da distribuição de conectividade (Lei de potência) da Internet a nível de roteadores. Figura proveniente da ref. [2].	19

1.9	Distribuição de escala livre do número de parceiros sexuais para homens e mulheres. Em (a), distribuição do número de parceiros no decorrer dos últimos 12 meses e, em (b), distribuição do número total de parceiros correspondente a vida inteira. Figura proveniente da ref. [7].	20
1.10	Expoentes das leis de potências das redes que compõem a tabela 1.1. Figura proveniente da ref. [12].	24
2.1	Ilustração do processo de evolução de um grafo para o modelo de Erdős-Rényi. Começamos com $N = 10$ nós isolados (figura mais acima, onde $p = 0$), e conectamos cada par de nós com probabilidade p . As duas figuras mais abaixo, mostram dois estágios diferentes do desenvolvimento do grafo, correspondendo a $p = 0.1$ e $p = 0.15$. Observamos o aparecimento de árvores (uma árvore de ordem 3, desenhada pelas linhas tracejadas) e ciclos (um ciclo de ordem 3, desenhado pelas linhas tracejadas) no grafo, e um aglomerado conectando metade dos nós em $p = 0.15 = 1.5/N$. Figura proveniente da ref. [2].	27
2.2	Tipos de Subgrafos.	27
2.3	Aparecimento de subgrafos em grafo aleatório de acordo com p , onde z é o expoente da dependência em N . Veja que $z = -k/l$	28
2.4	Distribuição de conectividade do modelo de Erdős-Rényi, para redes com $N = 10000$ e $p = 0.0006$ (círculos), $p = 0.001$ (quadrados) e $p = 0.0015$ (diamantes). Observamos que os nós têm, em média, o mesmo número de ligações. Figura proveniente da ref. [17].	30
2.5	Comparação entre o comprimento médio dos menores caminhos de redes reais (símbolos) com a previsão da equação (2.7) para redes aleatórias (linha pontilhada). Figura proveniente da ref. [2].	31
2.6	Comparação entre os coeficientes de agregação de redes reais e de grafos aleatórios. A linha tracejada corresponde a previsão da equação (2.8). Figura proveniente da ref. [2].	32

2.7	<p>Procedimento de reconectar os vértices do modelo de Watts-Strogatz que transforma uma rede (circular) regular em uma rede aleatória sem fazer mudança no número de vértice ou ligação. Começamos com uma rede de $N = 20$ nós, cada um conectado aos seus 4 vizinhos mais próximos (dois de cada lado do vértice em questão, ou seja, $z = \bar{k}/2$), em seguida escolhemos um vértice e uma ligação que conecta um de seus vizinhos. Com uma probabilidade p reconectamos essa ligação a um outro vértice escolhido aleatoriamente. Fazemos isso até que todas as ligações, da rede original, tenham sido consideradas. Realizações desse procedimento é mostrado, aqui nesta figura, para três valores diferentes de p. Na primeira, da esquerda para a direita, foi usado $p = 0$, com isso a rede original permanece inalterada (rede regular). Na segunda, com o valor de p no intervalo $0 < p < 1$ (rede de mundo pequeno). Na terceira, é obtida uma rede totalmente aleatória, com $p = 1$, onde todas as ligações foram aleatoriamente reconectadas. Figura proveniente da ref. [18].</p>	34
2.8	<p>Coeficiente de agregação $C(p)$ e o comprimento médio dos menores caminhos $l(p)$ do modelo de Watts-Strogatz. Os dados foram normalizados pelos valores de $C(0)$ e $l(0)$, respectivamente. Pode ser visto a rápida queda de $l(p)$, demonstrando que a rede apresenta o efeito mundo pequeno. Durante essa queda de $l(p)$, $C(p)$ permanece praticamente constante, o que indica que a transição para uma rede de mundo pequeno é quase que imperceptível a nível local. Figura proveniente da ref. [18].</p>	35
2.9	<p>Comportamento da distribuição de conectividade do modelo de Watts-Strogatz. Rede com $N = 10000$ e $\bar{k} = 6$ para diferentes valores de p. Figura proveniente de ref. [17].</p>	36
3.1	<p>A figura mostra a evolução temporal da conectividade de dois sítios, adicionados na rede em $t_1 = 5$ e $t_2 = 95$. A linha tracejada tem inclinação 0.5 como previsto pela equação (3.5). Figura proveniente da ref. [49].</p>	41
3.2	<p>Distribuição de conectividade do modelo de Barabási-Albert, com $N = 300000$ onde temos: círculos ($m_0 = m = 1$); quadrados ($m_0 = m = 3$); diamantes ($m_0 = m = 5$) e triângulos ($m_0 = m = 7$). A inclinação da linha tracejada é $\gamma = 2.9$, concordando com a previsão teórica da equação (3.10). Figura proveniente da ref. [2].</p>	42
3.3	<p>A distribuição de conectividade muda da lei de potência inicial para uma Gaussiana. $N = 10000$. Legenda: círculos ($t = N$), quadrados ($t = 5N$) e diamantes ($t = 40N$). Figura proveniente da ref. [49].</p>	45

3.4	Gráfico do menor caminho médio l pelo tamanho da rede N , no modelo de Barabási-Albert com $\langle k \rangle = 4$, comparado com um grafo aleatório de igual tamanho e mesma conectividade média. Figura proveniente da ref. [2].	46
3.5	Coefficiente de agregação versus o tamanho da rede do modelo de Barabási-Albert com $\langle k \rangle = 4$, comparado com o coeficiente de agregação de um grafo aleatório, $C_{rand} \simeq \langle k \rangle / N$. Figura proveniente da ref. [2].	47
3.6	Simulação numérica para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$ mostrando a dependência temporal da conectividade $k_\eta(t)$, para sítios com qualidade $\eta = 0.3, 0.6$ e 0.9 . Note que, em cada caso, $k_\eta(t)$ segue uma lei de potência e o expoente dinâmico $\beta(\eta)$, dado pela inclinação de $k(t)$, aumenta com η . Figura proveniente da ref. [47].	54
3.7	Comportamento assintótico de C com $t \rightarrow \infty$, note que há acordo com a previsão analítica, linha tracejada, (equação 3.35). Figura proveniente da ref. [47].	55
3.8	Distribuição de conectividade no modelo de qualidade, obtida para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$. Os círculos sólidos representam a simulação numérica que está de acordo com a predição teórica dada pela equação 3.36 (linha azul), com $\gamma = 2,255$. A linha preta representa um ajuste com $P(k) \sim k^{-2.255}$ sem a correção logarítmica. A linha vermelha corresponde a $P(k) \sim k^{-3}$ como prever o modelo de escala livre, onde todas as qualidades são iguais. Figura proveniente da ref. [47].	55
3.9	Dependência do expoente dinâmico $\beta(\eta)$ com o parâmetro da qualidade η para o caso de uma distribuição uniforme, $\rho(\eta) = constante$. Os círculos representam o resultado obtido por simulação numérica, enquanto a linha corresponde a predição analítica $\beta(\eta) = \eta/1,255$. Figura proveniente da ref. [47].	56
4.1	Resultado da simulação numérica para a distribuição de conectividade do modelo de afinidade, para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$, em escala log-log.	61
4.2	Resultado da simulação numérica do modelo de afinidade com distribuição de qualidade uniforme (rede com $N = 10^5$ e $m = 1$). Observamos que a evolução da conectividade segue uma lei de potência no tempo e que a inclinação dos gráficos (expoente da lei de potência) cresce até o sítio apresentar um parâmetro de qualidade igual a 0.5 . A partir daí, ou seja, para sítios com qualidades superiores a 0.5 , temos o expoente decrescendo e, além disso, seus valores são, aproximadamente, iguais aos dos sítios com qualidades abaixo de 0.5 . Os gráficos internos nos ajudam a observar isso.	62

4.3	Simulação numérica para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$, mostrando a relação entre o expoente dinâmico β , versus os parâmetros de qualidades η . O gráfico explicita que sítios com qualidades de dentro da região intermediária são os que mais conseguem ligações ao longo do crescimento da rede.	63
4.4	Resultado da simulação numérica do modelo de afinidade com distribuição de qualidade uniforme. Menor caminho médio versus o tamanho da rede num gráfico linear-log para diferentes valores de m como indicado na legenda acima.	64
4.5	Resultado da simulação numérica do modelo de afinidade com distribuição de qualidade uniforme. Coeficiente de agregação médio versus o tamanho da rede num gráfico log-log para diferentes valores de m como indicado na legenda acima.	66

Lista de Tabelas

1.1	Dados das redes reais	23
-----	---------------------------------	----

Introdução

Alguns dos problemas científicos enfrentados pela humanidade, nos últimos 20 anos, mostraram-se resistentes as abordagens tradicionais. A divisão do conhecimento, em campos específicos, não foi capaz de trazer esclarecimentos a problemas como: o funcionamento do sistema imunológico, fluxos turbulentos, dinâmica de sistemas econômicos e financeiros, funções cerebrais, evolução e extinção das espécies, entre outros. Assim, abordagens interdisciplinares fizeram-se necessárias para trazer luz ao entendimento destes sistemas. Alguns sistemas que integram esse conjunto de problemas constitui a área dos sistemas complexos [1].

É difícil definir-se sistemas complexos, mas de forma intuitiva, pode-se caracterizá-los como sistemas que apresentam um grande número de unidades, onde as mesmas, são interligadas entre si de modo que uma influencia no comportamento da outra. Disso, verifica-se, em grande parte das vezes, que o estudo dos elementos que o constituem é insuficiente para explicar o seu comportamento global.

Como resultado da tentativa de se construir um esquema teórico geral para compreender os sistemas complexos, surgiu, na última década, as *redes complexas* [2, 12, 32]. Estas, procuram modelar alguns sistemas complexos respeitando a estrutura de ligação entre seus constituintes e sua evolução dinâmica no tempo. Para tal modelagem, uniu-se a teoria de grafos e a Mecânica Estatística, onde a primeira faz uso de recursos matemáticos já previamente estabelecidos pela teoria de grafos e, a segunda, efetua uma abordagem estatística com ferramentas procedentes da física.

As redes (forma abreviada de *redes complexas*), basicamente descritas como conjunto de itens conectados entre si, são observadas em inúmeras situações. Por exemplo, nós mesmos, como indivíduos, somos as unidades de redes de relações sociais de diferentes tipos [3, 7]. Já como sistemas biológicos, somos o resultado de uma delicada rede de reações bioquímicas [8].

Historicamente, o estudo de redes foi, principalmente, de domínio de um ramo da matemática discreta conhecido como teoria de grafos. Desde seu nascimento em 1736, quando o matemático Suíço Leonard Euler publicou a solução para o problema das pontes de Königsberg [4], a teoria de grafos tem testemunhado muitos desenvolvimentos e tem melhorado as respostas a uma série de questões práticas, como por exemplo: qual é o fluxo máximo, por unidade de tempo, de uma fonte numa rede de canos, como pintar as regiões de um mapa usando um número mínimo de cores de modo que regiões vizinhas recebam cores diferentes, etc. Somado-se ao desenvolvimento matemático da teoria de grafos, o estudo de redes foi uma importante realização em alguns contextos especializados, como por exemplo, nas *ciências sociais*. As análises “estruturais” de redes sociais começaram em 1920 e focaram-se nas relações entre entidades sociais, como comunicação entre membros de um grupo, negócios entre nações, ou transações econômicas entre corporações, entre outras.

Efetivamente, as primeiras análises de estruturas em redes foram introduzidas por Erdős e Rényi [14] em meados de 1950. O modelo proposto na época consistia de N nós fixos, interconectados entre si com probabilidade p . Através desse tipo de consideração as conexões de uma rede aleatória seguem uma distribuição de Poisson, fazendo com que seja raro encontrar nós com concentração de conexões ou muito grande ou muito pequena.

No entanto, a última década testemunhou o nascimento de um novo movimento de interesse e pesquisa no estudo de *redes complexas*. Isso foi motivado, não apenas, pelos trabalhos de Watts e Strogatz [18], em redes de mundo pequeno, e de Barabási e Albert [32], em redes de escala livre, mas, principalmente, induzido pelo crescente poder computacional e pela possibilidade de estudar as propriedades de muitas redes reais, já que para algumas delas haviam grandes bancos de dados disponíveis.

As análises das redes de diferentes campos da ciência têm produzido uma série de resultados inesperados. E grande parte deles, certamente, estão relacionados a estrutura das redes. A pesquisa em *redes complexas* começa com a necessidade de definir novos conceitos e medidas para caracterizar a topologia das redes reais. O principal resultado tem sido a identificação de uma série de propriedades básicas comuns a maioria das redes reais consideradas.

Uma propriedade relevante é a conectividade de um nó, isto é, o número de conexões que ele tem com outros nós. Em algumas redes reais, a distribuição de conectividade $P(k)$, definida como a probabilidade de um nó, escolhido aleatoriamente, ter conectividade k ou, equivalentemente, como a fração de nós da rede que apresenta conectividade k , desvia-se significativamente da distribuição de Poisson, exibida pelas redes aleatórias. Muitas das redes reais, apresentam, para a distribuição de conectividade, uma cauda em lei de potência, expressa por

$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

onde o expoente γ tem, em geral, valor entre 2 e 3. Além disso, algumas redes reais, também, são caracterizadas por apresentarem caminhos relativamente curtos entre dois nós quaisquer [3] (propriedade de mundo pequeno) e a presença de circuitos, retratados por outra propriedade chamada coeficiente de agregação [2].

O resultado mais interessante, para as propriedades de muitas redes reais, foi a descoberta de que a distribuição de conectividade segue uma lei de potência. Isso iniciou um novo reestabelecimento na modelagem de redes, já que, até então, todas as análises estruturais eram feitas tomando por base o modelo de Erdős-Rényi, o qual tratava a rede como sendo completamente aleatória, resultando assim, numa distribuição tipo Poissoniana para as conexões. A discrepância desse resultado, estimulou a elaboração de vários modelos, que focam a construção da rede de modo dinâmico e não mais estático como era no modelo de redes aleatórias. Dessa maneira, os pesquisadores conseguiram oferecer, como veremos ao longo de toda dissertação, uma teoria capaz de retratar, coerentemente, os resultados apresentados pelas redes reais e pelos seus modelos.

Antes de descrever estes modelos em detalhes, no próximo capítulo trataremos das **Noções básicas e características de redes**, abordando os principais conceitos que norteiam o estudo de redes complexas. No capítulo seguinte, **Primeiros modelos de redes Complexas**, discutiremos os modelos de Erdős e Rényi e o de Watts e Strogatz, os quais apresentam distribuição de conectividade com escala típica. No terceiro capítulo, **Redes de escala livre**, mais dois modelos serão abordados: o modelo de Barabási e Albert e o de Bianconi e Barabási, sendo que estes exibem distribuição de conectividade tipo lei de potência, indicando assim, escala livre para a conectividade de suas redes. No último capítulo, **Modelo de afinidade**, trataremos do modelo trabalhado nesta dissertação. Lá, discutiremos sobre sua descrição e elaboração e, em seguida, apresentaremos os resultados obtidos bem como as principais contribuições do modelo, as conclusões e as perspectivas para outros trabalhos.

Noções Básicas e Características de Redes

O intenso estudo de redes complexas, nos anos recentes, tem sua justificativa na frequente presença das mesmas, nas diversas áreas do conhecimento científico. Da física à ciência da computação, passando pela biologia e chegando às ciências sociais, pesquisadores têm encontrado uma grande variedade de sistemas que podem ser representados por redes. Redes como a Internet, a World Wide Web (WWW), redes sociais e biológicas são, entre tantos outros, exemplos dos vários tipos de redes que têm sido estudadas. O estudo da WWW, por exemplo, tem conduzido a criação de novas e poderosas ferramentas de busca na Web [2, 6]. Já o estudo de redes sociais tem nos levado a novas ideias sobre a propagação de doenças e técnicas para controlá-las [3, 7].

Dada a importância que as redes simbolizam para a compreensão de determinados sistemas do mundo real, estudaremos aqui, aspectos que as caracterizam tanto do ponto de vista global como também do ponto de vista individual de seus constituintes. Antes de tudo, faremos uma revisão dos conceitos básicos e formalizaremos algumas propriedades como distribuição de conectividade, coeficiente de agregação e menor caminho médio que são essenciais para o entendimento e a caracterização da estrutura das redes [2].

1.1 O que são redes ?

Redes (ou grafos, em linguagem matemática) são, do ponto de vista formal, conjuntos de itens (sítios ou nós) conectados via linhas (arestas ou arcos) (Ver figura 1.1). Em redes sociais, por exemplo, os sítios podem representar pessoas, e as arestas podem representar algum tipo de relacionamento entre duas pessoas, como, por exemplo, amizade [9, 30]. Redes, onde as arestas não têm direções são, comumente, chamadas de *redes não-direcionadas*. Por outro lado, redes que apresentam direções para suas arestas, são denominadas de *redes direcionadas*. Um sítio com grande conectividade é denominado de *pólo* ou *hub* e sua presença em uma rede tem grande influência em sua estrutura. Em toda a dissertação, ao falarmos sobre ligação, consideraremos que a mesma não apresenta direção, caso contrário, relataremos.

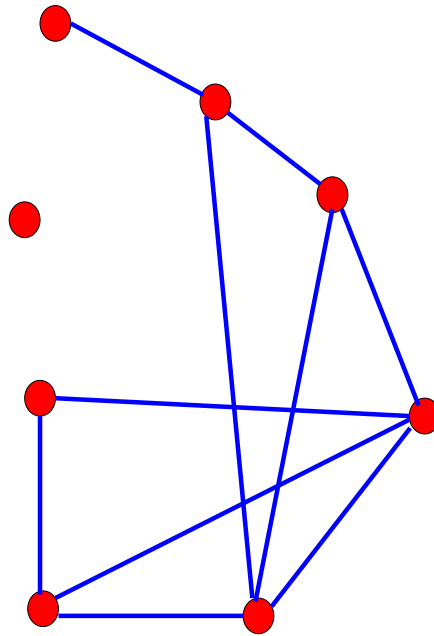


Figura 1.1: Exemplo de uma pequena rede, com 8 nós (em vermelho) e 10 arestas (azuis).

O número total de arestas que incidem num dado sítio é chamado de sua *conectividade k* . No caso de redes direcionadas, é útil diferenciar entre o número de arestas que tem origem num dado sítio k_o (“conectividade de saída”, **o** do inglês *out*) e as que tem como destino o próprio sítio k_i (“conectividade de entrada”, **i** do inglês *in*). Assim, a conectividade total num dado sítio é dada por, $k = k_i + k_o$.

1.2 Grafos

Em 1736, a teoria de grafos foi criada por Leonard Euler, quando na oportunidade ele provou a impossibilidade de determinar um caminho que passasse através de todas as pontes da cidade de Königsberg (atualmente, território Russo) de uma só vez [4]. Seu modelo matemático consistia em resumir as pontes a arestas, as quais ligavam os vértices que eram representados pelas ilhas. Com isso, ele definiu este sistema como um *grafo*. Posteriormente, a teoria de grafos foi generalizada e várias das suas propriedades foram provadas matematicamente.

O conceito de grafo, que aparentemente pode parecer simples, é relevante no estudo de redes, exatamente pela possibilidade de associação que, comumente, se faz entre os entes de grafos e redes, dentro de algum contexto específico. Dessa forma, têm-se na teoria de grafos, a estrutura natural para o tratamento matemático exato de redes complexas, uma vez que, formalmente, uma rede complexa pode ser representada como um grafo. Resumidamente, temos nos grafos uma maneira de representar e visualizar redes. No entanto, a partir de certa dimensão (tamanho), as análises visuais baseadas na representação de grafos tornam-se inviáveis, dado que extrair informações a partir de uma figura que represente milhares ou milhões de vértices e suas respectivas conexões é uma tarefa virtualmente impossível.

Um grafo G consiste de dois conjuntos finitos e não vazios, um conjunto V de pontos denominados de vértices (os quais chamaremos de sítios), e um conjunto E de segmentos conectando-os, denominados arestas (que chamaremos de ligações). De forma simplificada, um grafo constitui-se de um conjunto de pontos conectados por um conjunto de linhas. Por exemplo, numa rede de aeroportos, os pontos podem representar os aeroportos e os segmentos as rotas aéreas das empresas de aviação.

Um caso de particular interesse, sobre grafos, diz respeito às árvores. As árvores são um tipo de grafo em que existe, exatamente, um único caminho ligando cada par de vértices. Se uma árvore não tem partes separadas, ela é dita *conectada*. Uma árvore conectada que apresenta N vértices possui $L = N - 1$ arestas. Podemos, dizer ainda, que uma árvore é um grafo sem circuitos (ou ciclos). Já o circuito é tido como uma cadeia¹ simples e fechada (o vértice inicial é o mesmo que o vértice final). Chama-se cadeia simples, aquela que não passa duas vezes pela mesma aresta. Em geral, o número I de circuitos num grafo conectado,

¹Cadeia é uma sequência qualquer de arestas adjacentes que ligam dois vértices

arbitrariamente, com arestas sem direções relaciona-se com o número de arestas e vértices por:

$$I=L+1-N \quad (1.1)$$

Esta, constitui-se numa das fórmulas básicas da teoria de grafos.

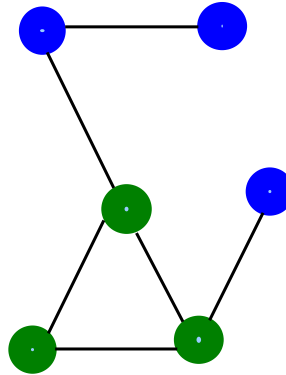


Figura 1.2: A figura ilustra a presença de um circuito formado pelos sítios verdes. Neste caso, ele é de ordem 3.

1.3 Distribuição de Conectividade

A mais básica caracterização das propriedades topológicas das redes é obtida pela distribuição de conectividade $P(k)$. Esta fornece a probabilidade de que um dado nó, escolhido aleatoriamente, tenha k ligações com outros nós; ou equivalentemente, ela mostra a fração de nós de uma rede, que apresenta conectividade k . Alternativamente, a distribuição de conectividade é denotada por P_k , ou p_k , para indicar que a variável k assume valores inteiros não-negativos.

No caso de redes direcionadas precisamos considerar dois tipos de distribuições, $P_{in}(k)$ e $P_{out}(k)$. Onde a primeira está associada a conectividade de entrada nos vértices e a segunda relacionada a conectividade que sai dos vértices.

Em algumas redes complexas, nem todos os nós vão apresentar a mesma conectividade, seguramente, observaremos que existem nós mais conectados que outros. Informações de como a conectividade está distribuída, entre os nós, numa rede não-direcionada, é dada

pelo gráfico de $P(k)$, ou pelo cálculo dos momentos da distribuição. O momento de ordem n é dado como:

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k) \quad (1.2)$$

O primeiro momento $\langle k \rangle$ é a conectividade média da rede. O segundo momento mede as flutuações da distribuição de conectividade.

Vejamos alguns exemplos típicos de distribuições de conectividade observadas no estudo de redes complexas:

(1) *Distribuição de Poisson*: É dada por

$$P(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} \quad (1.3)$$

onde $\langle k \rangle$ é a conectividade média [2]. Um grafo aleatório tem sua conectividade seguindo uma distribuição de Poisson quando seu número de vértices tende ao infinito e sua conectividade média, $\langle k \rangle$ é fixa. Esse vínculo para $\langle k \rangle$, constitui a escala típica da distribuição.

(2) *Distribuição tipo Lei de Potência*: Expressa por

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \quad (1.4)$$

com $k \neq 0$ e γ sendo o expoente da distribuição [2]. Ao contrário da distribuição de Poisson, redes que possuem distribuição de conexões comportando-se como lei de potência não apresentam uma escala característica para sua conectividade. Essa “liberdade de conexão” faz com que tais redes sejam chamadas de *escala livre*.

(3) *Distribuição Discreta*: Esse espectro de conectividade é típico de redes que crescem deterministicamente [10, 19]. As simulações dessa dissertação têm distribuição discreta.

1.4 Coeficiente de agregação

O coeficiente de agregação de um vértice descreve a presença de conexões entre os primeiros vizinhos dele [2, 12].

Qualitativamente o coeficiente de agregação pode ser descrito da seguinte forma: Consideremos uma rede com arestas sem direções, e tomamos da mesma, um vértice i que apresenta z vizinhos mais próximos. Observemos, dentre o número total de vizinhos do vértice i quantos estão ligados entre si. A agregação máxima do vértice i é obtida, quando todas as $z(z-1)/2$ arestas possíveis estão presentes, conectando todos os seus primeiros vizinhos.

Quantitativamente o coeficiente de agregação, de um vértice i qualquer da rede, é definido como sendo a razão entre a quantidade total de arestas que conectam seus primeiros vizinhos e o número máximo possível de arestas entre todos estes vizinhos mais próximos. Mais precisamente, temos :

$$C_i = \frac{2y_i}{z_i(z_i - 1)} \quad (1.5)$$

onde C_i , assume valores no intervalo $0 \leq C_i \leq 1$. Quando $C_i = 0$, sabe-se, neste caso, que os vizinhos do vértice i “não se conhecem” e, portanto, não estabelecem conexões entre si. No entanto, quando $C_i = 1$ existem todas as conexões possíveis entre todos os primeiros vizinhos do vértice i . Para melhor compreensão, observe a figura 1.3.

Como podemos observar, essa grandeza simboliza, na linguagem de redes sociais, o grau de conhecimento mútuo dos “amigos” mais próximos de uma dada pessoa. Logo, podemos associá-la a círculos de amizades ou de conhecidos, em que cada membro conhece a maioria dos outros membros.

O coeficiente de agregação de toda a rede, ou seja, o coeficiente de agregação médio, é obtido fazendo-se a média dos $C_{i's}$ pelo número total de vértices. Logo;

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_i C_i = \frac{1}{N} \sum_i \frac{2y_i}{z_i(z_i - 1)} \quad (1.6)$$

onde \bar{C} , expressa a probabilidade de existência, de arestas entre os primeiros vizinhos de um dado vértice, escolhido aleatoriamente. Pode-se também, associar a agregação média de uma rede à presença de pequenos circuitos de ordem 3 na mesma, uma vez que o conceito de coeficiente de agregação caracteriza a existência de ciclos (ou circuitos) na rede. Da definição, claramente, pode-se observar que o coeficiente de agregação de um grafo do tipo árvore é igual

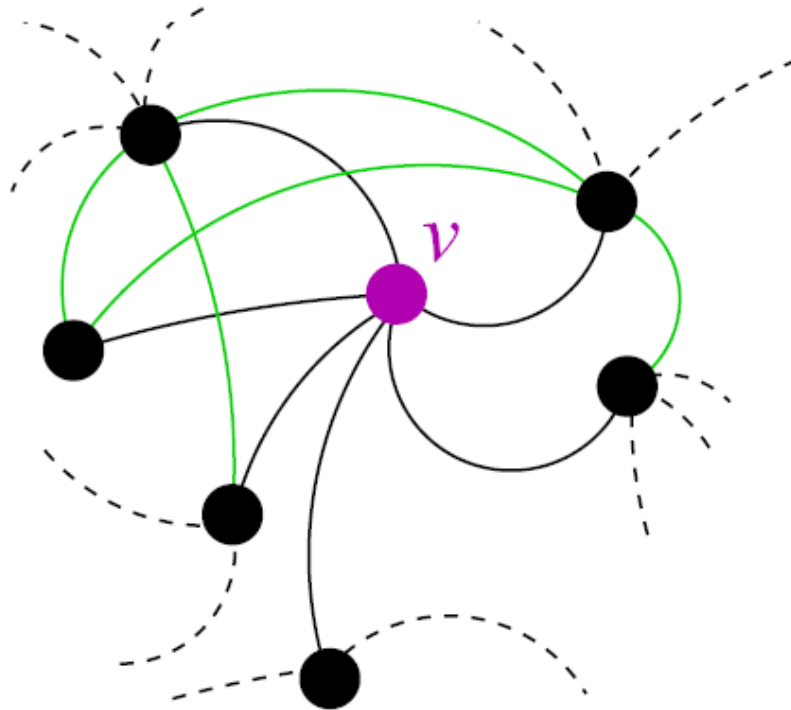


Figura 1.3: O conceito de coeficiente de agregação do vértice ν , é obtido quando conhecemos seus primeiros vizinhos e sabemos como estes estão ligados entre si. Para esta figura temos, $z_\nu = 6$ e $y = 5$, logo $c_\nu = 1/3$. Figura proveniente da ref. [15].

a zero. Sendo assim, redes que possuem um alto valor de \bar{C} , certamente, têm uma estrutura que difere muito da de árvores.

A presença de circuitos é uma forma específica de correlação em redes. Se o coeficiente de agregação de uma rede “infinita” não tende a zero, então a correlação entre os vértices, certamente, se faz presente.

As redes aleatórias clássicas têm o valor do coeficiente de agregação muito baixo. A razão disso, está no fato das ligações (arestas L) serem distribuídas aleatoriamente, entre cada par de vértices, com a mesma probabilidade p , dada por $p \cong z/N$. Dito de outra maneira, a probabilidade de que os primeiros vizinhos de um vértice estejam conectados é p , a mesma de que quaisquer outros dois vértices, da rede, estejam conectados. Nesse caso, sabe-se que $z = \bar{k} = 2L/N$, o que resultará num coeficiente de agregação da forma $\bar{C} = z/N$; o qual, como já dissemos, é muito pequeno quando o número de vértices N da rede é grande. Qualitativamente, este resultado nos diz que uma rede aleatória contém poucos circuitos e, certamente, isso não está de acordo com o comportamento exibido por muitas redes do mundo real, uma vez que as mesmas apresentam maior agregação quando se considera igualdade no

número de vértices e arestas de redes reais e aleatórias.

1.5 Menor Caminho Médio

Numa rede não-direcionada, conexões que ligam vértices formam um caminho. Dados dois vértices quaisquer de uma rede, pode existir vários caminhos entre eles, mesmo que estes não estejam diretamente conectados. O comprimento, por exemplo, de um dos caminhos entre esses dois vértices é obtido contando-se o número de arestas que os conectam, dado que para cada uma delas é atribuído valor unitário. Entretanto, o comprimento do menor caminho (do inglês: “*shortest path length*”) é o caminho mais curto entre os dois vértices em questão. Embora, a primeira vista, possa parecer uma ideia simples, o menor caminho constitui-se numa das noções centrais na ciência de redes complexas.

O menor caminho desempenha um papel importante no transporte e comunicação dentro de uma rede. Suponha que precisemos enviar um pacote de dados de um computador para outro através da Internet, excetuando-se possíveis “congestionamentos” o menor caminho, certamente, oferecerá a maneira mais eficiente para tráfego de informações, uma vez que, por ele, os dados serão transferidos numa rapidez ótima. Por essa razão, o menor caminho é de fundamental importância para a caracterização da estrutura interna de redes.

Retomando a ideia desenvolvida no primeiro parágrafo, pode-se obter o menor caminho médio entre dois vértices quaisquer da rede, pela relação abaixo:

$$\bar{l} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} d_{i,j} \quad (1.7)$$

onde $d_{i,j}$ é a distância geodésica² entre os vértices i e j . A média de $d_{i,j}$ tomada sobre todos os $N(N-1)/2$ pares de vértices resulta no menor caminho médio \bar{l} .

Alternativamente, pode-se estimar o valor de \bar{l} numa rede aleatória do tipo árvore. Para isso, partimos do pressuposto que a rede tenha conectividade média \bar{z} . Sendo assim, um sítio qualquer pode visitar, em média, outros z sítios afastados a uma distância de um passo (ver figura 1.4). Generalizando, pode-se falar que após l passos, este sítio, visitará outros \bar{z}^l sítios. A estimativa da *distância característica* da rede, isto é, o menor caminho médio, é

²é definida como o menor número de ligações que conectam dois vértices.

obtida através da relação $N \sim \bar{z}^{\bar{l}}$. Dessa relação, chega-se a expressão abaixo:

$$\bar{l} \approx \frac{\ln N}{\ln \bar{z}} \quad (1.8)$$

Na expressão acima, o fato de \bar{l} relacionar-se com $\ln N$, torna explícito o porquê da pequena distância entre os pares de sítios na rede. Essa particularidade, está presente no comportamento de algumas redes reais e é, comumente, conhecida como “efeito de mundo pequeno”.

Outro conceito que, de certa forma, associa-se com a noção de caminho em redes é o de *diâmetro*. Este é definido como o caminho mais longo entre pares de sítios quaisquer. A importância do mesmo, se dá, por exemplo, em situações em que se pretende analisar a robustez da rede à ataques, sejam eles dirigidos ou aleatórios. Alterações no valor do diâmetro são indicativos de quão forte é a estrutura topológica da rede.

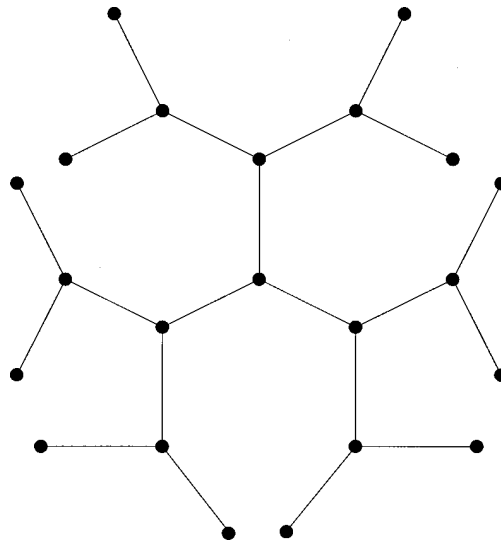


Figura 1.4: Ilustração de uma rede com $\bar{z} = 3$. Observa-se que quando $l = 1$, visita-se $N = 3^1 = 3$ nós. Quando $l = 2$, temos $N = 3^2 = 9$ nós visitados. Quando $l = 3$, temos $N = 3^3 = 27$ e assim por diante ($N \sim \bar{z}^{\bar{l}}$).

1.6 *Betweenness*

Olhando uma rede como sendo uma descrição da interação entre agentes representados por nós (ou vértices) e, considerando que nem todos os pares de nós são adjacentes, a presença de nós e ligações intermediários, formando um caminho que conecte esses nós não-adjacentes, é de alta importância, principalmente, quando o foco é o tráfego de informações na rede. Nesse sentido, um grande número de caminhos, tais que destes, um nó ou ligação fazem parte são, certamente, essenciais para a rede. Admitindo que as interações seguem os menores caminhos entre dois nós, é possível quantificar quão fundamental é, para a rede, um nó ou ligação, através do chamado *betweenness* σ . O *betweenness* de um nó pode ser entendido, simplificada, como uma quantidade que mede o número de menores caminhos que passam por esse nó. Em condições mais rígidas, o *betweenness* de um nó ν , $\sigma(\nu)$, é definido da seguinte maneira: tomemos, de um lado, a quantidade $B(i, j) > 0$, como representante do número total de menores caminhos entre os vértices i e j . Já, por outro lado, a quantidade $B(i, \nu, j)$ indicará o número desses caminhos que passam pelo vértice ν . A razão $B(i, \nu, j)/B(i, j)$ mede quão relevante é o papel desempenhado pelo vértice ν nas conexões entre i e j . Traduzido em linguagem matemática, o *betweenness* do vértice ν é dado por:

$$\sigma(\nu) = \sum_{i \neq j} \frac{B(i, \nu, j)}{B(i, j)} \quad (1.9)$$

onde a soma se dá sobre todos os pares de vértices, respeitando a condição de existência de, no mínimo, um caminho entre i e j , ou seja, $B(i, j) > 0$.

Aqui, faz-se necessário atentarmos para dois aspectos: o primeiro diz respeito ao fato de nenhum dos menores caminhos $B(i, j)$ passarem pelo vértice ν . Se isso ocorrer $\sigma(\nu)$ é nulo e ν é um vértice que não contribui para os menores caminhos entre i e j . O segundo, trata da possibilidade de grande parte dos menores caminhos $B(i, j)$ atravessarem o vértice ν . Se essa possibilidade realmente acontecer, o vértice ν desempenha papel, extremamente, importante para as conexões que se estabelecem entre i e j . Dessa forma, o vértice ν controla quase todos os menores caminhos médios da rede. Como exemplo prático dessa situação, pensemos numa ponte que liga dois territórios.

Um outro ponto a ser observado é que o *betweenness* de um vértice está, fortemente, associado com sua conectividade. E sabe-se que vértices com alto “*betweenness*” também apresentam bastante conexões, isto é, tem alta conectividade. Em linguagem de redes sociais,

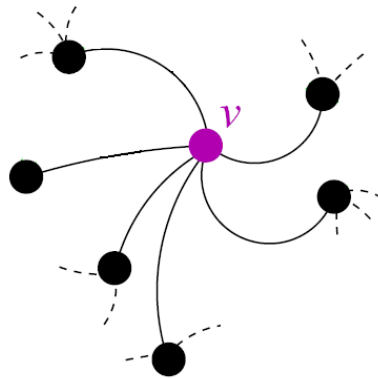


Figura 1.5: Podemos observar que o vértice central (vinho) desempenha um papel fundamental na conectividade da rede, logo, este, tem o maior *betweenness*.

pode-se associar vértices com alto *betweenness* a indivíduos importantes e mais influentes.

O conceito de *betweenness* pode ser estendido também para as arestas. Uma definição simples, para o *betweenness de uma aresta*, diz que ele mede o número de menores caminhos, entre pares de nós, que tem essa aresta como parte dos menores caminhos.

1.7 Redes Reais

Para que se possa modelar um problema real como uma rede complexa, necessita-se, antes de mais nada, indentificar os elementos que a compõe e, sobretudo, saber como tais elementos interagem. Nos anos recentes, isso vem sendo feito com vários sistemas reais, objetivando-se assim, indentificar e compreender suas características e/ou propriedades topológicas. Procurando seguir essa lógica, veremos, daqui por diante, exemplos de sistemas reais que foram modelados sob a forma de redes e faremos o relato sobre algumas características topológicas apresentadas pelos mesmos.

1.7.1 O Mundo é Pequeno

Em 1967, Stanley Milgram, um Psicólogo e Sociólogo americano, desenvolveu um experimento social com o intuito de saber se pessoas desconhecidas e escolhidas aleatoriamente, nos Estados Unidos, poderiam ser conectadas através de pessoas que se conheciam [3].

E, caso isso fosse possível, quantas eram as pessoas necessárias para tal feito ocorrer. Assim, de certa forma, determinava-se a “distância” entre quaisquer duas pessoas desconhecidas.

Para dar início a esse experimento duas pessoas foram escolhidas como alvo. A primeira foi a esposa de um estudante de graduação. A segunda um corretor da bolsa de valores, ambos residindo em Massachusetts.

O passo seguinte, foi escolher as cidades de Wichita e Omaha (áreas desérticas do país), respectivamente, pertencentes aos estados do Kansas e do Nebraska, como ponto de partida para o estudo.

O experimento de Milgram consistia em enviar envelopes para moradores, escolhidos aleatoriamente, em Wichita e Omaha pedindo-lhes que participassem de um estudo relacionado a sociedade americana. Os moradores que recebessem os envelopes, no entanto, teriam que entregá-lo, direto ou indiretamente, à pessoa alvo.

O envelope continha uma carta com um breve resumo da proposta do estudo, uma fotografia, nome, endereço e alguns dados pessoais da pessoa alvo, juntamente com as seguintes instruções:

- (1) Cada pessoa que receber o caderno deve adicionar seu nome nele. Isto serve para rastrear de quem partiu o envelope, evitando que este volte para uma mesma pessoa.
- (2) Se você não conhece a pessoa alvo, não tente contactá-la diretamente. Ao invés disso, repasse este caderno para alguém que você conhece e acredite que, este, tenha maior chance de conhecer a pessoa alvo.
- (3) Se você conhece a pessoa alvo, envie este documento diretamente para ele(a).
- (4) Ao enviar o caderno, cada pessoa deve retirar uma página dele, preenchê-la e remetê-la ao cientista. Esta, sem dúvida, é uma fase muito importante do estudo, pois ela permite, a Milgram, acompanhar o progresso da experiência, ao longo do trajeto do caderno, até chegar a pessoa alvo. Nas mãos da pessoa alvo, o caderno deve, agora, ser enviado ao Psicólogo para a conclusão do experimento.

O surpreendente resultado da experiência foi publicado na revista “*Psychology Today*” num trabalho intitulado como “Problema de Mundo Pequeno” [3] e revelou que o número médio de ligações entre a pessoa inicial e o destinatário final, no caso das experiências que



Figura 1.6: Mapa dos Estados Unidos. Os estados em vermelho representam a origem das correspondências e o estado em verde representa o destino final. Figura proveniente da ref. [15].

se completaram, era de aproximadamente seis pessoas. Daí surgiu a famosa expressão “seis graus de separação” que já foi aproveitada para título de peças de teatros e filmes.

A contribuição de Milgram não foi apenas nos chamar à atenção para o quanto estamos conectados, mas também demonstrar que ninguém está a muito mais que alguns “apertos de mão” de uma outra pessoa. Isto é, o mundo é pequeno.

O termo mundo pequeno, como tratado por Milgram, também foi comprovado em inúmeras redes reais, dado que estas, em geral, apresentam “distância” finita e pequena entre dois pontos quaisquer, passando então, a serem chamadas de redes de mundo pequeno.

1.7.2 World Wide Web (WWW)

A WWW é o exemplo mais importante de rede de informação. Os nós da WWW são representados pelos documentos HTML (web pages) que são ligados uns aos outros por hyperlinks (URLs), os quais fazem o papel das arestas da rede. O crescimento da WWW se

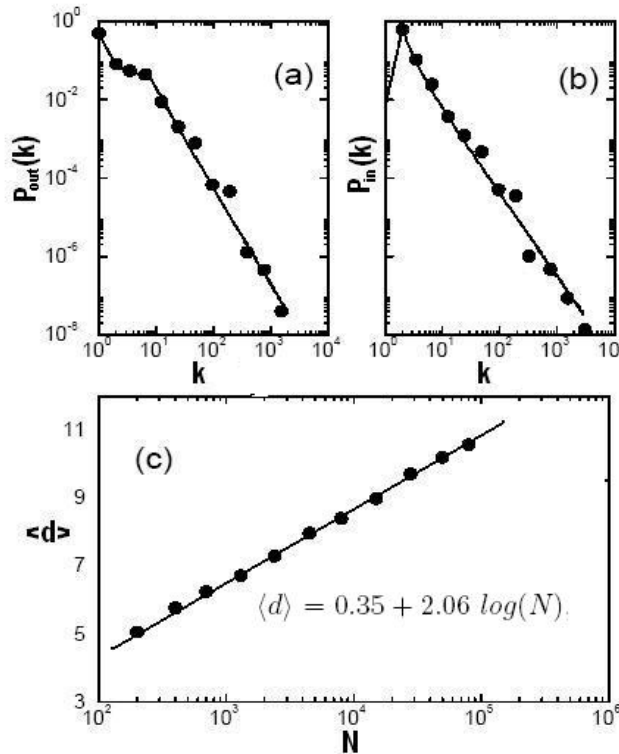


Figura 1.7: Distribuição de *links* saindo (a) e entrando (b) em uma Web page. Em (c), menor caminho médio como função do tamanho da rede. Figura proveniente da ref. [6].

dá sem ordenamento natural, o que a torna complexa e direcionada. Nesse caso, a conectividade dos nós é feita não apenas pelas conexões que entram, mas também pelas conexões que saem dos mesmos. Como as conexões são direcionadas, a WWW é caracterizada por duas distribuições de conectividade: $P_{in}(k)$ que indica a probabilidade de haver k hyperlinks apontando para um dado documento e $P_{out}(k)$ que denota a provável existência de k links terem origem nessa web page.

Estudos realizados por Barabasi et al. (1999) [6] com o intuito de mapear a WWW, estimada em, pelo menos, 8×10^8 documentos, detectaram que ambas, $P_{in}(k)$ e $P_{out}(k)$, seguem uma lei de potência por diversas ordem de grandeza de k . A figura 1.7 mostra o comportamento das leis de potência que caracterizam as distribuições de conexões.

$$P_{in}(k) \sim k^{-\gamma_{in}} \quad \text{onde} \quad \gamma_{in} = 2.1 \quad \text{e} \quad P_{out}(k) \sim k^{-\gamma_{out}} \quad \text{com} \quad \gamma_{out} = 2.45$$

Esse resultado é muito diferente do que era previsto pela clássica teoria de grafos aleatórios que esperava vê as distribuições de conexões seguir uma distribuição de Poisson.

Uma grandeza importante no processo de busca na web é o menor caminho d entre dois documentos. A média de d sobre todos os pares de vértices é dada por $\langle d \rangle = 0.35 + 2.06 \log(N)$. Usando $N = 8 \times 10^8$ web pages, encontramos que $\langle d_{www} \rangle = 18.59 \approx 19$, isto é, dois documentos escolhidos aleatoriamente estão, em média, a 19 cliques um do outro. Observamos que apesar do grande tamanho da WWW, ainda assim, existe um caminho relativamente pequeno conectando pares de Web pages. Isso, entretanto, enfatiza o caráter de “mundo pequeno” para a WWW.

O pequeno valor de $\langle d \rangle$ sinaliza a possibilidade de construir-se melhores programas que otimizem as busca na web. Tais programas podem, por exemplo, utilizarem agentes inteligentes que sejam capazes de interpretar os links e seguir somente os mais relevantes para obter, mais depressa, a informação desejada.

1.7.3 Internet

A internet é o principal exemplo de redes com maior relevância tecnológica e econômica. Ela é tida como uma enorme rede global de computadores ou outros aparelhos de comunicação, que são ligados, entre si, por ou sem fios e, junto com isso, representa mudanças eletrônicas de transmissão de informações entre computadores. Normalmente, a estrutura da Internet é descrita em dois níveis distintos: Um, trata a mesma a nível de roteadores, sendo que os nós são os próprios roteadores e as ligações são conexões físicas entre eles. O outro, trata a Internet a nível de domínios (*sistemas autônomos*), que são sub-redes na Internet, composto por milhares de computadores e roteadores, os quais representam um único nó, onde a ligação se estabelece entre dois domínios se existir, pelo menos, um roteador que os conecte.

Um aspecto de especial interesse, demonstrado pela Internet, está relacionado a “grande quantidade” de nós que ela apresenta, quando comparada com outros sistemas reais. Tal aspecto é importante do ponto de vista das análises estatísticas feitas na rede, e estas revelaram que a Internet, tanto a nível de roteadores quanto de domínios, apresenta propriedades topológicas não triviais; entre elas, a distribuição de conectividade comportando-se como lei de potência. Esse fato confere a Internet, a inclusão numa classe de redes denominadas de *escala livre*.

Outras características da Internet, como menor caminho médio e coeficiente de agregação, ratificam a inclusão dela nessa classe de redes. Pastor-Satorrs et al. (2001) [5] es-

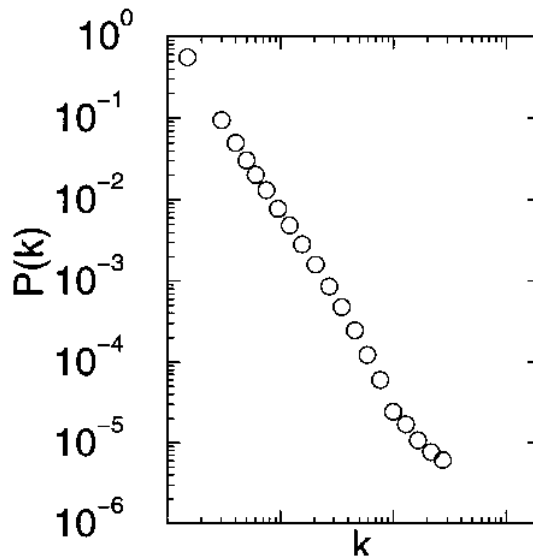


Figura 1.8: Comportamento da distribuição de conectividade (Lei de potência) da Internet a nível de roteadores. Figura proveniente da ref. [2].

tudando a Internet a nível de domínios entre 1997 e 1999, obtiveram valores para o menor caminho médio situados abaixo de 4, estes são diferentes daqueles exibidos por grafos aleatórios clássicos, quando têm-se o mesmo número total de vértices e conexões. Em particular, para a Internet no ano de 1998, a relação entre o menor caminho \bar{l}/\bar{l}_{rand} era de 0.6 .

A indicação desse valor para \bar{l} significa que, dados em torno de 4 “passos”, pode-se alcançar a maioria dos vértices e isso faz a Internet exibir o caráter de mundo pequeno. A nível de roteadores, o menor caminho médio é $\bar{l} \approx 10$, valor ligeiramente menor do que o de seu correspondente grafo aleatório clássico.

O coeficiente de agregação tem valor situado em torno de 0.2. Este é essencialmente maior que o de seu correspondente grafo aleatório clássico que tem valor de $C_{rand} \approx 0.001$.

1.7.4 Rede de contatos sexuais

A rede de contatos sexuais é, sem dúvida, muito importante do ponto de vista de saúde pública, já que várias doenças sexualmente transmissíveis (DSTs) podem se propagar entre seus constituintes. O conhecimento de sua topologia ajudará, por exemplo, na escolha de estratégias, mais eficientes, visando prevenir o contágio com alguma DST.

Em 1996, Liljeros et al. [7] analisando o comportamento sexual, de uma amostra

aleatória de indivíduos, revelaram características bastantes interessantes, de uma rede de contato sexual, composta por 2810 Suecos. A característica mais marcante do estudo, foi a descoberta de que a distribuição de conectividade $P(k)$ do número de parceiros sexuais k , no decorrer dos últimos 12 meses e também, durante toda a vida desses indivíduos, decaí como uma lei de potência com expoentes similares, tanto para homens ($\alpha = 2.31 \pm 0.2$ e $\alpha_{tot} = 1.60 \pm 0.3$) quanto para mulheres ($\alpha = 2.54 \pm 0.2$ e $\alpha_{tot} = 2.21 \pm 0.3$).

A natureza de escala livre apresentada pela distribuição de conectividade difere do padrão esperado para a rede de relações sexuais, uma vez que, para esta, a expectativa era encontrar uma distribuição Gaussiana, assim como fora obtido para a rede de relações de amizades [11].

O fato da distribuição de conexões decair como lei de potência, indica que o conceito de grupo de risco, considerado em estudos epidemiológicos, é, nesse caso, arbitrário, porque não há uma fronteira bem definida que separa os indivíduos do grupo de risco dos outros indivíduos. Outro aspecto importante é que, de acordo com os modelos epidemiológicos, as epidemias propagam-se, muito mais rapidamente, numa rede sem escala do que numa rede com escala (Gaussiana).

A possibilidade da rede de contatos sexuais ter uma estrutura sem escala típica, indica que campanhas educativas, alertando sobre a importância do sexo seguro, deve ter como alvo preferencial, indivíduos com um grande número de parceiros(as). Essa estratégia pode reduzir, significativamente, a disseminação de doenças sexualmente transmissíveis na rede e, além disso, diminuir os gastos com tratamentos das DSTs.

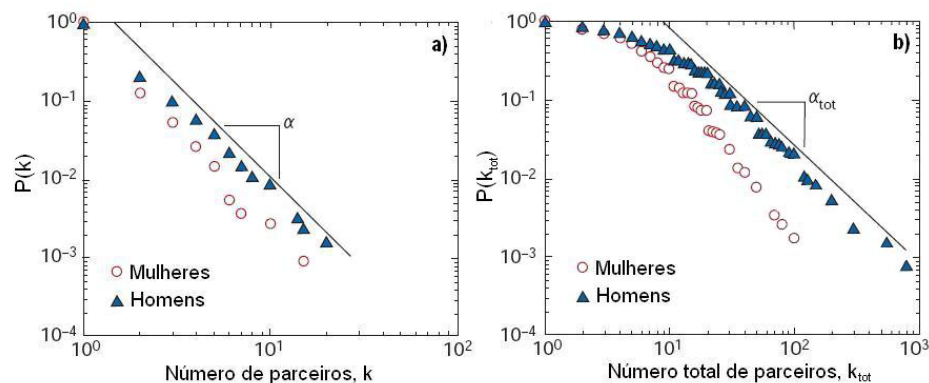


Figura 1.9: Distribuição de escala livre do número de parceiros sexuais para homens e mulheres. Em (a), distribuição do número de parceiros no decorrer dos últimos 12 meses e, em (b), distribuição do número total de parceiros correspondente a vida inteira. Figura proveniente da ref. [7].

1.7.5 Rede Metabólica

Uma rede de particular interesse científico é a rede metabólica. As muitas reações bioquímicas que dão “poder” as células dos organismos vivos formam uma rede em que os vértices são substratos (substâncias químicas), como por exemplo, água, gás carbônico, ATP, ADP etc., os quais estão conectados um ao outro por meio das próprias reações bioquímicas (arestas).

As arestas da rede metabólica são dirigidas, pois reações bioquímicas distintas, podem tratar um mesmo substrato ora como produto ora como reagente. Assim, diferencia-se entre as conexões de entrada e saída dos nós. As conexões que entram nos vértices consideram o substrato como produto da reação. Por outro lado, a conectividade de saída toma-o como reagente. Esta representação permite, sistematicamente, investigar e quantificar as propriedades topológicas das redes metabólicas de vários organismos.

Um estudo extensivo realizado por Jeong et al. (2000) [8] comparando a organização estrutural das redes metabólicas de 43 organismos pertencentes a todos os três domínios da vida: Bactérias, Eucariontes (animais, plantas etc.) e Arqueas, revelou que, em comum com diversas outras redes reais, a distribuição de conectividade dos vértices, tanto a de entrada quanto a de saída, é de escala livre e o comprimento médio do caminho, entre pares de vértices, é pequeno para todos os organismos analisados.

Os expoentes das leis de potências que gerem o comportamento de ambas as distribuições, a de entrada e a de saída, das conexões dos nós variam no intervalo de 2,0 a 2,4.

Uma característica geral de muitas redes complexas é seu efeito de mundo pequeno, significando que dois nós quaisquer podem ser conectados por um caminho, relativamente, pequeno ao longo das ligações existentes entre eles. Na rede metabólica, esses caminhos correspondem a reações bioquímicas conectando dois substratos. Jeong et al. [8], encontraram que a maioria dos substratos podem ser ligados, aproximadamente, por um caminho equivalente a três reações bioquímicas.

Do ponto de vista biológico, esse é um resultado significativo. Caso o caminho médio entre os substratos fosse bastante grande, necessitaria-se de muitas reações intermediárias para conectar dois substratos quaisquer. No entanto, esse fato, seguramente não acrescentaria vantagem alguma aos seres vivos, dado que muitos desses “produtos” das reações intermediárias

poderiam, por exemplo, se deteriorar muito rapidamente, por meio de intervenções ambientais e, assim, ocorreria a remoção do caminho entre os substratos em questão. Já um pequeno caminho, como obtido por Jeong et al. [8], certamente, é mais eficiente para esse tipo de situação e, talvez, constitua uma estratégia natural para a preservação da vida.

1.7.6 Rede de Citações Científicas

Os cientistas, naturalmente se interessam pelas citações que seus trabalhos recebem. As citações, na literatura científica, formam a rede das citações. E esta, de certa forma, reflete o aspecto específico da evolução da ciência. Os vértices da rede de citações são os artigos científicos, e suas arestas, direcionadas, são as citações. O fato das arestas serem dirigidas, de um artigo a outro, na rede de citações dos trabalhos científicos, significa que o primeiro cita o segundo em sua bibliografia. Dito de outra forma, artigos mais “jovens” citam, em sua bibliografia, artigos publicados anteriormente. Conseqüentemente, todas as arestas, nessa rede, são direcionadas a artigos mais “velhos”.

Já que a rede de citações é direcionada, os artigos em tal rede, têm uma distribuição que caracteriza as conexões de saída $P_{out}(k)$ (o número de artigos que eles citam) e outra que informa sobre as conexões de entrada $P_{in}(k)$ (número de artigos em que eles são citados).

De particular interesse é o trabalho de Redner (1998) [13] que investigou dados fornecidos pelo *Institute for Scientific Information* e pela revista *Physical Review D*, com o objetivo de descobrir o comportamento das distribuições de conexões dos artigos.

Dos dados obtidos do *Institute for Scientific Information*, Redner observou a frequência de citações de 783.339 trabalhos publicados em 1981 e citados mais de 6 milhões de vezes entre 1981 e 1997. Ele encontrou que a probabilidade de um artigo ser citado k vezes segue uma lei de potência com expoente, aproximadamente, igual a 3. O segundo conjunto de dados catalogados das bibliografias de 24.296 artigos publicados na revista *Physical Review D*, entre 1975 e 1994, também mostrou resultado semelhante.

A distribuição do número de referência de um artigo, isto é, $P_{out}(k)$ apresenta cauda com decaimento exponencial.

Na tabela abaixo, apresentamos mais dados relacionados a outras redes reais.

Tabela 1.1: Dados das redes reais

	Rede ou subgrafo	Número de vértices	Número de arestas	γ	C	C/C_r	\bar{l}	\bar{l}/\bar{l}_r	Refs.
1	Mapa completado domínio nd.edu da Web	325 729	1 469 680	$\gamma_i = 2, 1,$ $\gamma_o = 2, 45$	-	-	11,2	-	[6]
2	WWW analisado pelo Altavista (1999)	$2, 711 \cdot 10^8$	$2, 130 \cdot 10^9$	$\gamma_i = 2, 1,$ $\gamma_o = 2, 7$	-	-	16	1	[20],[21]
3	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 2, 10,$ $\gamma_o = 2, 82$	-	-	-	-	[22]
4	Mapa de sites de um domínio da WWW	$2, 60 \cdot 10^5$	$2, 70 \cdot 10^6$	$\gamma_i = 1, 94$	0,108	$0, 47 \cdot 10^3$	3,1	0,93	[23]
5	Mapa com ligações sem direções da WWW	153 127	1, 335.10 ⁷	$\gamma_i = 2, 05$	-	-	-	-	[24]
6	Um conjunto de home pages	4923	-	$\gamma_i = 2, 05$	-	-	-	-	[25]
7	Outro conjunto de home pages	-	-	$\gamma_i = 2, 63$	-	-	-	-	[25]
8	Conjunto de home pages de uma universidade	-	-	$\gamma_i = 2, 66,$ $\gamma_o = 2, 82$	-	-	-	-	[25]
9	Conjunto de home pages de cientistas	56880	-	$\gamma_i = 2, 2$	-	-	-	-	[26]
10	Internet (1998)	4389	8256	$\gamma_i = 2, 2$	-	-	4	0,6	[5]
11	Internet (1999)	6374	13 641	$\gamma_i = 2, 2$	0,24	$3, 3 \cdot 10^2$	3,7	0,58	[26]
12	Internet a nível de roteadores (1995)	3888	5012	$\gamma_i = 2, 5$	-	-	12,1	1,39	[27]
13	Internet a nível de roteadores (2000)	150 000	200 000	$\gamma_i = 2, 3$	-	-	10	0,8	[13]
14	Citações	783 339	6 716 198	$\gamma_i = 3$	-	-	-	-	[28]
15	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 2, 9$	-	-	-	-	[29]
16	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 2, 5$	-	-	-	-	[13]
17	Citações no Physical Review D	24 296	351 872	$\gamma_i = 3$	-	-	-	-	[28]
18	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 2, 6$	-	-	-	-	[29]
19	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 2, 3$	-	-	-	-	[31]
20	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 1, 9$	-	-	-	-	[32]
21	Rede de colaboração de atores de cinema	212 250	61 085 555	$\gamma_i = 2, 3$	-	-	4,54	1,25	[33]
22	(outro ajuste)	-	-	$\gamma_i = 3, 1$	-	-	-	-	[34]
23	Rede de colaboração	$1, 028 \cdot 10^7$	$\gamma_i = 2, 5$	0,066	$6 \cdot 10^3$	4,6	0,9	[34]	[34]
24	Rede de co-autores	56 627	$4, 898 \cdot 10^6$	$\gamma_i = 1, 2$	0,726	$0, 24 \cdot 10^3$	4,0	1,88	[35]
25	Rede de colaboração	70 975	$0, 132 \cdot 10^6$	$\gamma_i = 2, 1$	0,59	$1, 1 \cdot 10^4$	9,5	1,16	[7]
26	Rede de colaboração	209 293	$1, 214 \cdot 10^6$	$\gamma_i = 2, 4$	0,76	$1, 4 \cdot 10^4$	6	1,2	[8], [36]
27	Rede de relações sexuais	2810	-	$\gamma_i = 3, 4$	-	-	-	-	[37], [38]
28	Rede de reações metabólicas	$\sim 200 - 800$	$\sim 600 - 3000$	$\gamma_i = 2, 2$	0,32	12	3,2	0,95	[39]
29	Rede de interações entre proteínas	1870	2240	$\gamma_i = 2, 5$	0,022	4,4	6,8	0,8	[40]
30	Cadeia alimentar	470 000	17 000 000	$\gamma_i = 2, 7$	0,44	$2, 8 \cdot 10^3$	2,65	0,87	[41]
31	Cadeia alimentar do parque Silwood	154	366	$\gamma_i = 1$	0,15	5	3,4	1,05	[42]
32	"Java Development Framework"	1376	2174	$\gamma_i = 2, 5$	0,06	25	6,39	1,02	[43]
33	Jogo de computador	1989	$4, 78 \cdot 10^3$	$\gamma_i = 2, 85$	0,08	35	6,2	1,28	[44]
34	Circuitos eletrônicos	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$\gamma_i = 3$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1, 5 \cdot 10^2$	6	1	[45]
35	Rede de chamadas telefônicas	$47 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^7$	$\gamma_i = 2, 1$	-	-	-	-	[46]
36	Rede de e-mail	5165	$6, 57 \cdot 10^4$	$\gamma_i = 1, 5$	0,156	$3, 25 \cdot 10^3$	4,95	0,48	[47]
37	"Energy landscape network for a 14-atom cluster"	4196	87 219	$\gamma_i = 2, 78$	0,073	7,4	2,32	1,04	[48]

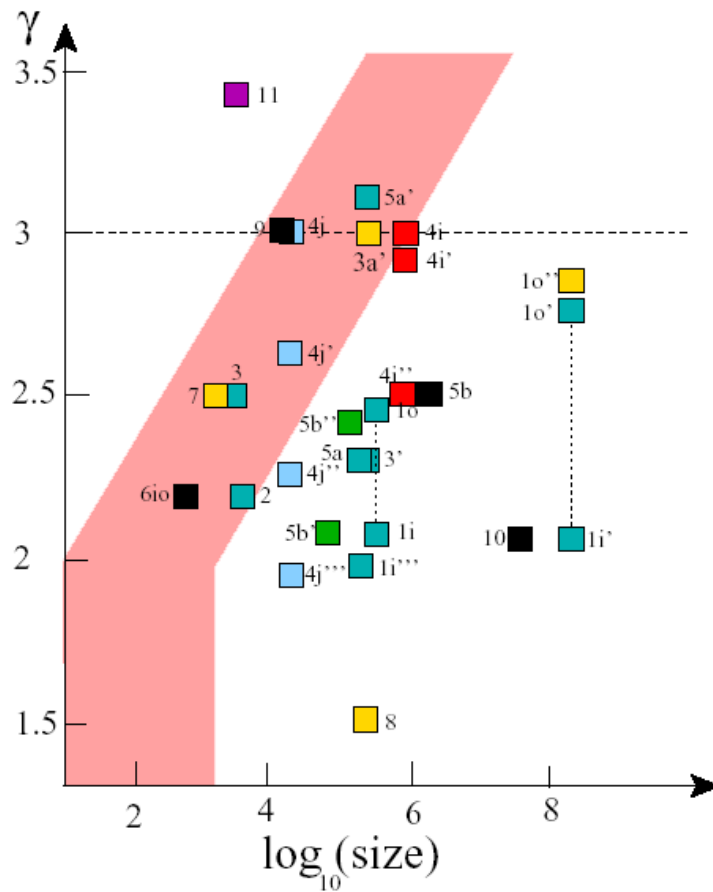


Figura 1.10: Expoentes das leis de potências das redes que compõem a tabela 1.1. Figura proveniente da ref. [12].

Os Primeiros Modelos de Redes Complexas

Neste capítulo, focaremos a atenção na modelagem matemática de redes, discutindo alguns modelos simples e genéricos, abordando procedimentos de construção e propriedades significativas. Para começar, fazemos a descrição do modelo de Erdős-Rényi e, logo em seguida, do modelo de Watts-Strogatz, relatando as vantagens e as desvantagens destes na caracterização das redes reais.

Os trabalhos de P. Erdős e A. Rényi [14] em meados de 1950 constituem uma das bases da teoria moderna de redes complexas. Nesses trabalhos, os autores estudaram, do ponto de vista matemático, um sistema formado por E conexões distribuídas aleatoriamente entre N vértices. Embora tenha sido o primeiro modelo amplamente estudado e servido de base para estudos mais elaborados em redes, ainda assim o mesmo não possui muitas aplicações relevantes já que não é tão frequente encontrarmos sistemas reais apresentando tal grau de aleatoriedade.

O modelo de Watts-Strogatz surgiu como uma alternativa de explicar o resultado do experimento realizado por Stanley Milgram, e por isso é tido como um simples modelo de redes sociais. Porém, atraiu a atenção dos físicos dada a possibilidade do uso de uma variedade de técnicas da Física Estatística.

2.1 Modelo de Erdős-Rényi

O modelo de Erdős-Rényi começa pela definição de um grafo aleatório com N nós, contendo n conexões (arestas) escolhidas de maneira aleatória entre as $N(N-1)/2$ conexões possíveis [14]. Existem, no total, $C_{N(N-1)/2}^n$ grafos possíveis que formam um espaço de probabilidades em que cada grafo é igualmente provável. Uma outra forma, correspondente a anterior, de definir o grafo aleatório de Erdős-Rényi é a seguinte: começa-se com N nós e cada nó será conectado a um outro com uma dada probabilidade p (Modelo Binomial), ver figura 2.1 para melhor compreensão. Assim, teremos que a conectividade média relaciona-se com p , de acordo com a expressão

$$\langle k \rangle = \frac{2n}{N} = p(N-1) \simeq pN. \quad (2.1)$$

Isto implica que o número total de conexões é uma variável aleatória proporcional a probabilidade p e com valor esperado dado por

$$E(n) = p[N(N-1)/2]. \quad (2.2)$$

O estudo extensivo desse tipo de grafo revelou que muitas de suas propriedades não surgem gradualmente e, sim de repente quando bastante arestas são “adicionadas” ao grafo.

Erdős e Rényi estudaram probabilisticamente a presença de propriedades em grafos para os quais $N \rightarrow \infty$. O resultado mais surpreendente, obtido por eles, foi que muitas propriedades relevantes aparecem abruptamente, se variada a probabilidade de conexão p . Dessa forma, em redes grandes, porém finitas, para cada propriedade estudada, deve existir uma probabilidade crítica p_c a partir da qual, essa dada propriedade, quase sempre está presente no grafo se $p > p_c$, e quase nunca ela (propriedade) está presente se $p < p_c$.

Em particular, uma propriedade interessante é a presença de subgrafos específicos, onde definimos subgrafos de um grafo G como sendo grafos de dimensões menores cujos pontos e conexões estão contidos em G . Os três tipos mais imediatos de subgrafos podem ser vistos na figura 2.2 e todos podem ser caracterizados, simplesmente, contando o número de nós e conexões presentes em cada um deles. Por exemplo, é um (sub)grafo do tipo árvore qualquer figura que tenha N nós e $N-1$ conexões; para ciclos, há N nós e também N conexões e, finalmente, para subgrafos completos, há N nós e $N(N-1)/2$ conexões.

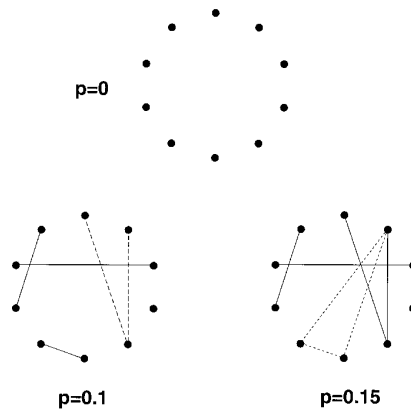


Figura 2.1: Ilustração do processo de evolução de um grafo para o modelo de Erdős-Rényi. Começamos com $N = 10$ nós isolados (figura mais acima, onde $p = 0$), e conectamos cada par de nós com probabilidade p . As duas figuras mais abaixo, mostram dois estágios diferentes do desenvolvimento do grafo, correspondendo a $p = 0.1$ e $p = 0.15$. Observamos o aparecimento de árvores (uma árvore de ordem 3, desenhada pelas linhas tracejadas) e ciclos (um ciclo de ordem 3, desenhado pelas linhas tracejadas) no grafo, e um aglomerado conectando metade dos nós em $p = 0.15 = 1.5/N$. Figura proveniente da ref. [2].

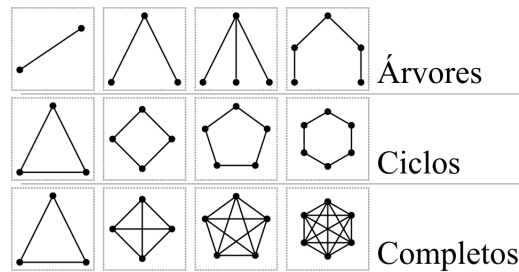


Figura 2.2: Tipos de Subgrafos.

No estudo de grafos aleatórios, é interessante determinar a probabilidade crítica de conexão p_c a partir da qual quase todos os grafos têm um subgrafo, de um dado tipo, em sua estrutura. De fato, foi demonstrado [16] que esta probabilidade crítica pode ser calculada para qualquer subgrafo com, digamos, k nós e l conexões. Para tanto, vamos inicialmente escrever o número médio de subgrafos desse tipo (especificado por k e l apenas) em uma rede. Note que os k elementos podem ser escolhidos dos N nós da rede de C_N^k formas diferentes, onde $C_N^k = N!/((N - k)!k!)$ é o número de combinações contendo k elementos selecionados dentro dos N possíveis, e as l arestas têm probabilidade p^l de serem formadas. Além disso, os k nós podem ser permutados de $k!/a$ maneiras diferentes, onde a representa o número de permutações *isomorfas*¹. Dessa forma, o número médio de subgrafos E do tipo definido pelos

¹Permutações que têm a mesma forma.

números k e l pode ser dado como:

$$E = C_N^k \frac{k!}{a} p^l \simeq \frac{N^k p^l}{a}. \tag{2.3}$$

Nesta expressão, a aproximação feita considera subgrafos de dimensões pequenas, isto é, k e l , tipicamente, muito menores do que o número de nós N da rede, e então $C_N^k \approx N^k/k!$ é uma aproximação razoável. É claro que este é um valor médio, mas é provável que os valores observados não sejam muito diferentes destes. Para tentar chegar a um valor satisfatório para a probabilidade crítica, vamos supor que desejamos que haja um número apreciável c' de ocorrências de um determinado subgrafo definido por k e l . Então, pela dependência de 2.3, temos:

$$\frac{N^k p^l}{a} \sim c' \rightarrow p_c \sim c'' N^{-\frac{k}{l}}. \tag{2.4}$$

Nesta equação, vemos que a probabilidade crítica depende crucialmente dos valores de k e l , o que de fato parece razoável. Verifica-se que, realmente, há o aparecimento de subgrafos de crescente complexidade quando p cresce para redes apreciavelmente grandes, como podemos ver na figura 2.3. De imediato, nota-se que, inicialmente, a rede apresenta apenas árvores com $k = 2$ e $l = 1$. No entanto, à medida que são considerados valores maiores de p , vão aparecendo árvores de maior dimensão. Então, quando $p \sim N^{-1}$ aparecem todos os ciclos, e é apenas para $p \sim N^{-\frac{2}{3}}$ que começam a surgir subgrafos completos.

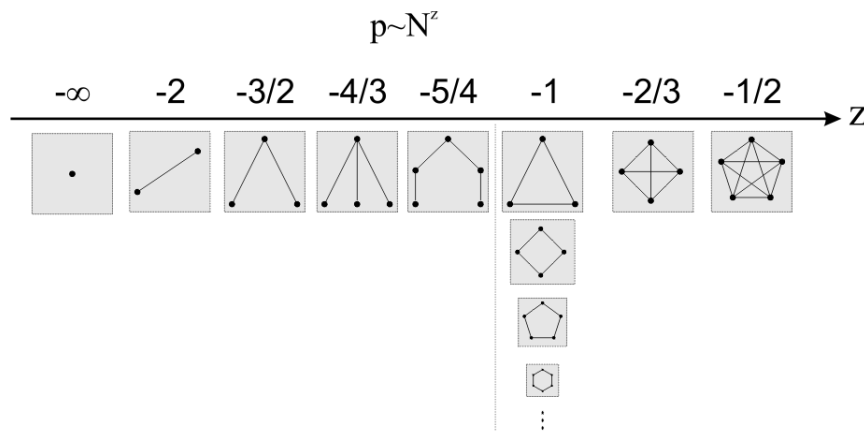


Figura 2.3: Aparecimento de subgrafos em grafo aleatório de acordo com p , onde z é o expoente da dependência em N . Veja que $z = -k/l$.

Há ainda uma transição muito marcante, se $p \sim N^z$, quando o expoente z se aproxima de -1 . Para $z < -1$ o grafo é composto apenas por árvores desconectadas, mas quando

$z \approx -1$, ocorre uma mudança súbita na estrutura do grafo. O maior subgrafo, totalmente conectado, deixa de ser uma árvore pequena e passa a abranger quase a rede inteira e, nesse caso, trata-se de um bloco conectando cerca de $N^{\frac{2}{3}}$ nós. Essa transição é bastante similar a transição de fase associada ao fenômeno de Percolação², onde os aglomerados menores colapsarão num aglomerado gigante [2, 47].

2.1.1 Propriedades Topológicas do Modelo de Erdős-Rényi

I. Distribuição de Conectividade

A distribuição de conectividade das redes aleatórias é conhecida desde os primeiros trabalhos de Erdős e Rényi [14]. Nestes, eles estudaram o limite superior e inferior da distribuição de conectividade e obtiveram que a probabilidade, numa rede aleatória, de um nó i ter $k = k_i$ ligações com outros nós, segue uma distribuição binomial

$$P(k_i = k) = C_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (2.5)$$

onde o primeiro termo, C_{N-1}^k , informa sobre o número de maneiras diferentes em que as ligações podem está distribuídas, o segundo termo, P^k , é a probabilidade de existência de k ligações e, por último, o terceiro termo, $(1-p)^{N-1-k}$, é a probabilidade para a ausência de $(N-1-k)$ ligações. Como todos os nós, num grafo aleatório, são estatisticamente equivalentes, a probabilidade de um nó, selecionado aleatoriamente, ter k ligações é a mesma para cada um deles; logo a distribuição de conectividade tem igual forma para todos os nós. Para N suficientemente grande, a distribuição é bem ajustada por uma distribuição de Poisson:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (2.6)$$

onde $\langle k \rangle$ é a conectividade média que é dada por $\langle k \rangle = p(N-1)$. Pode-se observar que a distribuição decresce rapidamente para valores afastados da conectividade média e que, muito embora as arestas sejam adicionadas aleatoriamente, ainda assim a maioria dos nós apresentam o mesmo número delas, $k_i \simeq \langle k \rangle$. Ver figura 2.4. Dessa forma, a rede gerada pelo

²Trata-se da aparição de um grupo de elementos todos conectados que, no caso da percolação, abrange a rede inteira de uma forma extensa.

modelo de Erdős-Rényi é razoavelmente homogênea e apresenta escala característica, dada aproximadamente pela conectividade média $\langle k \rangle$.

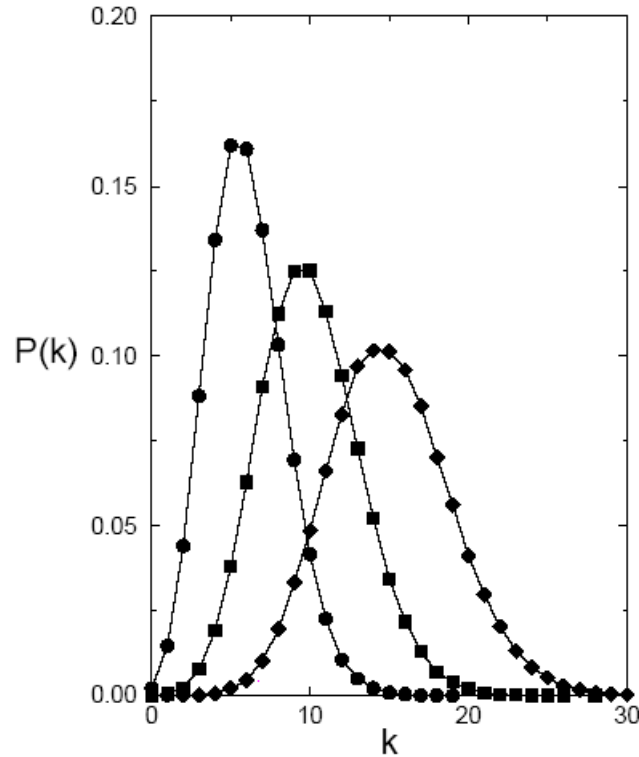


Figura 2.4: Distribuição de conectividade do modelo de Erdős-Rényi, para redes com $N = 10000$ e $p = 0.0006$ (círculos), $p = 0.001$ (quadrados) e $p = 0.0015$ (diamantes). Observamos que os nós têm, em média, o mesmo número de ligações. Figura proveniente da ref. [17].

II. Menor Caminho Médio

Considere uma rede aleatória onde os sítios tenham, em média, k ligações ($\langle k \rangle$) como na figura (1.4). Isto significa que de um sítio qualquer, pode-se visitar, em média, k outros sítios afastados a uma distância de um passo. De cada um desses k sítios, outros k sítios podem ser visitados, de modo que, em relação ao sítio inicial podemos visitar k^2 sítios depois de dados dois passos. Generalizando, dizemos que, em média, visitam-se $\langle k \rangle^l$ com l passos. Se a rede contém N sítios, $\langle k \rangle^l$ não pode exceder o tamanho N , ou seja, $N = \langle k \rangle^l$. Portanto, para alcançar os N sítios da rede são necessários, em média

$$l_{rand} \simeq \frac{\ln N}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.7)$$

A aleatoriedade das conexões gera uma quebra de simetria que faz com que o caminho médio entre dois sítios quaisquer seja muito pequeno se comparado ao tamanho da rede. Esse resultado, no entanto, serviu de base para explicar o experimento de S. Milgran [3].

Comparando-se o menor caminho médio de redes reais com os de redes aleatórias, pode-se perceber, de acordo com a equação (2.7), que os valores ajustam-se, de maneira razoável. Ver figura 2.5.

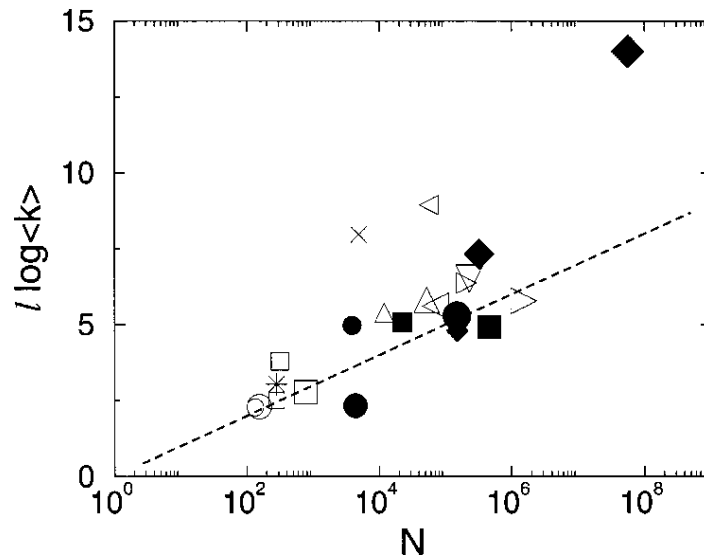


Figura 2.5: Comparação entre o comprimento médio dos menores caminhos de redes reais (símbolos) com a previsão da equação (2.7) para redes aleatórias (linha pontilhada). Figura proveniente da ref. [2].

III. Coeficiente de Agregação

Se considerarmos um vértice num grafo aleatório e seus primeiros vizinhos, a probabilidade que dois desses vizinhos estejam conectados entre si é igual à probabilidade que dois vértices quaisquer, do grafo, escolhidos aleatoriamente sejam conectados. Conseqüentemente, o coeficiente de agregação de um grafo aleatório é

$$C_{rand} = p = \frac{\langle k \rangle}{N}, \quad (2.8)$$

Na figura 2.6, pode-se observar o gráfico da razão entre o coeficiente de agregação e a conectividade média de redes reais, $C_{real}/\langle k \rangle$, em função de seus tamanhos e comparamos

esta razão com a predição da equação (2.8). O gráfico indica, claramente, que redes reais não seguem a previsão dos grafos aleatórios. A razão $C/\langle k \rangle$, no entanto, não diminui com N^{-1} , em vez disso, parece ser independente de N . Do gráfico, é notável a diferença entre os valores dos coeficientes de agregação de redes reais e aleatórias, as últimas possuem valor muito pequeno, quando considera-se o mesmo número de vértices para ambas as redes.

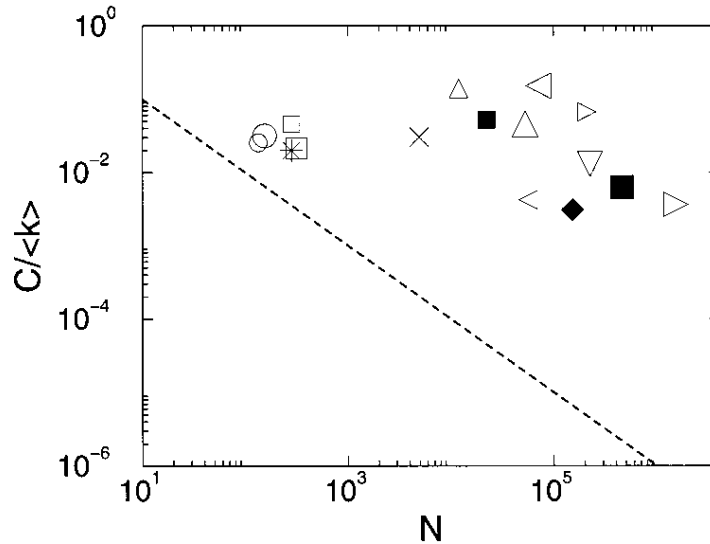


Figura 2.6: Comparação entre os coeficientes de agregação de redes reais e de grafos aleatórios. A linha tracejada corresponde a previsão da equação (2.8). Figura proveniente da ref. [2].

2.2 Modelo de Watts e Strogatz

Ao contrário do que mostra a rede de Erdős-Rényi, muitas redes reais possuem valor do coeficiente de agregação alto (ver tabela 1.1). Watts e Strogatz, na tentativa de unir as características de mundo pequeno e alto coeficiente de agregação presentes numa só rede, propuseram a construção de um modelo de rede, o modelo de Watts-Strogatz [18], que fosse inicialmente uma rede regular e que, a partir dela, fossem reconectadas ou redirecionadas ligações, com o objetivo de criar “atalhos” entre pontos distantes da rede.

O modelo de Watts-Strogatz pode ser construído em redes de qualquer dimensão ou topologia, mas foi melhor estudado para o caso da rede unidimensional, sendo definida da seguinte maneira: considere uma rede unidimensional de N vértices com condições de contorno periódicas, ou seja, um anel com N nós. Então, conecta-se cada vértice a seus

primeiros z vizinhos (vértices que estejam mais próximos do vértice em questão). Assim, obteremos uma rede com Nz ligações, onde cada vértice possui número de coordenação dado por $\bar{k} = 2z$ (veja o exemplo, na figura 2.7, de uma rede com $N = 20$ e $z = 2$). O modelo de Watts-Strogatz é então criado “reconectando” uma fração das ligações dessa rede. O processo de reconexão consiste em visitar cada ligação da rede e, com probabilidade p , reconectar uma das extremidades da ligação a um novo vértice escolhido aleatoriamente na rede. No modelo de Watts-Strogatz são proibidas as formações de duplas e de auto-ligações. Esse processo está ilustrado na figura 2.7.

O processo de reconexão permite, ao modelo de Watts-Strogatz, transformar uma rede com características de rede regular em uma rede aleatória. Quando $p = 0$, temos uma rede regular, e o coeficiente de agregação, da mesma, vale

$$C = \frac{3k - 3}{4k - 2} \quad (2.9)$$

que tende a $3/4$ quando $k \rightarrow \infty$. Por outro lado, quando $p = 1$, cada ligação é reconectada a um novo vértice transformando a rede regular numa rede, totalmente, aleatória, com menor caminho médio típico da ordem de $\ln N / \ln k$, mas com coeficiente de agregação muito baixo $C \simeq 2k/N$. Contudo, como Watts e Strogatz mostraram, em cálculos numéricos do coeficiente de agregação e do menor caminho médio, existe um razoável intervalo de probabilidade p para o qual o modelo apresenta simultaneamente menor caminho médio baixo e coeficiente de agregação alto – veja figura 2.8.

O modelo de Watts-Strogatz teve como inspiração sistemas sociais, basta lembrar que, normalmente, muitas pessoas são amigas de seus vizinhos, por exemplo, amizade entre os vizinhos de uma mesma rua. Entretanto, qualquer um de nós, certamente, tem, pelo menos, um amigo que está longe, morando em um outro bairro, cidade ou país. Esses relacionamentos de longas distâncias são representados pelas ligações de longo alcance, obtidas pelas reconexões no modelo de Watts-Strogatz.

Para entender, um pouco mais, a existência de curtos caminhos entre dois vértices quaisquer e a alta agregação, será necessário analisar o comportamento do coeficiente de agregação $C(p)$ e o comprimento médio dos menores caminhos $l(p)$ em função da probabilidade de reconexão.

Para uma rede com condições de contorno periódicas, fazendo $p = 0$ temos que $l(0) \simeq N/2k \gg 1$ e $C(0) \simeq 3/4$. Observamos que l se escala com o tamanho da rede e que o coeficiente de agregação é alto, assim como é esperado que ocorra em redes regulares. Por

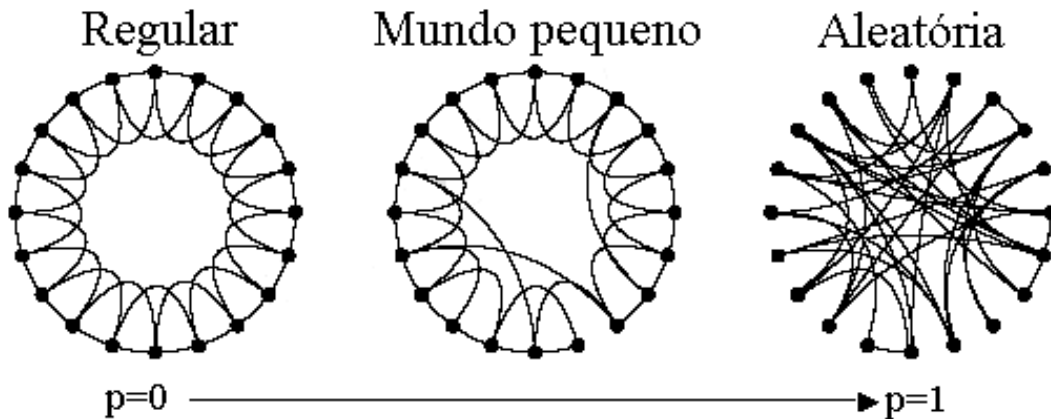


Figura 2.7: Procedimento de reconectar os vértices do modelo de Watts-Strogatz que transforma uma rede (circular) regular em uma rede aleatória sem fazer mudança no número de vértice ou ligação. Começamos com uma rede de $N = 20$ nós, cada um conectado aos seus 4 vizinhos mais próximos (dois de cada lado do vértice em questão, ou seja, $z = \bar{k}/2$), em seguida escolhemos um vértice e uma ligação que conecta um de seus vizinhos. Com uma probabilidade p reconectamos essa ligação a um outro vértice escolhido aleatoriamente. Fazemos isso até que todas as ligações, da rede original, tenham sido consideradas. Realizações desse procedimento é mostrado, aqui nesta figura, para três valores diferentes de p . Na primeira, da esquerda para a direita, foi usado $p = 0$, com isso a rede original permanece inalterada (rede regular). Na segunda, com o valor de p no intervalo $0 < p < 1$ (rede de mundo pequeno). Na terceira, é obtida uma rede totalmente aleatória, com $p = 1$, onde todas as ligações foram aleatoriamente reconectadas. Figura proveniente da ref. [18].

outro lado, quando $p \rightarrow 1$, o modelo de Watts-Strogatz, converge para uma rede aleatória, onde temos $l(1) \sim \ln(N)/\ln(k)$ e $C(1) \sim k/N$. Notemos, nesse caso, que l varia com logaritmo do tamanho da rede N , enquanto isso o coeficiente de agregação C escala-se com o inverso de N .

A análise desses casos limites pode nos levar a concluir que um grande valor do coeficiente de agregação $C(p)$ está sempre associado a um pequeno valor do comprimento médio dos menores caminhos $l(p)$. No entanto, como podemos observar na figura 2.8, existe um considerável intervalo de valores de p , onde $l(p)$ tem valores próximos de $l(1)$ e o coeficiente de agregação ainda é bem maior do que $C(1)$. A existência desse intervalo de valores de p tem sua origem na rápida queda de $l(p)$ para pequenos valores de p enquanto $C(p)$ permanece quase que inalterado. Portanto, nesse regime a rede possui valores altos para o coeficiente de agregação, o que é explicado pelo fato da topologia, fortemente remanescente, da rede regular original e valores baixos para o comprimento médio dos menores caminhos, os quais verificam-se devido a introdução de ligações de longo alcance entre os nós da rede. A ocorrência desse fenômeno, caminho médio pequeno e agregação alta, insere na rede o chamado efeito mundo pequeno.

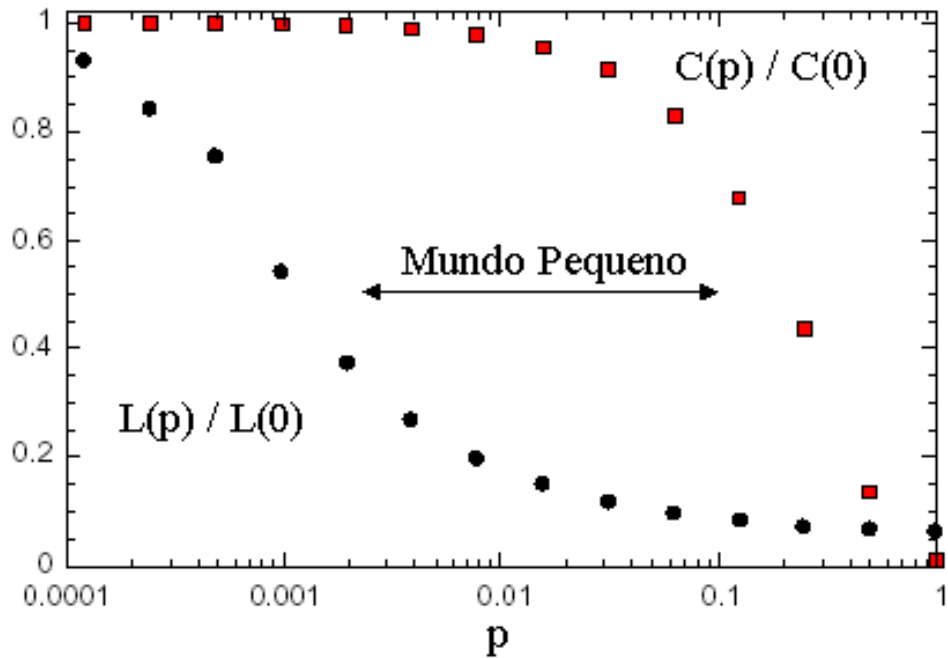


Figura 2.8: Coeficiente de agregação $C(p)$ e o comprimento médio dos menores caminhos $l(p)$ do modelo de Watts-Strogatz. Os dados foram normalizados pelos valores de $C(0)$ e $l(0)$, respectivamente. Pode ser visto a rápida queda de $l(p)$, demonstrando que a rede apresenta o efeito mundo pequeno. Durante essa queda de $l(p)$, $C(p)$ permanece praticamente constante, o que indica que a transição para uma rede de mundo pequeno é quase que imperceptível a nível local. Figura proveniente da ref. [18].

Notamos que a distribuição de conectividade de uma rede desse tipo se comporta de uma forma razoavelmente intuitiva: Quando $p = 0$, a distribuição é uma função $P(k) = \delta(k - \bar{k})$, uma vez que todos os vértices têm a mesma quantidade de vizinhos, dado pelo número de coordenação \bar{k} . No entanto, à medida que p cresce, vão se adicionando outros valores de $k \sim \bar{k} \pm \varepsilon$ de uma forma exponencial, fazendo com que, finalmente, em $p = 1$, recuperemos a distribuição binomial esperada para uma rede aleatória (Modelo de Erdős-Rényi), centrada justamente em $k = \bar{k}$.

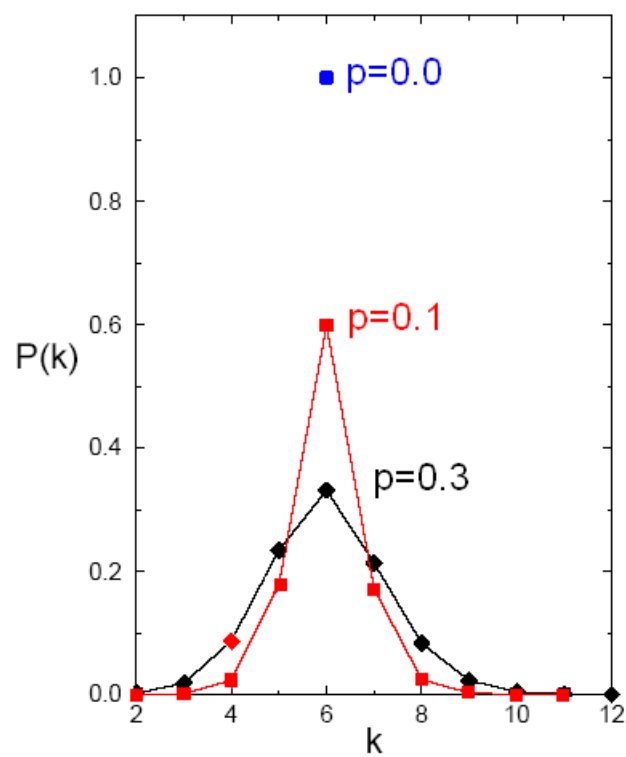


Figura 2.9: Comportamento da distribuição de conectividade do modelo de Watts-Strogatz. Rede com $N = 10000$ e $\bar{k} = 6$ para diferentes valores de p . Figura proveniente de ref. [17].

CAPÍTULO 3

Redes de Escala Livre

No final da década passada e início da década atual, vários trabalhos na literatura mostraram que muitas redes reais possuem uma distribuição de conectividade em forma de lei de potência [2, 5, 6, 7]. O comportamento tipo lei de potência indica a ausência de uma escala típica para a conectividade dos sítios e, isso, portanto, faz essas redes serem chamadas de redes de *escala livre* (sem escala).

As redes de escala livre diferem bastante das redes aleatórias, estudadas no capítulo anterior. As primeiras caracterizam-se por apresentar alguns poucos sítios muito conectados enquanto a maioria dos demais possuem baixo índice de conexões. Isso as torna significativamente heterogêneas, fato que é traduzido por sua distribuição de conectividade que decai na forma de lei de potência. Por outro lado, as redes aleatórias possuem, em média, a mesma conectividade para seus nós, são homogêneas e seguem, para as conexões, uma distribuição de Poisson com pico bem definido em torno da conectividade média, indicando uma escala característica para a rede.

As diferenças “estruturais” entre esses dois tipos de redes levaram os pesquisadores à levantarem uma questão básica: Qual o mecanismo responsável pelo aparecimento de estruturas de escala livre, que estão frequentemente presentes em algumas redes reais ?

A resposta a essa questão foi dada, inicialmente, através dos trabalhos de Barabási

e Albert [2, 49, 32]. Os dois, atentaram que detalhes essenciais, para se obter redes de escala livre, estavam sendo deixados de lado pelos modelos anteriores. Barabási e Albert, sabendo que os sistemas reais crescem, e que as interações (ligações) entre seus constituintes se dá de forma preferencial, concluíram serem estes os requisitos necessários para se gerar redes de escala livre. Desde então, diversos outros modelos de redes têm sido propostos, visando retratar mais realisticamente os sistemas reais. Para isso, os novos modelos incluem inúmeras variações na ligação preferencial, como por exemplo, parâmetros de qualidades [50], envelhecimento dos nós [29], distância geométrica [44, 15, 52], etc.

Neste capítulo, detalharemos apenas o modelo de Barabási-Albert [2, 32], o qual fornece as ideias básicas para obtermos redes de escala livre, bem como um outro, o modelo de Bianconi-Barabási [50], que insere na ligação preferencial, um parâmetro de qualidade.

3.1 Modelo de Barabási e Albert

Uma característica comum dos dois modelos discutidos no capítulo anterior é que ambos apresentam uma distribuição de conectividade $P(k)$, do tipo Poissoniana, com valor característico $\langle k \rangle$, que depende de p . Mas, como mencionado na seção 1.7, muitos sistemas reais exibem uma distribuição de conectividade de escala livre, seguindo uma lei de potência por várias ordens de grandeza de k (conectividade).

Para compreender a origem dessa discrepância, Barabási e Albert argumentaram que haviam dois aspectos genéricos, das redes reais, que não estavam sendo incorporados nestes modelos. Primeiro, ambos os modelos começam com um número fixo N de vértices, que são, então, conectados (modelo de Erdős-Rényi) ou reconectados (modelo de Watts-Strogatz) aleatoriamente, sem modificar N . Em contrapartida, a maioria das redes reais são *abertas*, isto é, elas formam-se pela adição contínua de novos vértices, assim, o número de vértices N , aumenta ao longo de “toda a vida” da rede. Por exemplo, à medida que o tempo passa, a rede WWW cresce pela adição de novas *Webpages*, a rede de citação científica aumenta com a publicação de novos trabalhos (artigos). Consequentemente, uma característica comum desses sistemas é que a *rede cresce continuamente pela adição de novos vértices*, que são conectados a outros que já estão presentes no sistema.

Segundo; os modelos de redes aleatórias admitem que a probabilidade com que dois vértices são conectados é randômica e uniforme. No entanto, uma grande quantidade de redes

reais exibe *ligação preferencial*, isto é, a conexão com um vértice depende da conectividade desse vértice. Por exemplo, quando uma nova *Webpage* é criada na rede WWW, é mais provável que ela tenha ligações com outras *Webpages* bem conhecidas (documentos populares com alta conectividade). Similarmente, é mais provável que um novo artigo cite outro bem conhecido e muito citado do que um outro menos conhecido e conseqüentemente pouco citado. Estes exemplos indicam que a probabilidade com que um novo vértice conecta-se a outro, que já existe no sistema, não é uniforme. Ao invés disso, existe uma *maior probabilidade de novos vértices ligarem-se a outros que já têm alta conectividade*.

Baseado nestes dois ingredientes, *crescimento* e *ligação preferencial*, Barabási e Albert elaboraram um modelo capaz de gerar redes que apresentam distribuição de conectividade na forma de lei de potência. As regras a seguir, constituem o algoritmo do modelo:

- (1) Inicia-se a rede com m_0 sítios.
- (2) A cada passo de tempo é adicionado um novo sítio. Esse sítio é conectado com outros m ($\leq m_0$) sítios do aglomerado da rede pré-existente.
- (3) A probabilidade de uma conexão ser feita com um determinado sítio i é proporcional a k_i e é dada por

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (3.1)$$

- (4) Repete-se as operações (2) e (3) até o tamanho desejado e após t passos de tempo, a rede terá $N = m_0 + t$ sítios e mt ligações.

A combinação de *crescimento* e *ligação preferencial* resulta numa dinâmica interessante para a conectividade individual dos sítios. Alguns dos sítios que foram incorporados a rede logo nos primeiros estágios do seu desenvolvimento, têm maiores probabilidades de serem os mais conectados, dado que eles têm um tempo maior para adquirir ligações. Dessa forma, eles são os responsáveis pelos grandes valores da conectividade k na distribuição $P(k)$. O aumento da conectividade dos sítios e a distribuição de conectividade da rede podem ser calculados analiticamente usando o tratamento contínuo.

Tratamento contínuo: Foi introduzido por Barabási, Albert e Jeong [49] com o intuito de calcular a dependência temporal da conectividade k_i , de um dado sítio i . Essa conectividade k_i cresce à medida que novos sítios entram na rede e ligam-se ao sítio i , sendo a probabilidade desse processo $\Pi(k_i)$. Admitindo que k_i é uma variável real e contínua, a taxa

de variação temporal com que k_i muda, deve ser proporcional a $\Pi(k_i)$. Consequentemente k_i satisfaz a equação dinâmica:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j} \quad (3.2)$$

Observando que a soma no denominador não considera o sítio que está sendo introduzido na rede e que cada ligação é simétrica e por isso contada duas vezes, notemos que no limite $t \rightarrow \infty$, a soma é dada por

$$\sum_{j=1}^{N-1} k_j = 2(mt - m) \Rightarrow 2mt \quad (3.3)$$

A simples substituição da equação (3.3) em (3.2), leva a

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (3.4)$$

Sabendo que o sítio i é adicionado na rede no tempo t_i com o número inicial de conexões $k_i = m$, a solução da equação (3.4) com a condição inicial $k_i(t_i) = m$ é dada por

$$k_i(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^\beta \quad \text{com} \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) mostra que a conectividade de todos os sítios evolui da mesma forma e segue uma lei de potência, com expoente bem definido. Ver figura (3.1).

Usando a equação (3.5), podemos escrever a probabilidade de um nó ter uma conectividade $k_i(t)$ menor que k , $P[k_i(t) < k]$, como:

$$P \left[m \frac{t^\beta}{t_i^\beta} < k \right] = P \left[t_i^\beta > \frac{mt^\beta}{k} \right] = P \left[t_i > \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{k^{\frac{1}{\beta}}} \right] \quad (3.6)$$

A incorporação de novos sítios na rede, se dá em intervalos de tempos iguais. Logo, os valores t_i obedecem uma densidade de probabilidade constante, dada por

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + 1} \quad (3.7)$$

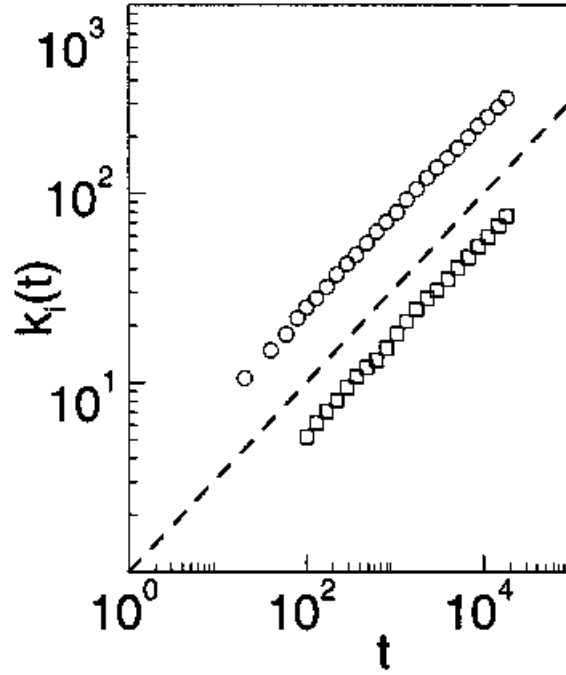


Figura 3.1: A figura mostra a evolução temporal da conectividade de dois sítios, adicionados na rede em $t_1 = 5$ e $t_2 = 95$. A linha tracejada tem inclinação 0.5 como previsto pela equação (3.5). Figura proveniente da ref. [49].

substituindo esta na expressão (3.6) obtêm-se

$$P\left[t_i > \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{k^{\frac{1}{\beta}}}\right] = 1 - \frac{m^{\frac{1}{\beta}} t}{k^{\frac{1}{\beta}} (m_0 + t)}. \quad (3.8)$$

A distribuição de conectividade $P(k)$ pode ser obtida usando

$$P(k) = \frac{\partial P[k_i(t) < k]}{\partial k} = \frac{2m^{\frac{1}{\beta}} t}{m_0 + t} \frac{1}{k^{\frac{1}{\beta} + 1}}. \quad (3.9)$$

No limite, $t \rightarrow \infty$, temos

$$P(k) \sim 2m^{\frac{1}{\beta}} k^{-\gamma}, \quad (3.10)$$

onde o expoente da lei de potência é dado por

$$\gamma = \frac{1}{\beta} + 1 = 3, \quad \text{com } \beta = \frac{1}{2}. \quad (3.11)$$

Esse valor concorda muito bem com os resultados numéricos (ver figura 3.2). Notemos que a distribuição de conectividade não depende de m .

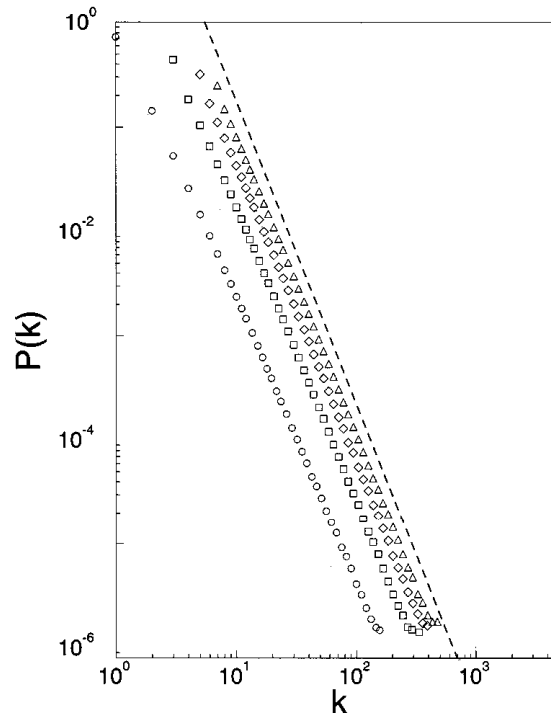


Figura 3.2: Distribuição de conectividade do modelo de Barabási-Albert, com $N = 300000$ onde temos: círculos ($m_0 = m = 1$); quadrados ($m_0 = m = 3$); diamantes ($m_0 = m = 5$) e triângulos ($m_0 = m = 7$). A inclinação da linha tracejada é $\gamma = 2.9$, concordando com a previsão teórica da equação (3.10). Figura proveniente da ref. [2].

Como as leis de potências são observadas em várias redes reais, e estas descrevem sistemas de tamanhos bastante diferentes, é esperado, então, que um modelo correto forneça uma distribuição de conectividade independente do tempo. Realmente, a equação (3.9) prevê que assintoticamente a distribuição de conectividade, do modelo de Barabási-Albert, independe do tempo (e do tamanho da rede $N = m_0 + t$), indicando que, apesar do crescimento contínuo, a rede atinge um estado estacionário de escala livre.

O processo analítico descrito acima, foi baseado em dois requisitos (ingredientes): *crescimento contínuo* e *ligação preferencial* descritos na página 35. Não há dúvidas de que esses dois ingredientes desempenham um papel fundamental para o aparecimento da escala livre, observada na distribuição de conectividade. No entanto, levanta-se uma questão importante: são ambos necessários para a ocorrência da lei de potência que descreve o comportamento da distribuição de conexões? Para responder essa questão, dois casos limites do modelo de Barabási-Albert têm sido investigados, onde somente uma dessas duas condições

é mantida, enquanto a outra é desconsiderada.

3.1.1 Condições básicas para se obter uma rede com distribuição de conectividade em lei de potência

Em primeiro lugar, analisaremos o caso de um modelo em que o caráter do crescimento da rede se faz presente, mas o mecanismo da ligação preferencial é eliminado. Para isso, iniciamos a rede com um pequeno número de nós (m_0) e em cada passo de tempo adicionamos um novo sítio com m ($\leq m_0$) arestas. Os novos sítios serão conectados com igual probabilidade (ligação uniforme) aos outros sítios que já estão presentes na rede, isto é, $\Pi(k_i) = 1/(m_0 + t - 1)$, independente de k_i . A taxa de mudança da conectividade de um sítio i , neste caso, é dada por

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m\Pi(k_i) = \frac{m}{(m_0 + t - 1)} \quad (3.12)$$

resolvendo essa equação para k_i , e levando em consideração a condição inicial $k_i(t_i) = m$, obteremos

$$k_i(t) = m[\ln(m_0 + t - 1) - \ln(m_0 + t_i - 1) + 1] \quad (3.13)$$

reescrevendo a equação (3.13), ficamos com

$$k_i(t) = m \ln \left[\frac{(m_0 + t - 1)}{m_0 + t_i - 1} \right]^m + m, \quad (3.14)$$

onde a equação anterior, expressa a evolução da conectividade de um determinado sítio i e tem uma dependência temporal logarítmica, fato esse que não acontece no modelo de Barabási-Albert (modelo de escala livre).

A probabilidade de um sítio i ter conectividade $k_i(t)$ menor que k , $P[k_i(t) < k]$, é

$$P[k_i(t) < k] = P \left[\ln \left[\frac{(m_0 + t - 1)}{m_0 + t_i - 1} \right]^m + m < k \right] \quad (3.15)$$

podemos escrever a equação acima em termos da função exponencial, logo

$$P[k_i(t) < k] = P \left[t_i > (m_0 + t - 1) \exp \left(1 - \frac{k}{m} \right) - m_0 + 1 \right]. \quad (3.16)$$

Notemos que a função densidade de probabilidade é constante, pois adicionamos os nós, na rede, em intervalos de tempos iguais

$$P(t_i) = \frac{1}{m_0 + 1}. \quad (3.17)$$

Substituindo esta na equação (3.16), teremos

$$P\left[t_i > (m_0 + t - 1)\exp\left(1 - \frac{k}{m}\right) - m_0 + 1\right] = 1 - \frac{(m_0 + t - 1)\exp(1 - k/m) - m_0 + 1}{m_0 + 1} \quad (3.18)$$

onde a distribuição de conectividade pode ser obtida como

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{\exp(1 - k/m)}{m} \frac{(m_0 + t - 1)}{m_0 + t}. \quad (3.19)$$

No limite de tempos longos, isto é, $t \rightarrow \infty$, a distribuição é dada pela equação abaixo

$$P(k) = \frac{e}{m} \exp\left(-\frac{k}{m}\right). \quad (3.20)$$

O caráter exponencial da distribuição de conectividade para o modelo de rede descrito aqui, indica que a ausência do mecanismo de ligação preferencial elimina a característica de escala livre, vista no modelo de Barabási-Albert.

Um segundo modelo, é imaginado com base na hipótese de a rede não crescer (o número de sítios não é alterado com o passar do tempo). No entanto, manteremos “vivo” o requisito da ligação preferencial. Apoiado nessa hipótese, começamos com uma rede contendo N sítios isolados (sem existir nenhuma ligação entre eles). A cada passo de tempo um nó é escolhido aleatoriamente e conectado com probabilidade $\Pi(k_i) = k_i / \sum_j k_j$ a outro nó i da rede. Simulações numéricas feitas por Barabási e Albert [2, 32, 49] revelaram que no início da simulação, o modelo apresenta escala em lei de potência (ver figura 3.3), mas depois muda para outro regime.

Como N é constante e o número de arestas aumenta no decorrer do tempo, teremos após $t \simeq N^2$ passos de tempos a rede num estado onde todos os nós estão conectados entre si. A evolução temporal da conectividade dos sítios pode ser calculada usando a teoria contínua, resultando em

$$k_i(t) \simeq \frac{2}{N}t \quad (3.21)$$

para $N \gg 1$. Observando o gráfico da figura (3.3), percebemos que, depois de um certo

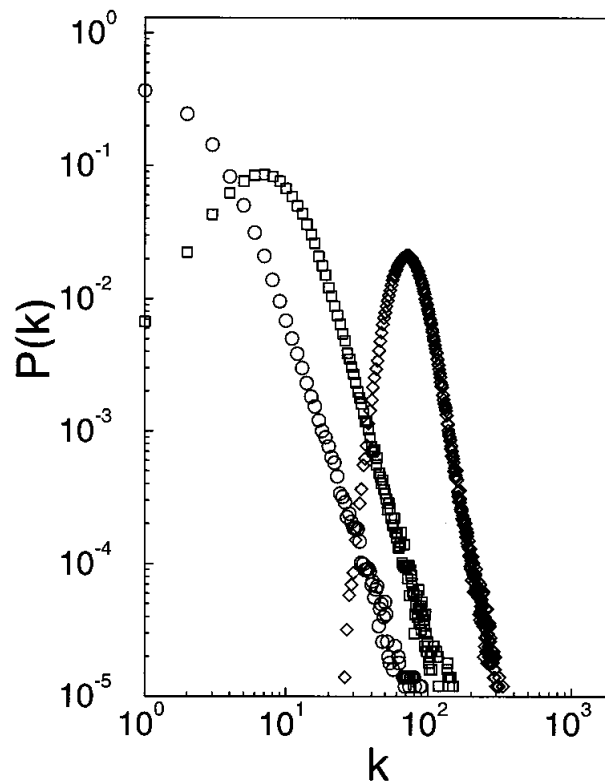


Figura 3.3: A distribuição de conectividade muda da lei de potência inicial para uma Gaussiana. $N = 10000$. Legenda: círculos ($t = N$), quadrados ($t = 5N$) e diamantes ($t = 40N$). Figura proveniente da ref. [49].

tempo, a conectividade média de todos os sítios tem o mesmo valor, dado pela equação (3.21). Assim, a distribuição de conectividade torna-se uma Gaussiana em torno desse valor médio.

Para cada um dos modelos, tratados aqui nessa seção, observamos que a distribuição de conectividade não segue uma lei de potência, logo, a liberdade de escala não é alcançada. Esse fato indica que ambos os ingredientes, *crescimento* e *ligação preferencial*, são simultaneamente necessários para se produzir uma distribuição estacionária em lei de potência, observada em muitas redes reais.

3.2 Propriedades do modelo de Barábási-Albert

Embora o modelo de Barabási-Albert apresente distribuição de conectividade com cauda em lei de potência, ele tem outras propriedades que podem ou não concordar com os resultados empíricos das redes reais. Como discutido no capítulo anterior, uma característica

marcante de algumas redes reais é a coexistência da alta agregação com o pequeno comprimento do caminho médio (efeito de mundo pequeno). Dessa forma, precisamos investigar se a rede gerada, pelo modelo de Barabási-Albert, possui o caráter de mundo pequeno.

3.2.1 Comprimento do menor caminho médio

A figura 3.4 mostra a comparação entre o comprimento do menor caminho médio da rede de Barabási-Albert com o de uma rede aleatória, em função de seus tamanhos de redes N , onde foi escolhida, para efeitos de comparação, a conectividade média, $\langle k \rangle = 4$, como sendo a mesma para ambas as redes. O gráfico indica que o comprimento do menor caminho médio da rede gerada pelo modelo de Barabási-Albert é menor que o de uma rede aleatória, qualquer que seja o tamanho de rede considerado. Esse resultado sinaliza que a topologia heterogênea das redes de escala livre é mais eficiente, na criação de proximidade entre os nós, do que a topologia homogênea das redes aleatórias. Sendo assim, a rede do modelo de Barabási-Albert é mais coesa e tem o comprimento do menor caminho médio crescendo, aproximadamente, com o logaritmo de N ,

$$l = A \ln(N - B) + C \quad (3.22)$$

fato esse que inclui o efeito de mundo pequeno na rede do modelo de Barabási-Albert.

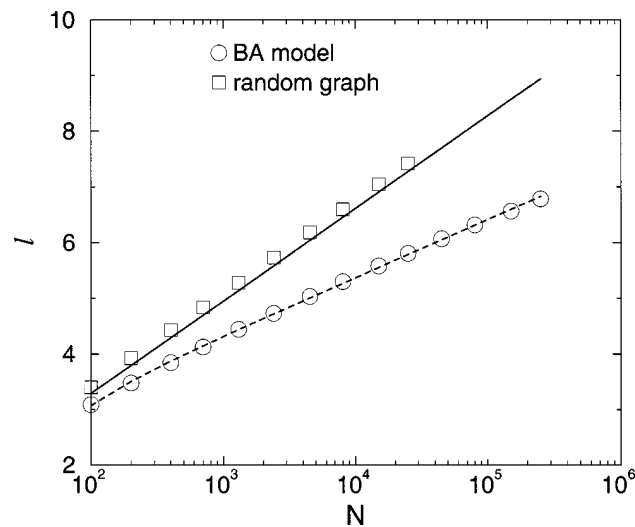


Figura 3.4: Gráfico do menor caminho médio l pelo tamanho da rede N , no modelo de Barabási-Albert com $\langle k \rangle = 4$, comparado com um grafo aleatório de igual tamanho e mesma conectividade média. Figura proveniente da ref. [2].

3.2.2 Coeficiente de Agregação

A figura 3.5 mostra o coeficiente de agregação da rede de Barabási-Albert e comparado com o de um grafo aleatório, $C_{rand} \simeq \langle k \rangle / N$, considerando diferentes tamanhos de redes N , mas mantendo-se a mesma conectividade média, isto é, $\langle k \rangle = 4$. O coeficiente de agregação da rede de escala livre é cerca de cinco vezes maior que o de um grafo aleatório. No entanto, a agregação do modelo de Barabási-Albert diminui lentamente com o tamanho da rede, seguindo uma lei de potência $C \sim N^{-0.75}$, enquanto no grafo aleatório, a agregação decai com $C \simeq \langle k \rangle N^{-1}$.

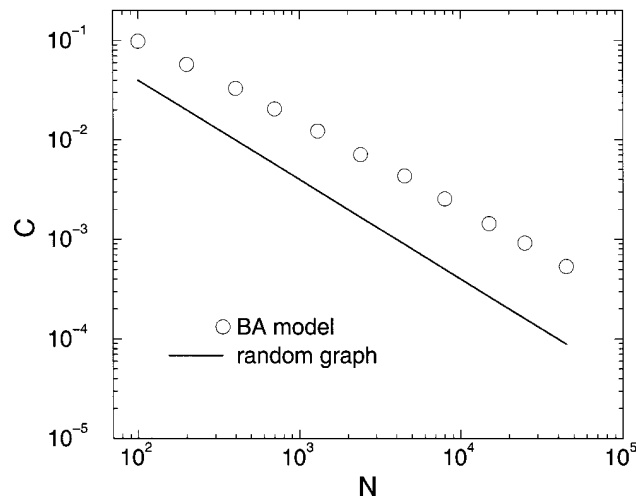


Figura 3.5: Coeficiente de agregação versus o tamanho da rede do modelo de Barabási-Albert com $\langle k \rangle = 4$, comparado com o coeficiente de agregação de um grafo aleatório, $C_{rand} \simeq \langle k \rangle / N$. Figura proveniente da ref. [2].

3.3 Modelo de Bianconi-Barabási ou Modelo de Qualidade

A complexidade de muitos sistemas pode ser atribuída ao entrelaçamento com que seus constituintes (nós da rede) interagem uns com os outros. Por exemplo, a sociedade é organizada numa rede social, cujos nós são os indivíduos e as ligações representam as várias interações sociais (amizades, trabalho, negócios, etc.), ou a WWW forma uma rede complexa cujos nós são os documentos e as ligações são as URLs. Enquanto por muito tempo

essas redes foram modeladas como sendo completamente aleatórias [14, 16], recentemente existem evidências crescentes que elas, de fato, têm um número genérico de características não-aleatórias, obedecendo diversas leis de escala [32].

Uma propriedade genérica destes sistemas complexos é que eles constantemente evoluem no tempo, através da adição e/ou remoção de nós e ligações. Conseqüentemente, o desafio aqui é, descobrir a dinâmica das “forças” que atuam em nível individual, cujo efeito cumulativo determina as características topológicas do sistema como um todo. O primeiro passo nessa direção, como já vimos, foi dado por Barabási-Albert [2, 49] com a elaboração do modelo de escala livre, o qual incorpora o fato de a evolução da rede ser governada, no mínimo, pela coexistência de dois mecanismos: crescimento, dando significado a expansão contínua da rede com a inserção de novos sítios, e ligação preferencial, indicando o fato que novos sítios ligam-se, com maior probabilidade, a nós que já têm um grande número de ligações. Com esses dois ingredientes o modelo de Barabási-Albert (modelo de escala livre) prediz o aparecimento de uma distribuição de conectividade na forma de lei de potência, a qual é observada em muitos sistemas reais [5, 6, 7, 8, 13]. No entanto, variações do modelo de Barabási-Albert, que buscam inserir aspectos mais realísticos para a evolução de redes, têm sido propostas para que as descrições feitas por estes modelos retratem, mais coerentemente, o comportamento de vários sistemas reais, ou seja, para que eles forneçam propriedades topológicas similares com as de muitas redes reais.

Apesar de prever um comportamento, para distribuição de conectividade, compatível com o que é observado em muitas redes reais, o modelo de Barabási-Albert despreza o aspecto da competitividade que se faz presente nestes sistemas: Nem todos os sítios são igualmente bem-sucedidos ao adquirir ligações. O modelo prediz que todos os sítios aumentam sua conectividade, no tempo, com $k_i(t) = (t/t_i)^\beta$, onde $\beta = 1/2$ e t_i é o tempo em que o nó i é adicionado na rede. Com isso, os nós mais velhos possuem maior conectividade, porque tiveram mais tempo para adquirir ligações e nunca serão alcançados por nós mais jovens.

Por outro lado, inúmeros exemplos indicam, convincentemente, que a taxa de crescimento da conectividade de um sítio não depende, apenas, da idade do mesmo. Por exemplo, em sistemas sociais não são todas as pessoas que fazem amigos com a mesma eficiência: alguns indivíduos são melhores que outros para tornar um encontro casual numa amizade (ligação). Na rede WWW, alguns documentos através da combinação de bons conteúdos e “marketing” forte, adquirem um grande número de ligações num curto intervalo de tempo. Conseqüentemente, eles podem alcançar, em termos do número de *links*, *websites* que já estejam no ar por muito mais tempo. Finalmente, alguns trabalhos científicos conseguem, num

pequeno intervalo de tempo, receber um grande número de citações e até mesmo ultrapassar, em termos do número de citações que recebem, um outro artigo publicado anteriormente. Em todos estes exemplos, vemos o seguinte padrão similar: alguns sítios adquirem ligações numa taxa muito maior que a de outros. Logo, se compararmos esse comportamento com o do modelo de Barabási-Albert, veremos que nesse tipo de rede haverá uma maior quantidade de pólos. Pretendemos associar essas diferenças com algumas qualidades intrínsecas dos sítios, tal como a personalidade de um indivíduo, o conteúdo apresentado por uma *webpage* ou o conteúdo de um artigo científico. No estudo de redes, esse fator representará a *qualidade do sítio* e descreverá a capacidade do sítio em competir por ligações com os outros que fazem parte da rede.

No sentido de fornecer um modelo simples que nos permite investigar, em termos quantitativos, o aspecto competitivo das redes reais, Bianconi e Barabási adicionaram na ligação preferencial um fator de qualidade η_i , para cada sítio da rede. Levando-se em consideração que a existência de uma qualidade, modifica a ligação preferencial, dos sítios, ao competir por ligações, encontraremos que sítios com diferentes qualidades terão ritmos distintos para sua evolução de conectividade. Em outras palavras, a dependência temporal da conectividade dos sítios continuará, como no modelo de Barabási-Albert, seguindo uma lei de potência ($k_i(t) \sim t^{\beta_i}$), entretanto, o expoente dinâmico β_i dependerá da qualidade do nó.

Bianconi e Barabási aplicaram, ao modelo, a teoria contínua, visando calcular β analiticamente e obter uma expressão para a distribuição de conectividade.

O modelo de Qualidade - Os exemplos discutidos na página anterior, indicam que os sítios têm diferentes habilidades (qualidades) ao competir por ligações. Para explicar estas diferenças, introduziremos o algoritmo do modelo de Bianconi-Barabási a seguir:

- (1) Inicia-se a rede com m_0 sítios, onde cada um deles possui um parâmetro de qualidade η . A qualidade é escolhida aleatoriamente respeitando uma distribuição de qualidade $\rho(\eta)$.
- (2) A cada passo de tempo é adicionado um novo sítio que já possui um parâmetro de qualidade η , escolhido a partir da distribuição de qualidade (*passo 1*). Esse novo sítio é, então, conectado com outros m ($\leq m_0$) sítios do aglomerado da rede pré-existente.

(3) A probabilidade do novo sítio se conectar com um sítio i , que já está presente na rede, é proporcional a conectividade k_i e a qualidade η_i desse sítio i , e é dada por

$$\Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}. \quad (3.23)$$

(4) Repete-se as operações (2) e (3) até o tamanho desejado. Para tempos bastante longos, $t \rightarrow \infty$, a rede terá $N = m_0 + t$ sítios e mt ligações.

Essa generalização, da ligação preferencial [32], incorpora a combinação mais simples possível que, qualidade e conectividade, juntas determinem a taxa com que novas ligações são adicionadas a um determinado sítio da rede. Assim, podemos dizer que estes fatores democratizam mais a conectividade dos sítios, uma vez que, com eles, abre-se a possibilidade de um sítio relativamente mais jovem, que possui algumas ligações, torna-se bem conectado, bastando para isso, apresentar um grande parâmetro de qualidade.

Com o desejo de discutir as propriedades de escala do modelo acima, em primeiro lugar, utilizaremos a teoria contínua que nos permite prever a distribuição de conectividade [2, 32, 49]. Os detalhes sobre a teoria contínua foram tratados na seção 3.1. Um sítio i aumentará sua conectividade k_i , numa taxa que é proporcional a probabilidade (equação 3.23) do novo sítio liga-se a ele, da seguinte forma

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \frac{\eta_i k_i}{\sum_j k_j k_j}. \quad (3.24)$$

O fator m retrata o fato que cada novo sítio, adicionado na rede, incrementa m ligações ao sistema. Um caso particular é $\rho(\eta) = \delta(\eta - 1)$, onde todas as qualidades são iguais. Substituindo essa distribuição na equação (3.24), encontra-se o modelo de Barabási-Albert, que prediz $k_i(t) \sim t^{1/2}$. Naturalmente, para resolver a equação (3.24), Bianconi e Barabási [50], assumiram que, similarmente ao modelo de escala livre, a evolução temporal da conectividade dos nós k_i , segue uma lei de potência. Entretanto, haverá multiescala no sistema, pois o expoente dinâmico dependerá da qualidade η_i , do sítio em questão, logo

$$k_{\eta_i}(t, t_0) = m \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)}, \quad (3.25)$$

onde t_0 é o tempo em que o nó i foi incorporado ao sistema. Um outro aspecto, a ser observado, é que o expoente dinâmico, $\beta(\eta)$, é limitado ao intervalo $0 < \beta(\eta) < 1$, pois um sítio sempre aumenta o número de ligações no tempo ($\beta(\eta) > 0$) e sua conectividade, $k_i(t)$, não pode aumentar mais rapidamente que t ($\beta(\eta) < 1$). Agora, calcularemos a média da soma $\sum_j \eta_j k_j$. Considerando que cada nó seja “criado” num tempo diferente de t_0 , a soma sobre j pode ser escrita como uma integral em t_0

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_j \eta_j k_j \right\rangle &= \int d\eta \rho(\eta) \eta \int_1^t dt_0 k_\eta(t, t_0) \\ &= \int d\eta \rho(\eta) \eta m t^{\beta(\eta)} \int_1^t \frac{dt_0}{t_0^{\beta(\eta)}} \\ &= \int d\eta \eta \rho(\eta) m \frac{(t - t^{\beta(\eta)})}{1 - \beta(\eta)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Já que $\beta(\eta) < 1$, no limite em que $t \rightarrow \infty$, $t^{\beta(\eta)}$ pode ser desprezado quando comparado com t , dessa forma, obtemos

$$\left\langle \sum_j \eta_j k_j \right\rangle = C m t (1 + O(t^{-\epsilon})), \quad (3.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon &= (1 - \max \beta(\eta)) > 0, \\ C &= \int d\eta \rho(\eta) \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Usando a equação (3.27), e a notação $k_\eta = k_{\eta_i}(t, t_0)$, a equação dinâmica (3.24) pode ser escrita como

$$\frac{\partial k_\eta}{\partial t} = \frac{\eta k_\eta}{C t}, \quad (3.29)$$

a qual tem uma solução da forma (3.25), onde

$$\beta(\eta) = \frac{\eta}{C}, \quad (3.30)$$

confirmando, assim, a natureza auto-consistente da suposição da equação (3.25). Notemos que $\beta(\eta)$ depende de C e, logicamente, dependerá de $\rho(\eta)$. Desse modo, precisamos determi-

nar o valor de C . Na equação (3.28), substituiu-se $\beta(\eta)$ por η/C , o que resulta em

$$1 = \int_0^{\eta_{max}} d\eta \rho(\eta) \frac{1}{\frac{C}{\eta} - 1}, \quad (3.31)$$

onde η_{max} é a máxima qualidade possível no sistema. Aparentemente a equação (3.31) é uma integral com uma singularidade. Porém, como $\beta(\eta) = \eta/C < 1$ para qualquer valor de η , temos $C > \eta_{max}$, dessa forma, o limite de integração nunca atinge essa singularidade. Note que, se $\sum_j \eta_j k_j \leq \eta_{max} \sum_j k_j = 2mt\eta_{max}$, temos, usando a equação (3.27), que $C \leq 2\eta_{max}$.

Finalmente, podemos calcular a distribuição de conectividade $P(k)$, que fornece a probabilidade de um sítio ter k ligações. Se existisse um único expoente dinâmico β , a distribuição de conectividade seguiria a lei de potência $P(k) \sim k^{-\gamma}$, onde o expoente da conectividade é dado por $\gamma = 1/\beta + 1$. Entretanto, no modelo de Bianconi-Barabási, temos um espectro de valores para o expoente dinâmico $\beta(\eta)$ e, dessa forma, $P(k)$, será obtida pela média de diferentes leis de potências. Para encontrar $P(k)$, precisamos calcular a probabilidade acumulada para um certo nó, $k_\eta > k$, logo

$$\begin{aligned} P[k_\eta(t) > k] &= P\left[t_0 < t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{\eta}{C}}\right] \\ &= t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{C}{\eta}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde a distribuição de probabilidade, isto é, a probabilidade que um nó tenha k ligações, é dada pela integral,

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^{\eta_{max}} d\eta \frac{\partial P[k_\eta(t) > k]}{\partial t} \\ &\propto \int_0^{\eta_{max}} d\eta \rho(\eta) \frac{C}{\eta} \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{C}{\eta}+1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dada a distribuição de qualidade $\rho(\eta)$ [50], a teoria contínua permite-nos prever a dinâmica da rede, descrita através do expoente dinâmico $\beta(\eta)$ (equações (3.30) e (3.31)), e a topologia, caracterizada pela distribuição de conectividade $P(k)$ (3.33). Para demonstrar a validade destas previsões, a seguir calcularemos essas quantidades para dois casos: No primeiro, utilizaremos uma distribuição de qualidade que recupera o modelo de escala livre (modelo de Barabási-Albert); e no segundo, usaremos uma distribuição qualidade uniforme.

3.3.1 Modelo de Escala Livre

O Modelo de Barabási-Albert é um dos mais simples (ligação preferencial depende apenas da conectividade dos nós) e apresenta todos os sítios com a mesma qualidade (note que se $\eta_i = \text{constante}$, da equação (3.29) obtêm-se a equação dinâmica do modelo de Barabási-Albert). Dessa forma, podemos representar a distribuição de qualidade desse modelo da seguinte maneira, $\rho(\eta) = \delta(\eta - 1)$, e inserindo-a na equação (3.31), encontraremos $C = 2$, que indicará o maior valor possível para C . Usando a equação (3.30), obtemos $\beta = 1/2$ e da equação (3.33), chegamos a $P(k) \sim k^{-3}$; a bem conhecida relação do modelo de escala livre que foi tratada na seção (3.1). Podemos notar, que o modelo de Barabási-Albert representa um caso limite do modelo de qualidade considerado na seção anterior [50], com o expoente da conectividade possuindo o maior valor possível.

3.3.2 Distribuição de qualidade uniforme

É mais interessante analisarmos o comportamento de um sistema, quando neste, existem nós com diferentes qualidades competindo por ligações (modelo de Bianconi-Barabási). Para conseguir essa dinâmica, insere-se na equação (3.33) uma distribuição de qualidade uniforme. Esta é obtida quando as qualidades são escolhidas uniformemente do intervalo $[0, 1]$, ou seja, $\rho(\eta) = \text{constante}$. Com isso, é possível observar diferentes valores para o expoente dinâmico β (múltiplas escalas). A constante C pode ser determinada da equação (3.31). Fazendo uma mudança de variável apropriada, onde $y = C - \eta$ e $dy = -d\eta$, teremos

$$1 = \int_{C-1}^C dy \frac{(C-1)}{y}. \quad (3.34)$$

Essa integral fornece a seguinte expressão

$$\exp(-2/C) = 1 - 1/C, \quad (3.35)$$

a partir da qual encontra-se $C^* = 1,255$. De acordo com a equação (3.30), cada nó terá um expoente dinâmico diferente, dado por $\beta(\eta) \sim \frac{\eta}{C^*}$. Utilizando a equação (3.33), teremos

$$P(k) \propto \int_0^1 d\eta \frac{C^*}{\eta} \frac{1}{k^{1+C^*/\eta}} \sim \frac{k^{-(1+C^*)}}{\log(k)}, \quad (3.36)$$

isto é, a distribuição de conectividade segue uma lei de potência generalizada, com um logaritmo inverso.

A validade da teoria contínua, para o modelo de Bianconi-Barabási, foi verificada através de simulações numéricas. Para isso, utilizou-se uma distribuição de qualidade uniforme, onde as qualidades foram escolhidas com igual probabilidade do intervalo $[0, 1]$. O maior interesse era testar a validade da equação (3.25), já que ela previa o comportamento da evolução temporal da conectividade dos nós, com diferentes parâmetros de qualidades η .

No gráfico da figura 3.6 têm-se a constatação de que $k_i(t)$ segue uma lei de potência para todos η . Já no gráfico 3.9, vemos que o expoente de escala $\beta(\eta)$, depende de η , sendo maior para nós com maior qualidade. A equação (3.27) prevê que a soma $\langle \sum_i \eta_i k_i \rangle / mt \rightarrow C^*$ no limite, $t \rightarrow \infty$, onde C^* é dado pela equação (3.35) com $C^* = 1.255$, como indicado no gráfico 3.7. Por fim, no gráfico 3.9, vemos a concordância entre a predição da equação (3.36) e os resultados numéricos para a distribuição de conectividade $P(k)$.

O gráfico da figura 3.9 tem uma característica muito interessante quando olhamos o comportamento dos sítios à nível de ligações feitas durante a evolução da rede. Observamos neste, a existência de alguns nós que possuem uma alta conectividade (“*hubs* ou pólos”) que aparecem como uma longa linha horizontal num gráfico log-log, presente em vários sistemas reais, incluindo a rede WWW [6, 32] e a rede metabólica das células [8]. Isso indica que “super pólos” é uma característica de sistemas competitivos.

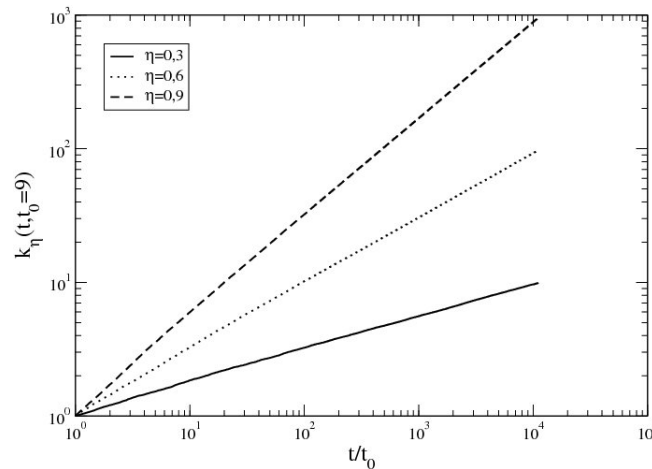


Figura 3.6: Simulação numérica para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$ mostrando a dependência temporal da conectividade $k_\eta(t)$, para sítios com qualidade $\eta = 0.3, 0.6$ e 0.9 . Note que, em cada caso, $k_\eta(t)$ segue uma lei de potência e o expoente dinâmico $\beta(\eta)$, dado pela inclinação de $k(t)$, aumenta com η . Figura proveniente da ref. [47].

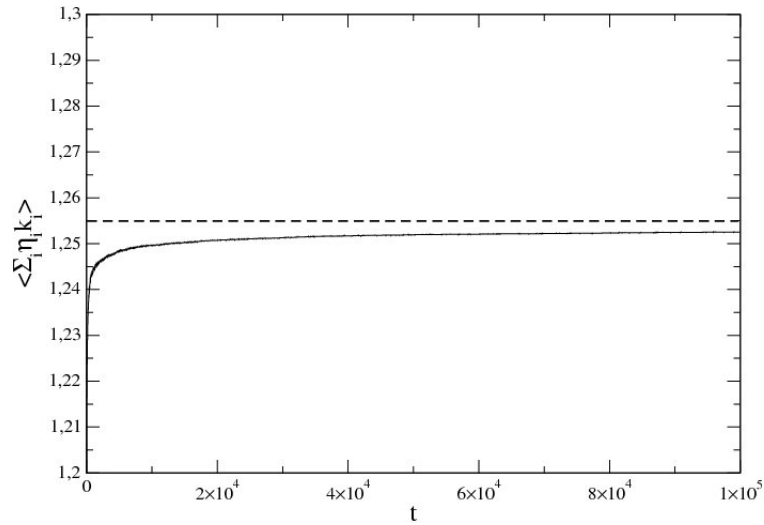


Figura 3.7: Comportamento assintótico de C com $t \rightarrow \infty$, note que há acordo com a previsão analítica, linha tracejada, (equação 3.35). Figura proveniente da ref. [47].

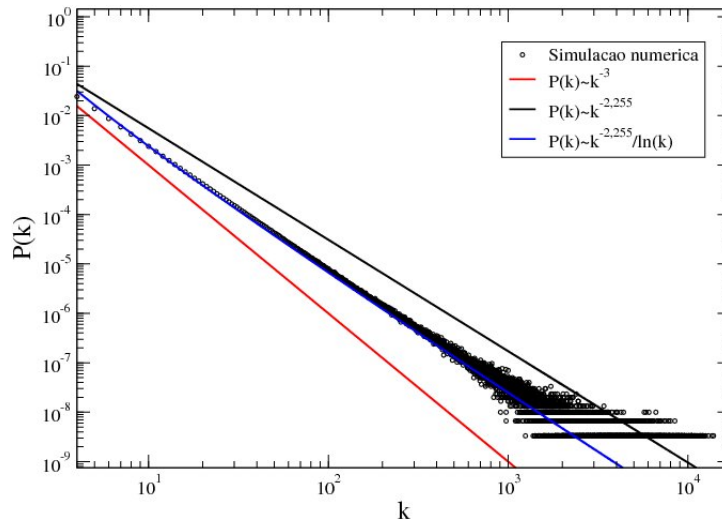


Figura 3.8: Distribuição de conectividade no modelo de qualidade, obtida para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$. Os círculos sólidos representam a simulação numérica que está de acordo com a previsão teórica dada pela equação 3.36 (linha azul), com $\gamma = 2,255$. A linha preta representa um ajuste com $P(k) \sim k^{-2,255}$ sem a correção logarítmica. A linha vermelha corresponde a $P(k) \sim k^{-3}$ como prever o modelo de escala livre, onde todas as qualidades são iguais. Figura proveniente da ref. [47].

Observando o fato de que em muitos sistemas físicos, seus entes apresentam uma diversidade de qualidade, onde uns são mais qualificados que outros, Gabriel et al [47, 48] propuseram a inserção de uma distribuição de qualidade em lei de potência, da forma $\rho(\eta) \sim \eta^\alpha$, na equação (3.36) com o intuito de obter um modelo generalizado, capaz de recuperar tanto o modelo de Barabási-Albert (quando $\alpha \rightarrow \infty$) quanto o de Bianconi-Barabási (com $\alpha = 0$). Além disso, com este modelo generalizado, pode-se conseguir inúmeros outras

situações bastando para isso variar o valor de α . A comprovação do aparecimento de vários outros modelos, vem através do comportamento da distribuição de conectividade, onde o expoente da lei de potência toma valores suavemente diferentes, à medida que α cresce (de zero em diante). Para maiores detalhes sobre o modelo, consulte as referências [47, 48].

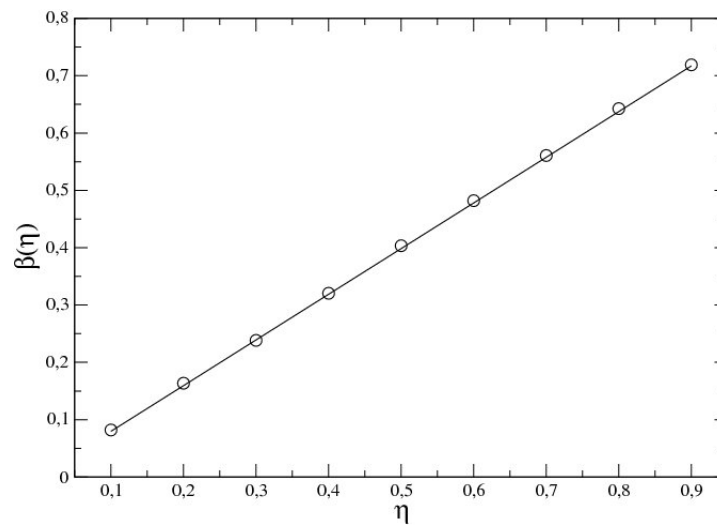


Figura 3.9: Dependência do expoente dinâmico $\beta(\eta)$ com o parâmetro da qualidade η para o caso de uma distribuição uniforme, $\rho(\eta) = \text{constante}$. Os círculos representam o resultado obtido por simulação numérica, enquanto a linha corresponde a predição analítica $\beta(\eta) = \eta/1,255$. Figura proveniente da ref. [47].

CAPÍTULO 4

Modelo de afinidade

Chegamos ao capítulo que tratará de minha contribuição ao estudo de redes complexas. Para isso, contamos com a elaboração e descrição de um modelo que gera redes de escala livre baseado na semelhança que existe entre as qualidades dos sítios da rede.

Não é difícil imaginarmos, no mundo real, sistemas que exibem comportamento similar ao relatado acima, uma vez que é provável, por exemplo, observarmos que as pessoas relacionam-se, mais facilmente, se entre elas existir uma certa semelhança em seus gostos, sentimentos, etc. É bem provável que se estabeleçam ligações (amizades) entre pessoas, por exemplo, que são fiéis de uma mesma religião, que estudam numa mesma escola ou entre pessoas de uma mesma profissão, entre outros. Assim, também, é bastante satisfatório imaginarmos que pessoas que torcem por um mesmo clube de futebol, ainda que inicialmente não se conheçam, possam ser amigos mediante essa paixão comum pelo clube. Notavelmente, isso também pode ocorrer com pessoas que são fãs de um mesmo cantor ou grupo musical.

Bem, podemos pensar em diversas outras situações que seguem esse padrão. Mas, o que se deve observar, em todos os casos citados acima, é que existe algo em comum entre as pessoas e que esse algo comum tem bastante chance de ser o responsável direto por um possível relacionamento social, (amizade, negócios, etc.) que posteriormente, possa ser desenvolvido entre as pessoas. Logo, nessas situações, é coerente supormos que a aproximação entre as pessoas se dê amparada por alguma qualidade que ambas supõem ter encontrado uma na

outra. Esse vínculo “abstrato” que faz os entes interagirem é o que chamaremos, daqui por diante, de afinidade entre os nós.

Na tentativa de descrevermos situações mais adequadas com o que é abordado aqui, lembremos que na química, em particular, quando se estuda dissolução de uma substância em outra, costuma-se usar uma regra, aparentemente simples, mas que causa o efeito desejado que é o de identificar que substâncias podem ser dissolvidas umas nas outras. A dita regra, mencionada há pouco, tem o seguinte enunciado: semelhante dissolve semelhante. Pois bem, o que quero com isso? Quero apenas chamar à atenção, para o caso do modelo trabalhado aqui nessa dissertação, em que a conexão é favorecida por uma regra de ligação preferencial que, de certa forma, explora a ideia da semelhança entre os constituintes da rede.

A semelhança observada aqui se dá na qualidade que possuem os nós da rede. Logo, podemos dizer que quanto mais próximas são as qualidades de dois sítios quaisquer, e portanto, quanto mais semelhanças guardarem entre si, mais provavelmente terão chances de estabelecerem conexões. Essa dinâmica é contemplada pela regra de ligação preferencial que, além disso, também levará em consideração a conectividade dos potenciais candidatos (sítios que já fazem parte da rede) em receber ligações.

É importante esclarecer, que nosso modelo não está interessado, por exemplo, em usar um certo valor limite, dado em função da diferença entre as qualidades dos nós, a partir do qual a ligação se estabelece ou não [51]. A intenção é proporcionar maiores probabilidades de ligações para sítios que guardam, entre si, maiores afinidades. E para tanto, estes terão, assim, que apresentarem qualidades muito próximas umas das outras ou até mesmo iguais, para que o módulo da diferença, das qualidades dos sítios, seja pequeno implicando numa maior afinidade entre eles.

Nesse momento, é oportuno explicarmos o que chamamos de afinidade entre os sítios da rede. Bom, em primeiro lugar, dizemos que a afinidade resulta de uma mudança da regra de ligação preferencial do modelo Bianconi-Barabási. Segundo, a afinidade é dada em termos do módulo da diferença existente entre as qualidades dos sítios, ou seja, $|\eta_i - \eta_j|$, com η_j representando a qualidade do sítio que está chegando na rede e η_i designando as qualidades dos sítios que já existem nela.

Tendo em vista as ideias que cercam o modelo de afinidade, insere-se o algoritmo abaixo, que gera a rede:

- (1) Começamos com a rede contendo m_0 sítios (m_0 é muito pequeno quando com-

parado a quantidade final de sítios N), onde cada um deles possui um parâmetro de qualidade η . A qualidade é escolhida aleatoriamente de uma distribuição de qualidade uniforme, isto é, $\rho(\eta) = \text{constante}$ no intervalo $[0,1]$.

(2) A cada passo de tempo é adicionado um novo sítio com o seu parâmetro de qualidade η , escolhido a partir da distribuição de qualidade (*passo 1*). Esse novo sítio é, então, conectado com m ($\leq m_0$) sítios do aglomerado da rede pré-existente.

(3) A probabilidade do novo sítio se conectar com um sítio i , que já está presente na rede, depende da conectividade dele k_i e da afinidade entre o novo sítio e o sítio i da rede, e é dada por

$$\Pi_i = \frac{\{1 - |\eta_i - \eta_j|\}k_i}{\sum_i \{1 - |\eta_i - \eta_j|\}k_i} \quad (4.1)$$

(4) Repetimos os passos (2) e (3) até o tamanho de rede desejado. Para tempos bastante longos, $t \rightarrow \infty$, a rede terá $N = m_0 + t$ sítios e mt ligações.

As simulações numéricas feitas a partir da equação (4.1) nos dão informações sobre a topologia e também sobre a dinâmica da rede gerada pelo modelo de afinidade.

As informações topológicas da rede, gerada pelo modelo de afinidade, são obtidas pelas seguintes propriedades: Distribuição de conectividade, menor caminho médio e coeficiente de agregação. A distribuição de conectividade nos informa a respeito de como são as conexões dos sítios, dizendo, por exemplo, qual é a probabilidade de um dado sítio i ter k ligações com outros sítios da rede.

A distribuição de conectividade da rede, gerada pelo modelo de afinidade, evidenciou, através de simulações numéricas, que o expoente da lei de potência que a descreve tem valor de 2.84 (ver gráfico 4.1). Portanto, valor maior que o do modelo de Bianconi-Barabási e menor que o de Barábasi-Albert. A diferença entre os valores pode ser compreendida se pensarmos em termos dos sítios mais conectados em cada uma dessas redes. Primeiro, trataremos o caso da rede, obtida pelo modelo de Bianconi-Barabási, onde os sítios com potenciais para tornarem-se pólos (*hubs*) são aqueles que incorporam-se a rede logo nos primeiros estágios de seu desenvolvimento e apresentam um alto parâmetro de qualidade. Como, possivelmente, existem alguns sítios nesta condição, na rede de Bianconi-Barabási, eles são, então, os responsáveis por tornarem o expoente da lei de potência, que descreve a

distribuição de conectividade, menor que o da rede de Barabási-Albert e, conseqüentemente, menor que o da rede do modelo de afinidade. Tal fato (expoente γ menor) traduz que os pólos, na rede de Bianconi-Barabási, são frutos de uma maior democratização quando a comparamos com a rede de Barabási-Albert, onde lá, os pólos são apenas os sítios que nasceram logo no início do desenvolvimento da rede. Sendo, na rede de Barabási-Albert, a idade dos sítios o único fator que determina os pólos (*hubs*).

Já na rede do modelo de afinidade, a explicação para o valor apresentado pelo expoente da lei de potência, que descreve a distribuição de conectividade, está relacionada com sua dinâmica, que será enfatizada posteriormente. Lembremos, aqui, que as qualidades dos sítios são extraídas de uma distribuição de qualidade uniforme no intervalo entre $[0, 1]$, onde cada uma delas tem, digamos, as mesmas chances de serem obtidas. Dito isso, observe que, no caso de se fazer um sorteio aleatório, como o que é feito aqui, para obtermos as qualidades, teremos que uma maior quantidade destes valores sairá da região intermediária do intervalo $[0, 1]$.

Com isso, imagine a possibilidade de logo no início do desenvolvimento da rede um destes sítios portar um parâmetro de qualidade com valor de dentro dessa região intermediária. Logo, acontecerá que ao longo da evolução da rede, sítios nestas condições são os prováveis pólos da rede, haja vista que apresentam afinidade tanto com sítios que têm qualidades acima desse valor como também com os que têm qualidades abaixo desse valor. Tal fato acontece, em virtude da “simetria” empregada, na rede, pela regra de ligação preferencial, uma vez que o módulo da diferença das qualidades, isto é, o que chamamos de afinidade, é o mesmo para ambos os sítios e aí o que pode decidir onde a ligação realmente vai ocorrer pode ser a conectividade dos sítios.

Tomemos, como exemplo, o caso de um dado sítio, que já faz parte da rede, e que porte um parâmetro de qualidade, da já mencionada região intermediária, próximo de 0.5. Agora, suponha a inserção, na rede, de um novo sítio e em seguida de um outro, respectivamente, com parâmetros de qualidades iguais a 0.3 e 0.7. Daqui, observa-se que o dado sítio da rede terá a mesma afinidade com esses dois outros que incorporam-se a ela (rede) e caso esse sítio apresente uma conectividade razoável, certamente, terá boas chances de receber as ligações dos novos sítios e, além disso, ao longo da evolução da rede, pode torna-se um pólo da rede (*hub*). Isto posto, devemos ter o cuidado para não atribuímos o peso de um sítio vir a tornar-se um polo só por força de sua afinidade com os demais. É necessário termos em mente que a conectividade também influenciará nesse quesito.

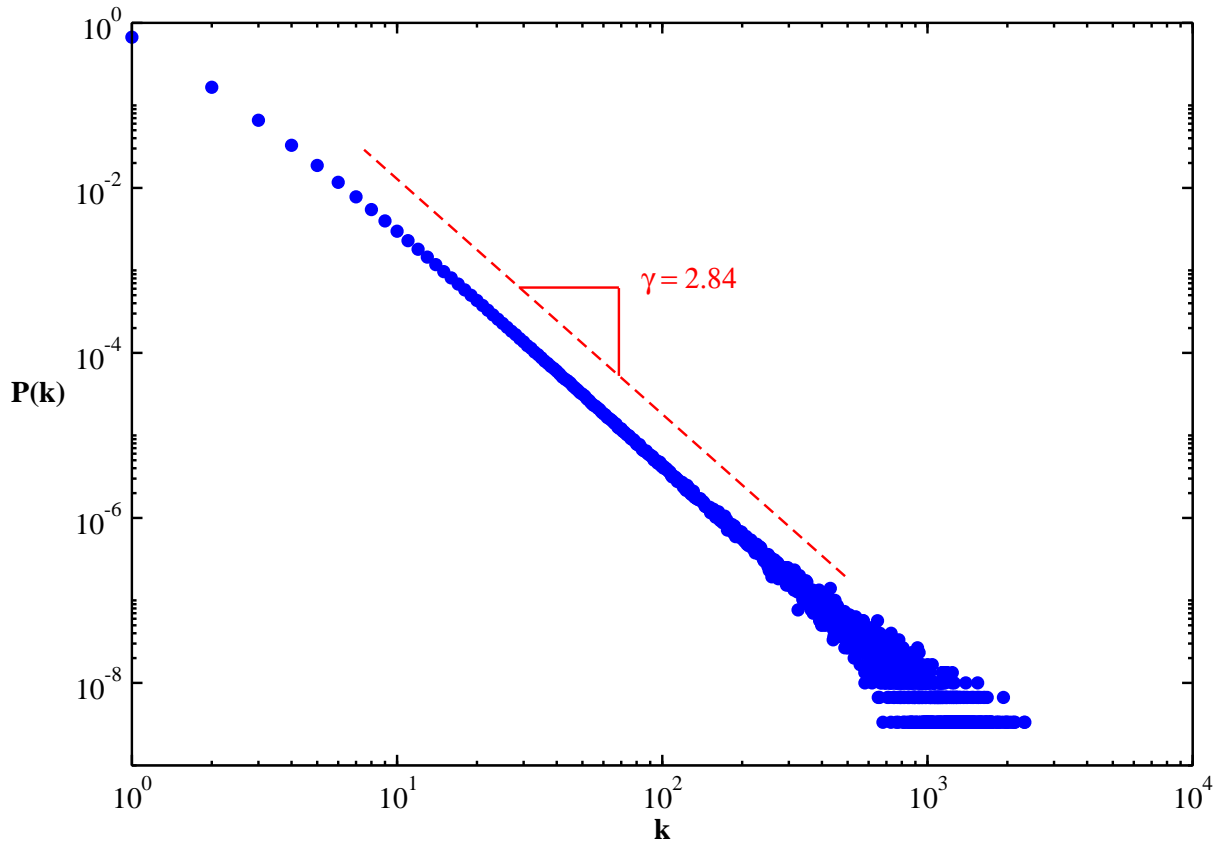


Figura 4.1: Resultado da simulação numérica para a distribuição de conectividade do modelo de afinidade, para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$, em escala log-log.

Depois de colocada a justificativa para o valor do expoente da lei de potência que descreve a distribuição de conectividade da rede gerada pelo modelo de afinidade, voltemos, agora, à atenção, para o entendimento da dinâmica envolvida na rede do referido modelo.

A dinâmica resultante, da rede gerada pelo modelo de afinidade, tem como variáveis relevantes a semelhança (ou até a igualdade) dos parâmetros de qualidades, ou seja, a afinidade e a conectividade dos sítios.

Um resultado bastante interessante é visto no gráfico 4.2. Ele mostra, em primeiro lugar, que a evolução temporal da conectividade dos sítios k_i , segue uma lei de potência, isto é, $k_i \propto (\frac{t}{t_0})^\beta$, onde o expoente β , que indica a taxa com que os sítios conseguem ligações,

certamente, tem uma dependência na afinidade entre o sítio que chega na rede e aqueles que já fazem parte dela. Segundo, evidenciou-se que os sítios com parâmetros de qualidades da região mais intermediária do intervalo $[0,1]$ são os potenciais candidatos a tornarem-se os sítios mais conectados (pólos) da rede. A ocorrência de tal fato é explicada pela seguinte situação: As qualidades dos sítios são obtidas de uma distribuição uniforme dentro do intervalo $[0,1]$, pois bem, com isso, todos os valores de qualidades são, digamos, extraídos

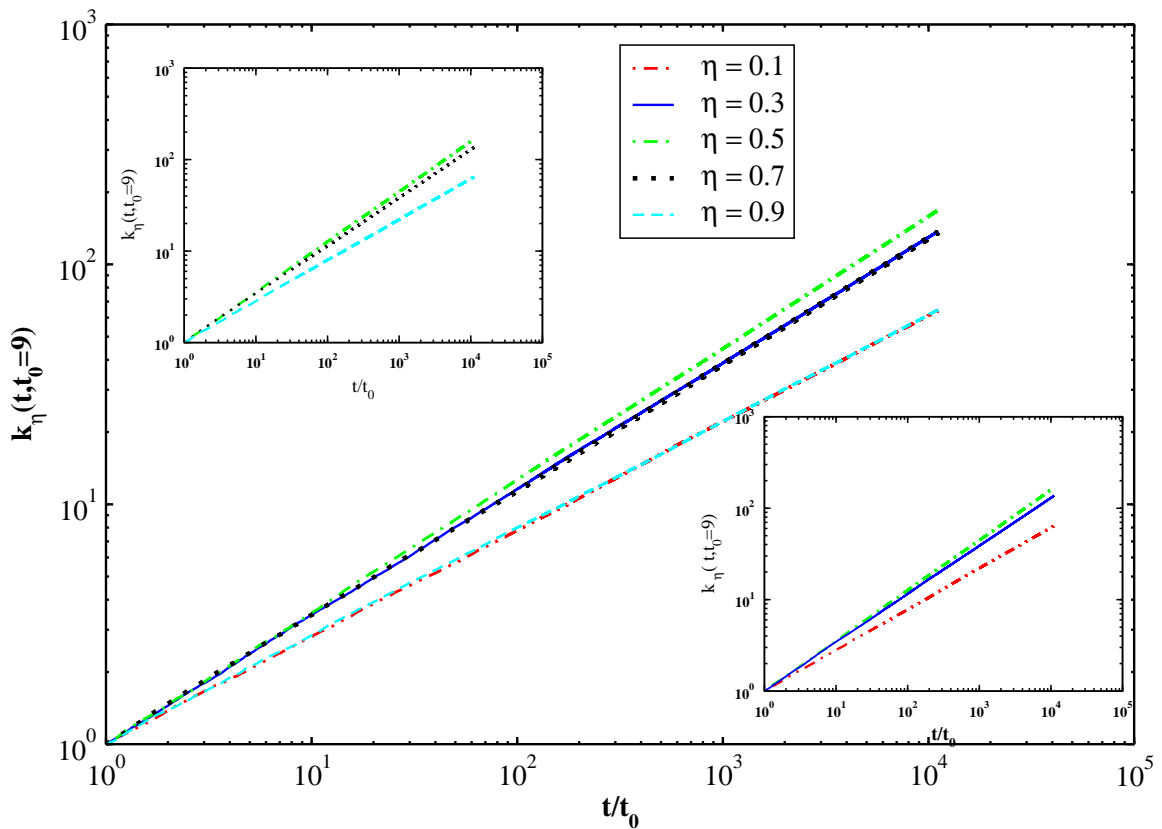


Figura 4.2: Resultado da simulação numérica do modelo de afinidade com distribuição de qualidade uniforme (rede com $N = 10^5$ e $m = 1$). Observamos que a evolução da conectividade segue uma lei de potência no tempo e que a inclinação dos gráficos (expoente da lei de potência) cresce até o sítio apresentar um parâmetro de qualidade igual a 0.5. A partir daí, ou seja, para sítios com qualidades superiores a 0.5, temos o expoente decrescendo e, além disso, seus valores são, aproximadamente, iguais aos dos sítios com qualidades abaixo de 0.5. Os gráficos internos nos ajudam a observar isso.

com a mesma chance (probabilidade) e como têm-se uma maior quantidade destes valores na região intermediária, certamente, eles tendem, no caso de se fazer um sorteio aleatório

para obtermos as qualidades, aparecerem mais vezes que aqueles que estão localizados nos extremos do intervalo.

A dinâmica descrita acima pode ser ratificada mediante observação dos gráficos 4.2 e 4.3, onde, nestes, estão representadas, respectivamente, a evolução temporal da conectividade e o expoente dinâmico dos sítios.

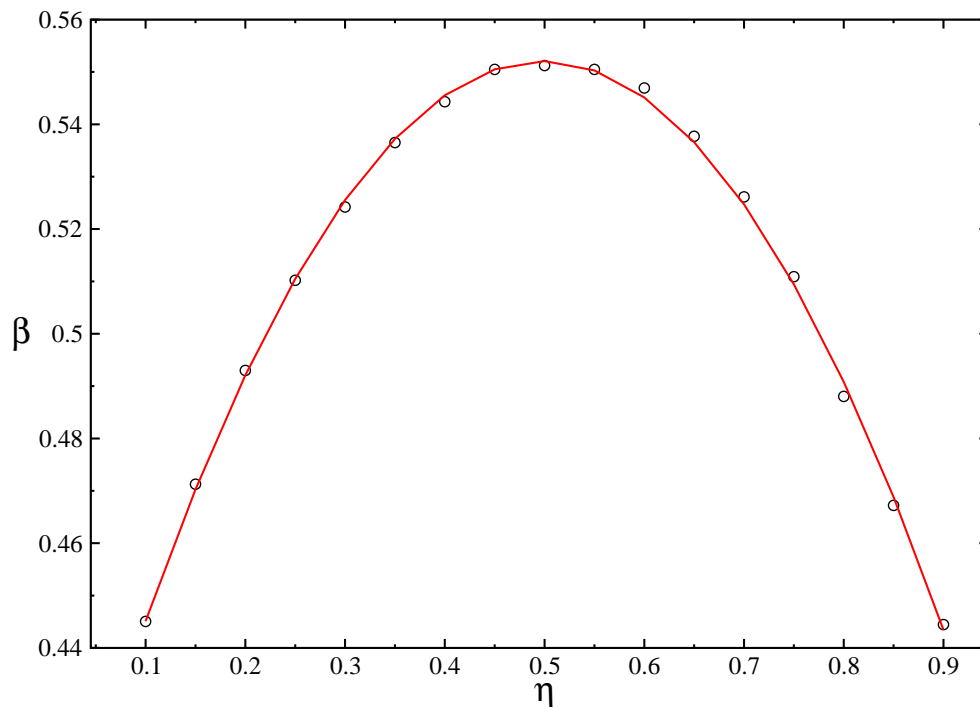


Figura 4.3: Simulação numérica para uma rede com $m = 1$ e $N = 10^5$, mostrando a relação entre o expoente dinâmico β , versus os parâmetros de qualidades η . O gráfico explicita que sítios com qualidades de dentro da região intermediária são os que mais conseguem ligações ao longo do crescimento da rede.

Como vimos nos capítulos introdutórios, o menor caminho médio e o coeficiente de agregação estão relacionados com a conectividade dos sítios e, conseqüentemente, com a distribuição de conectividade.

O menor caminho médio, como já mencionado anteriormente, nos informa a respeito da distância entre pares de sítios quaisquer da rede. Do gráfico 4.4, vemos o comportamento de mundo pequeno, apresentado pela rede do modelo de afinidade, o que se traduz em virtude do menor caminho crescer com $\log(N)$. Um outro ponto a ser observado é que o modelo de

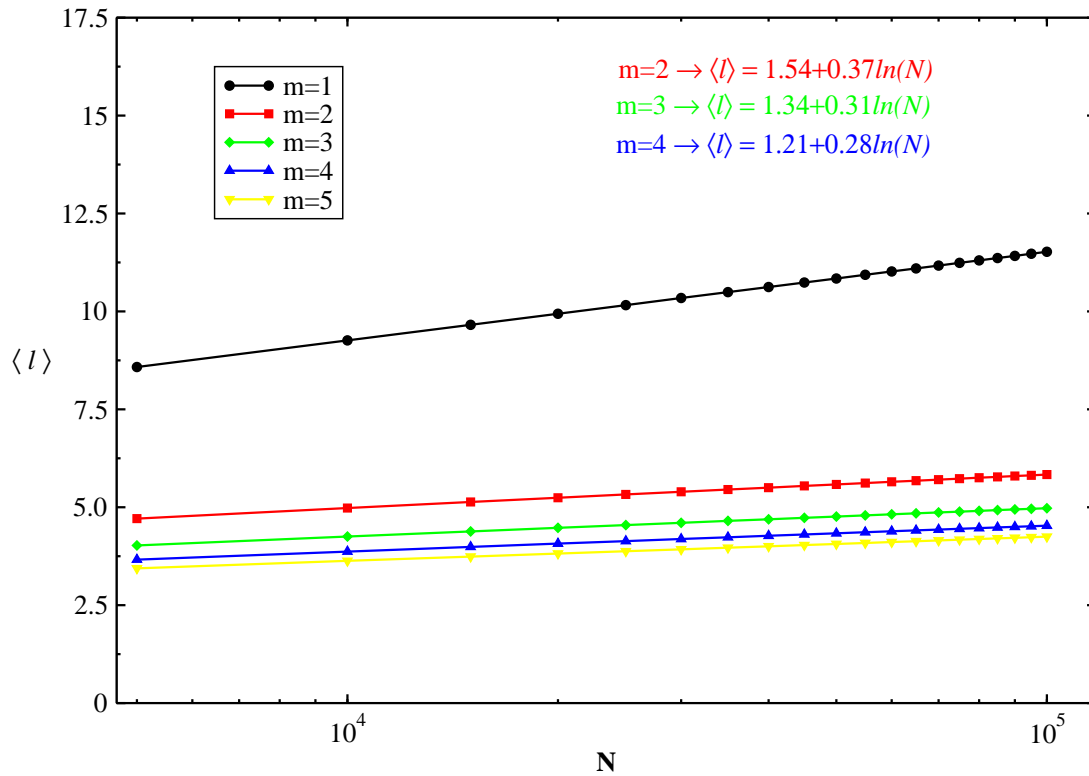


Figura 4.4: Resultado da simulação numérica do modelo de afinidade com distribuição de qualidade uniforme. Menor caminho médio versus o tamanho da rede num gráfico linear-log para diferentes valores de m como indicado na legenda acima.

afinidade tem um menor caminho médio maior que o do modelo de Bianconi-Barabási, quando se considera, é claro, o mesmo tamanho de rede para ambos (redes comparáveis). Podemos entender esse resultado da seguinte forma: lembremos que o modelo de qualidade (Bianconi-Barabási) apresenta super-pólos, isto é, sítios bastante conectados. Já no modelo de afinidade, os pólos são menos conectados quando comparados aos do modelo de qualidade. Disso resulta que, como os pólos são os responsáveis por diminuir a distância entre os nós, os pólos da rede do modelo de qualidade, certamente, ligam-se a uma fração bastante significativa dos sítios que compõem sua rede e, a ocorrência desse fato, seguramente, contribui para encurtar o caminho médio da rede. Por outro lado, os pólos da rede do modelo de afinidade, conectam-se a menos sítios e, com isso, a rede tem um caminho médio maior.

Da descrição anterior, podemos dizer que o menor caminho médio é uma quantidade extremamente importante para vários sistemas naturais ou tecnológicos, principalmente do ponto de vista do transporte de informações na rede. Por exemplo, se a distância entre os sítios apresenta um tamanho típico, certamente, a informação será melhor distribuída numa rede que exhibe pólos cada vez mais conectados.

Outro aspecto, sobre o menor caminho médio, está relacionado ao número de conexões m , que o novo sítio estabelece com os que já estão presentes na rede. Do gráfico 4.4, claramente, vê-se que o menor caminho médio diminui à medida que o valor de m aumenta. A ocorrência disso se dá, fundamentalmente, em função de que, com o aumento de m surgem mais caminhos alternativos para se ligar, por exemplo, dois sítios quaisquer e, com isso, se reduz a distância média.

Por último e não menos importante, fizemos o estudo do coeficiente de agregação, o qual nos informa como se dá a aglomeração na rede. Além disso, ele mostra o provável nível de interação entre os primeiros vizinhos de um dado sítio. Dessa maneira, tomado do ponto de vista global da rede, o coeficiente de agregação representa a probabilidade de existência de ligações entre os primeiros vizinhos de um determinado sítio que se escolhe aleatoriamente.

Pode-se notar, do gráfico 4.5, que o coeficiente de agregação da rede do modelo de afinidade diminui lentamente com o aumento do tamanho da rede, seguindo uma lei de potência $\bar{C} \sim N^{-0.746(2)}$. Isso nos informa que à medida que a rede cresce, as chances de encontrarmos um sítio que tenha seus primeiros vizinhos totalmente conectados entre si, diminui significativamente, claro, respeitando-se o valor de m considerado para o crescimento da rede.

Outro fato observado, é que ao aumentarmos o número de ligações m , adicionadas a cada passo de tempo, aumentamos, também, o valor deste coeficiente como podemos ver no gráfico 4.5. Isso ocorre porque à medida que mais conexões são permitidas, para os sítios da rede, maiores também serão as chances dos vizinhos de um dado vértice estarem ligados entre si e, conseqüentemente, tal fato faz o valor do coeficiente de agregação crescer. Vale lembrar que grafos que não possuem circuitos, têm coeficiente de agregação nulo e, devido a isso, não foram colocados dados sobre este coeficiente para redes em que $m = 1$. Reiterando mais uma vez, dizemos que, localmente o coeficiente de agregação está relacionado com o número de conexões entre os vizinhos mais próximos de um dado nó. Assim entendemos que uma rede com elevado coeficiente de agregação apresentará caminho médio pequeno.

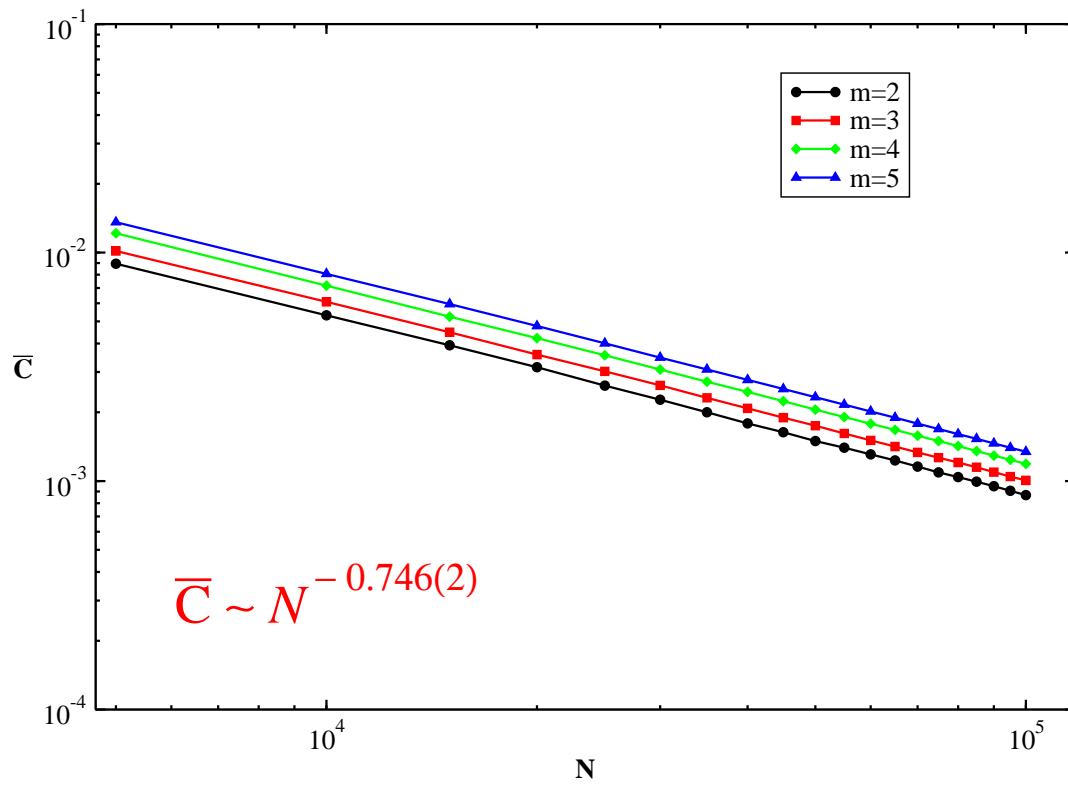


Figura 4.5: Resultado da simulação numérica do modelo de afinidade com distribuição de qualidade uniforme. Coeficiente de agregação médio versus o tamanho da rede num gráfico log-log para diferentes valores de m como indicado na legenda acima.

Conclusões e Perspectivas

Muitos são os problemas interessantes e fascinantes na natureza a serem estudados. A teoria dos sistemas complexos tem contribuído para que muitos destes problemas se tornem compreensíveis ao homem. Uma das características dos sistemas complexos é que são formados por um grande número de unidades simples, conectadas entre si (uma unidade influencia a outra), resultando num sistema macroscópico surpreendente. A evolução do sistema se torna complexa devido às várias interações entre as unidades. A complexidade surge do fato que de vizinho em vizinho emerge correlação de longo alcance. Assim, não podemos estudar partes do sistema senão o todo. Um tratamento analítico destes sistemas constitui uma dificuldade aos cientistas, devido a complexidade e a dinâmica envolvidas.

O estudo das redes constitui-se, hoje, num dos ramos mais promissores na área dos sistemas complexos. Nos capítulos iniciais estudamos os modelos clássicos de redes, com destaque para o modelo de Erdős-Rényi e, posteriormente, para o de Watts-Strogatz. Nestes, a distribuição de conectividade dos sítios da rede, apresenta características tipo distribuição de Poisson, ou seja, apresenta flutuações em torno de uma conectividade típica. Já nos modelos que podemos chamar de contemporâneos, as distribuições são mais gerais e podem cobrir uma série de sistemas físicos na natureza. Nestes novos modelos, a distribuição é larga e, em muitos casos, ela é do tipo lei de potência. O paradigma destes modelos é o modelo de Barabási-Albert. Devido a esta característica (cauda larga) eles são chamados de modelos de *escala livre*. No capítulo 3, discutimos o modelo de Barabási-Albert e um outro modelo

derivado dele: o modelo de Bianconi-Barabási. E, por fim, no capítulo 4, apresentamos o nosso modelo de afinidade.

Em nosso trabalho conseguimos entender parte do sistema estudado através do uso de simulações numéricas. Destas, observamos que a evolução temporal da conectividade de um dado sítio segue uma lei de potência, ou seja, $k_i \propto (\frac{t}{t_0})^\beta$, com o expoente dinâmico β , possivelmente, guardando uma dependência na semelhança entre as qualidades dos sítios. O expoente dinâmico, que indica a taxa com que os sítios adquirem ligações, evidenciou que os sítios mais eficientes, para tal empreitada, são aqueles que portam qualidades provenientes da região intermediária, do intervalo $[0,1]$, de onde os parâmetros de qualidades são obtidos. Além disso, o expoente β cresce até o sítio apresentar qualidade igual a 0.5 e, a partir daí, sítios com qualidades superiores a esse valor têm seus expoentes dinâmicos iguais aos dos sítios com qualidades abaixo de 0.5. Para melhor compreensão rever gráficos 4.2 e 4.3.

Como o modelo de afinidade tem, digamos, como base o modelo de qualidade (modelo Bianconi-Barabási), é perfeitamente natural relacionarmos, o estudo das propriedades estruturais da rede gerada por ele, com as da rede do modelo que lhe serviu de inspiração. Fizemos a descrição topológica da rede, gerada pelo modelo de afinidade, não só via valor do expoente da lei de potência, que descreve a distribuição de conectividade, mas também amparado pelo comportamento do caminho médio e do coeficiente de agregação das redes estudadas.

Constatamos que a repartição da conectividade entre os nós se dá de tal maneira que os pólos da rede são menos conectados que os pólos da rede do modelo de qualidade. Essa diferença se dá, fundamentalmente, porque os potenciais candidatos a tornarem-se pólos, na rede do modelo de qualidade, são os sítios que inserem-se nela (rede) logo no início de seu desenvolvimento e apresentam um alto parâmetro de qualidade. Já na rede do modelo de afinidade, os possíveis pólos são os sítios com parâmetros de qualidades oriundos da região intermediária do intervalo $[0,1]$ e que incorporam-se a rede, também, no início de sua evolução. Tendo isso em vista, podemos dizer que, quando pensamos na evolução das redes geradas por estes modelos, os sítios da rede do modelo de qualidade, que encontram-se na condição descrita acima, são mais eficientes para adquirir ligações, haja vista que para isto não existe, digamos, nenhuma espécie de restrição como a que ocorre com os sítios da rede do modelo de afinidade. É bom lembrarmos que, na rede do modelo de afinidade, um sítio, mesmo atendendo a condição de ser um pólo em potencial, é tanto mais eficiente para conseguir ligações se, à medida que novos sítios vão sendo inseridos na rede, estes também, apresentem parâmetros de qualidades bastante próximos ou até mesmo iguais ao dele, isto é, seu sucesso

nessa empreitada depende das semelhanças guardadas entre sua qualidade e as dos sítios que estão adentrando na rede.

Observamos, também, que a rede do modelo de afinidade apresenta a característica de mundo pequeno, pois o menor caminho médio escala-se com $\log(N)$. Além disso, é interessante notarmos que à medida que o valor de m aumenta, o caminho médio da rede diminui, em face de haver mais caminhos alternativos entre dois sítios quaisquer, e o coeficiente de agregação cresce, de modo a aumentar as chances de interações entre os vizinhos mais próximos de um dado sítio, escolhido aleatoriamente.

Outro aspecto notado no comportamento do coeficiente de agregação é que ele diminui lentamente com o aumento do tamanho da rede, seguindo uma lei de potência $\bar{C} \sim N^{-0.746(2)}$.

Como perspectivas temos a intenção de calcularmos a evolução temporal da conectividade de um sítio i qualquer da rede, através da teoria contínua, como feito tanto para o modelo de Barabási-Albert quanto para o modelo de qualidade e, com isso, reforçarmos, cada vez mais, a validade dos resultados obtidos aqui.

Em termos de propriedades topológicas, calcularemos o *betweenness* para verificarmos quão forte é a presença de estruturas tipo comunidades na rede do modelo de afinidade, já que, intuitivamente, acreditamos que existam, na rede, esse tipo de formação, dado que as situações a que o modelo propõem-se descrever estarem associadas a organizações dessa natureza.

Outro trabalho que podemos fazer, no futuro, é verificar a robustez, da rede gerada pelo modelo de afinidade, à ataques, sejam eles, dirigidos ou aleatórios. Também objetivamos estudar outros modelos, em particular, um que propõem a inserção de um peso associado a ligação que conecta os sítios.

A possibilidade de elaborarmos um modelo que insira um peso para a ligação que conecta os sítios da rede, pode tomar como base a relação de amizade entre as pessoas, as relações de negócios de uma empresa, as distâncias das rotas aéreas, etc. Nestes casos, o peso da ligação servirá para quantificar, por exemplo, o quão forte é a amizade entre duas pessoas, os valores financeiros dos negócios da empresa e as distâncias entre os aeroportos e, dessa forma, retrataremos mais realisticamente os sistemas que são modelados pelas redes.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Gleria, R. Matsushita e S. da Silva, *Revista Brasileira do Ensino de Física* **26**, n. 2, pp. 99-108, (2004).
- [2] R. Albert and A.-L. Barábasi, Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Modern Phys.* **74** (2002), pp. 47-97.
- [3] S. Milgram , *Psychology Today*, **2**, 60 (1967).
- [4] L. Euler. Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae*, v. 8, p. 128 - 140.
- [5] R. Pastor-Satorrs, A. Vázquez and A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 258701 (2001).
- [6] R. Albert, H. Jeong and A. L. Barábasi, *Nature* **401**, 130 (1999).
- [7] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley and Y. Aberg, *Nature* **411**, 907 (2001).
- [8] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai and A. -L. Barábasi, *Nature* **407**, 651 (2000).
- [9] P. G. Lind, L. R. da Silva, J. S. Andrade Jr. and H. J. Herrmann, *Europhysics Letters* **78**, 68005 (2007).
- [10] J. S. Andrade Jr., H. J. Herrmann, R. F. S Andrade and L. R. da Silva, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 018702 (2005).

-
- [11] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy, and H. E. Stanley, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **97**, 11149 (2000).
- [12] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Evolution of networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford (2003).
- [13] S. Redner, *Eur. Phys. J. B* **23**, 267 (1998).
- [14] P. Erdős and A. Rényi, *Publ. Math.* **6** (1959)
- [15] D.J.B. Soares, *Tese de doutorado*, Departamento de Física-UFRN, (2004).
- [16] B. Bollobás, *Random Graphs* (Academic Press, New York, 1985).
- [17] A. L. Barabási, R. Albert and H. Jeong, *cond-mat 9907068*.
- [18] D. S. Watts and S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).
- [19] A. -L. Barabasi, E. Ravasz and T. Vicsek, *cond-mat 0107419*.
- [20] R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan, D. Sivakumar, A. Tomkins and E. Upfal, *Proceedings of the 19th ACM Symposium on Principles of Database Systems*, 1-10 (2000a)
- [21] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins and J. Wiener, *Comput. Netw.* **33**, 309 (2000).
- [22] M.E.J. Newman, S.H. Strogatz and D.J. Watts, *Phys. Rev. E* **64**, 026118 (2001).
- [23] L.A. Adamic and B.A. Huberman, *Science* **287**, 2115a (2000).
- [24] L.A. Adamic, *Proceedings of ECDL'99, LNCS 1696*, 443-452 (1999).
- [25] A. D. M Pennock, G. W. Flake, S. Lawrence, E. J. Glover and C. L. Giles, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99**, 5207 (2002).
- [26] M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos, *Comp. Commun. Rev.* **29**, 251 (1999).
- [27] R. Govindan and H. Tangmunarunkit, *Proceedings of the 2000 IEEE INFOCOM Conference*, 1371-1380 (2000)
- [28] C. Tsallis and M.P. de Albuquerque, *Eur. Phys. J. B* **13**, 777 (2000).
- [29] P.L Krapivsky, S. Redner and F. Leyvraz, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4629 (2000).

- [30] P. G. Lind, L. R. da Silva, J. S. Andrade Jr. and H. J. Herrmann, *Physical Review E* **74**, 036117 (2007).
- [31] A. Vázquez, Statistics of citation networks, *cond-mat/0105031* (2001b).
- [32] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509-512 (1999).
- [33] R. Albert and A.-L. Barabási, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5234 (2000).
- [34] M.E.J. Newman, *Phys. Rev. E* **64**, 016131 (2001e).
- [35] A.-L. Barabási, H. Jeong, Z. Néda, E. Ravasz, A. Schubert and T. Vicsek, *Physica A* **311**, 590 (2002).
- [36] A. Wagner and D.A. Fell, *Proc. R. Soc. London B* **268**, 1803 (2001).
- [37] H. Jeong, S.P. Mason, A.-L. Barabási and Z.N. Oltvai, *Nature* **411**, 41 (2001).
- [38] A. Wagner, *Mol. Biol. Evol.* **18**, 1283 (2001a).
- [39] R. Ferrer i Cancho and R.V. Solé, *Proc. R. Soc. B* **268**, 2261 (2001a).
- [40] J.M. Montoya and R.V. Solé, *Working Papers of Santa Fe Institute*, 01-11-069 (2001).
- [41] S. Valverde and R.V. Solé, *Physica A* **312**, 636 (2002).
- [42] R. Ferrer i Cancho and R. Solé, *cond-mat/0111222*.
- [43] W. Aiello, F. Chung and L. Lu, *Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 171-180 (2000).
- [44] M.D. de Meneses, D.J.B. Soares, S.D. da Cunha and L.R. da Silva, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **162**, 131-137 (2006).
- [45] S. Abe and N. Suzuki, *Phys. Rev. E* **67**, 016106 (2003).
- [46] J.P.K. Doye, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 238701 (2002).
- [47] G.A. Mendes, *Dissertação de Mestrado*, Departamento de Física - UFRN, (2007).
- [48] G. A. Mendes and L. R. da Silva, *Brazilian Journal of Physics* **39**, n. 2A, pp. 423-427, (2009).
- [49] A.-L. Barabási, R. Albert and H. Jeong, *Physica A* **272**, 173 (1999).

-
- [50] G. Bianconi and A.-L. Barabási, *Europhysics Letters* **54**, 436-442, (2001).
- [51] A. Santiago and R. M. Benito, *International Journal of Modern Physics C* **18**, Nº 10, 1591-16707, (2007).
- [52] D.J.B. Soares, C. Tsallis, A.M. Mariz and L.R. da Silva, *Europhysics Letters*, **70**, 70-71 (2005).