



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANÁLISE DE CAMINHADAS DE LÉVY EM TRAJETÓRIAS CURVAS 2D

MATEUS BRUNO BARBOSA

NATAL-RN
OUTUBRO 2016

MATEUS BRUNO BARBOSA

ANÁLISE DE CAMINHADAS DE LÉVY EM
TRAJETÓRIAS CURVAS 2D

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física,
do Departamento de Física Teórica e Experimental da Univer-
sidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial
para a obtenção do título de **Doutor** em Física.*

Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Co-orientador: Prof. Dr. João Medeiros

NATAL-RN
OUTUBRO 2016

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Sistema de Bibliotecas – SISBI
Catalogação da Publicação na Fonte - Biblioteca Central Zila Mamede

Barbosa, Mateus Bruno.
Análise de caminhadas de Lévy em trajetórias curvas 2D / Mateus
Bruno Barbosa. - 2016.
109 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte,
Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós Graduação em
Física. Natal, RN, 2017.

Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan.
Coorientador: Prof. Dr. João Medeiros.

1. Física - Tese. 2. Caminhada de Lévy - Tese. 3. Método da projeção -
Tese. 4. Reescalamento - Tese I. Mohan, Madras Viswanathan Gandhi.
II. Medeiros, João. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 53

Para Pessoas Especiais:

A meus pais, Joaquim Mateus Barbosa
e Mirian da Silva Barbosa.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

À meus pais, meu irmão, minhas irmãs e minha noiva.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan, pela orientação e pelo apoio logístico e intelectual durante todo o período do doutorado.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. João Medeiros, pela co-orientação na tese.

Ao meu orientador estrangeiro, Prof. Dr. Frederic Bartumeus Ferré, pela orientação e pelo apoio logístico e intelectual durante o período de estágio no Centre D'Estudis Avançats de Blanes.

Ao Dr. Raphael Matozo Tromer, pelos debates e pela ajuda na escrita da tese.

Aos colegas do Programa de Pós Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, pelas discussões pertinentes que ajudaram na elaboração dessa tese.

Aos colegas do Centre D'Estudis Avançats de Blanes, que também contribuíram com discussões favoráveis ao crescimento intelectual.

À Capes e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"Desde toda a eternidade, Deus, pelo muito sábio e santo conselho da sua própria vontade, ordenou livre e inalterável tudo quanto acontece, porém de modo que nem Deus é o autor do pecado, nem violentada é a vontade da criatura, nem é tirada a liberdade ou a contingência das causas secundárias, antes estabelecidas."

(**Capítulo 3 - CONFISSÃO DE FÉ DE
WESTMINSTER**)

RESUMO

Um dos problemas centrais no estudo de difusão anômala e transporte é a análise adequada de dados de trajetórias (por ex: animais buscando por alimentos ou por parceiros para acasalamento). A análise e inferência de padrões de caminhadas de Lévy a partir de dados empíricos ou de trajetórias simuladas de partículas em duas ou três dimensões (2D e 3D) é muito mais difícil que em uma dimensão porque não existem trajetórias curvas em uma dimensão, mas em dimensões superiores são comuns. Ultimamente, um novo método para detecção, que considera projeções 1D de trajetórias 2D e 3D, foi proposto por Humphries *et al.* O cerne dessa proposta é explorar o fato de que a projeção 1D de uma caminhada de Lévy, numa alta dimensão, é, também, uma caminhada de Lévy. Neste trabalho, questiona-se se o método da projeção é ou não suficientemente poderoso para distinguir claramente uma caminhada de Lévy 2D com curvatura de uma simples caminhada aleatória Markoviana correlacionada. O foco do estudo no caso desafiador em que ambas as caminhadas 2D têm a *Função Densidade de Probabilidade* (FDP) de tamanho de passos exatamente idênticas, bem como dos ângulos de rotação entre passos sucessivos. A abordagem estende o método da projeção original pela introdução de um reescalonamento dos dados projetados. Após a projeção e *coarse-graining*, a FDP renormalizada para distâncias entre sucessivas rotações notou-se possuir cauda grossa quando há um processo de Lévy oculto na caminhada original. Esse efeito foi explorado para inferir um processo de caminhada de Lévy na trajetória curva original de alta dimensão. Por outro lado, não há a presença de cauda grossa quando uma caminhada aleatória correlacionada (Markoviana) é analisada. Mostrou-se que esse processo funciona muito bem na identificação de uma caminhada de Lévy, mesmo quando há ruído de curvatura. A ferramenta desenvolvida neste trabalho pode ser útil em contexto realístico envolvendo identificação de caminhadas de Lévy relacionadas a movimento animal na terra (2D) ou no ar e oceanos (3D).

PALAVRAS-CHAVE: Caminhada de Lévy, Método da Projeção, Reescalonamento.

ABSTRACT

A crucial problem in the study of anomalous diffusion and transport refers to adequate analysis of trajectory data. The analysis and inference of Lévy walk model from empirical or simulated trajectories of particles in two and three-dimensions (2D and 3D) is much more hard than in 1D because path curvature is nonexistent in 1D but pretty common in higher dimensions. Lately, a new method to detect Lévy walks, which considers 1D projections of 2D or 3D trajectory data, has been proposed by Humphries et al. The main idea of this method is to explore the fact that a 1D projection of a high-dimensional Lévy walk is itself a Lévy walk. In this work, we ask whether or not this projection method is capable enough to clearly distinguish a 2D Lévy walk with curvature from a simple Markovian correlated random walk. We focus this work in challenging case in which both 2D walks have the same probability density functions (pdf) of step sizes as well as of turning angles between successive steps. Our approach extends the original projection the original projection method by introducing a rescaling of the projected data. After a projection and coarse graining, the renormalized pdf for the travel distances between successive turnings is seen to possess a fat tail when there is an underlying Lévy process. We exploit this effect to infer a Lévy walk process in the original high-dimensional curved trajectory. In contrast, there is no fat tail when a (Markovian) is analyzed. We show that this procedure works very well in clearly identifying a Lévy walk even when there is noise from curvature. The present protocol may be useful in realistic contexts involving ongoing debates on the presence (or not) of Lévy walks related to animal movement on land (2D) and air and oceans (3D).

KEYWORDS: Lévy Walk, Projection Method, Reescalng.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico linear da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).	20
2.2	Gráfico log-linear da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).	22
2.3	Gráfico log-log da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).	24
2.4	Gráfico linear-log da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).	26
3.1	Para um caminhante aleatório que dá passos de tamanho ℓ de acordo com a função densidade de probabilidade $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, o tipo de difusão depende do valor de μ . Para $\mu > 3$, o CLT garante a convergência para a difusão normal. O limite balístico corresponde à $\mu \rightarrow 1$. Para $\mu \leq 1$, $P(\ell)$ não é normalizável. Valores intermediários, isto é, $1 < \mu < 3$ resultam em voos de Lévy superdifusivos (adaptado de [31]).	39

- 3.2 Para uma distribuição lei de potência $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ de passos ou tamanho de passos ℓ_j momentos superiores não existem. Especificamente, o momento de ordem $\mu - 1$ diverge logaritmicamente com limite superior, and todos momentos superiores divergem como alguma potência de limite superior. Momentos inferiores permanecem finitos. Momentos divergentes são uma consequência das propriedades de invariância de escala: sistemas livre de escala não tem características de escalas bem definidos.(figura retirada e adaptada de [31]). 41
- 3.3 Voos e caminhadas de Lévy para diferentes expoentes μ . Para $\mu > 3$, a variância da distribuição de ruído é finita, e assim a caminhada aleatória é difusiva com expoente de Hurst $H = 1/2$. Todavia, para $\mu < 3$, o comportamento é superdifusivo. A única diferença entre voos e caminhadas de Lévy é que os caminhantes movem-se com velocidade finita, visto pelo declive finito no gráfico espaço-tempo. Em contraste, voadores mudam-se "instantaneamente"(figura retirada e adaptada de [31]). 43
- 3.4 O expoente de Hurst, $H=H(2)$ para o comportamento do deslocamento quadrático médio no limite de muito tempo para caminhada de Lévy, como uma função do expoente μ da cauda de lei de potência $\sim \ell^{-\mu}$ na distribuição do tamanho do salto. Para $1 < \mu \leq 3$, o índice de Lévy correspondente é $\alpha = \mu - 1$. Caminhadas de Lévy são superdifusivas para $\mu < 3$, isto é, $\alpha < 2$. Para fins de comparação, o comportamento também é apresentado como voos de Lévy; entretanto, voos de Lévy, de fato, tem deslocamento quadrático médio divergente para $\alpha < 2$, não sendo possível definir $H=H(2)$. Não obstante, uma vez que, voos de Lévy são monofractais , pode-se ainda definir $H = H(q)$ para $q < \alpha$ (figura retirada e adaptada de [31]). 45
- 5.1 Trajetórias curvas bidimensionais de caminhadas aleatórias geradas usando os modelos 1 e 2, como comprimento total (a) 500 e (b) $\approx 10^5$. A **caminhada 1** representa um *CRW* não markoviano construído com a forma de uma caminhada de Lévy, enquanto a **caminhada 2** é uma caminhada markoviana com correlação de curto alcance. Ambos modelos compartilham as mesmas FDP's de tamanho de passos e de ângulos. Mas o modelo da **caminhada 1** tem ordem de longo alcance e é superdifusivo em tempos grandes, enquanto o modelo **caminhada 2** tem apenas ordem de curto alcance e é difusivo em longos períodos. 61

- 6.1 FDP conjunta nas direções x e y dos vetores comprimento de passo (ou vetores velocidade) para $\lambda = 1$ (a)(conjunto de dados originais), e dados reescalados usando (b) $\lambda = 20$ e (c) $\lambda = 100$. No conjunto de dados original (a) todos os passos são fixos e tem tamanho unitário, ou seja, $\ell_n = \ell_0 = 1$ para ambos modelos **1** (coluna esquerda) **2** (coluna direita). Como o reescalamento para maiores valores de λ são aplicados, a diferenças entre as distribuições dos modelos **1** e **2** tornam-se notáveis. A presença de grande passos no **modelo 1** é indicada pela linha densa e grossa na borda do círculo. Por outro lado, o dado reescalado do **modelo 2** é similar a uma gaussiana, com alta densidade de passos pequenos e uma probabilidade rapidamente decrescente para grandes deslocamentos. O ponto importante para ser observado é que o reescalamento ou renormalização traz a diferença entre os dois modelos. Sem o reescalamento, os modelos são visivelmente indistinguíveis, todavia após o reescalamento os modelos podem ser facilmente diferenciáveis. 65
- 6.2 O gráfico log-log da raiz quadrática média do comprimento, $\ell_{rms} = \langle \ell^2 - \langle \ell \rangle^2 \rangle^{1/2}$, dos modelos **1**(linha preta) e **2**(linha azul) com uma função do parâmetro de reescalamento λ . Aqui, ℓ são os valores dos comprimentos de passo mostrado na Fig. 6.1. No **modelo 2**, a passagem para o comportamento browniano, $\ell_{rms} \sim \lambda^H$, com $H = 0.5$, começa por volta de $\lambda \approx 50$. Abaixo desse valor é configurado um comportamento superdifusivo transiente. Em contraste, a superdifusividade do **modelo 1**, com $H > 0.5$, não mostra qualquer convergência para o regime do movimento browniano no intervalo estudado. O método do reescalamento produz, assim, os valores do expoente para os dois modelos. Os modelos são facilmente distinguidos por seus expoentes. Apenas o **modelo 1** é superdifusivo. 67
- 6.3 Evolução com número de passos t_n das coordenadas (x, y) da caminhada aleatória curva 2D mostrada na Fig. 5.1(b) geradas usando os modelos **1** e **2**: (a) conjunto de dados original (sem reescalamento, $\lambda = 1$); (b) dados reescalados usando $\lambda = 100$. A diferença entre (a) e (b) se encontra basicamente na escala temporal. As inserções mostram detalhes da correspondência entre as partes reescaladas de (a) e (b) 69

- 6.4 Histograma das distância entre os sucessivos ângulos de rotação projetados nos eixos x [(a) e (c)] e y [(b) e (d)] das séries temporais mostradas na Fig. 6.3(a) (dados não reescalados, $\lambda = 1$). (a), (b) **Modelo 1**; (c), (d) **Modelo 2**. Praticamente nenhuma diferença é observada. Essa ausência de diferença demonstra a dificuldade de distinguir os dois modelos. 71
- 6.5 Histograma das distância entre os sucessivos ângulos de rotação projetados nos eixos x [(a) e (c)] e y [(b) e (d)] das séries temporais mostradas na Fig. 6.3(b), agora reescalados, $\lambda = 100$. (a), (b) **Modelo 1**; (c), (d) **Modelo 2**. O ajuste gaussiano, mostrado na linha pontilhada, descreve razoavelmente bem o **modelo 2**, mas falha completamente nas caudas para o **modelo 1**. O reescalamento tem levado para uma notável diferença entre os modelos, quando comparado com a análise não reescalada mostrado na figura anterior. 72
- 6.6 O gráfico semilog dos histogramas exibidos na Fig. 6.5 para dados reescalados usando $\lambda = 100$, incluindo os melhores ajustes para uma FDP gaussiana mostrada nas linhas pontilhadas. (a), (b) **Modelo 1**; (c), (d) **Modelo 2**. Observe como o **modelo 1** tem caudas longas, enquanto o **modelo 2** é basicamente gaussiano. 73
- 6.7 O gráfico log-log dos histogramas exibidos nas Figs. (6.4) e (6.5) para (a) os dados originais não escalonados, isto é $\lambda = 1$ e (b) dados escalonados, com $\lambda = 100$. Os círculos pretos (quadrados azuis) descrevem os resultados para o **Modelo 1** (**Modelo 2**). É evidente a diferença entre os dois modelos no que diz respeito a cauda do gráfico, que são descritos por uma lei de potência (truncada). Esta diferença aparece apenas devido ao reescalamento. Sem utilizar esse método os modelos são indistinguíveis como mostra a Fig. 6.4. O ponto chave a salientar é que o método de projecção, juntamente com o método de reescalamento faz com que seja possível revelar que o **Modelo 1** é uma caminhada de Lévy curva. 74

Sumário

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	x
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 DIFUSÃO	1
1.2 CAMINHADAS ALEATÓRIAS E VOOS DE LÉVY	7
1.3 ESTRUTURA DA TESE	10
2 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL	13
2.1 DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA	13
2.2 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL - (TLC)	14
2.3 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL GENERALIZADO - (TLCG)	17

2.4	CASOS ESPECIAIS DA DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY ($\alpha = 1$ e $\alpha = 2$) . . .	19
2.4.1	Expansão da Distribuição de Lévy para $x \ll 1$	21
2.4.2	Expansão da Distribuição de Lévy para $x \gg 1$	23
3	CAMINHADAS ALEATÓRIAS E DIFUSÃO	27
3.1	CAMINHADA ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL	28
3.2	CAMINHADA ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL	31
3.3	DIFUSÃO	34
3.4	CAMINHADAS E VOOS DE LÉVY	38
4	O DESAFIO DA ANÁLISE DE DADOS EM TRAJETÓRIAS CURVAS	47
4.1	UM CRITÉRIO PARA O USO DA ESTRATÉGIA DE LÉVY EM BUSCAS ALEATÓRIAS	47
4.2	MÉTODO DE HUMPHRIES <i>et al</i> PARA ANÁLISE DE TRAJETÓRIA .	50
5	MODELOS TEÓRICOS	55
5.1	CAMINHADA 1 - (MODELO 1)	58
5.2	CAMINHADA 2 - (MODELO 2)	60
6	RESULTADOS	63
6.1	PROJEÇÃO UNIDIMENSIONAL	68
6.2	ANÁLISE DE HISTOGRAMAS	68

6.3	EXPOENTE DE HURST	75
7	CONCLUSÃO	77
7.1	PALAVRAS FINAIS	77
7.2	PERSPECTIVAS	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79
	APÊNDICE A	89
7.3	TRANSFORMADA DE FOURIER	89
7.3.1	Transformada Inversa de Fourier	90
7.4	MOMENTOS ESTATÍSTICOS	90
7.4.1	1° Momento (μ)	91
7.4.2	2° Momento (σ^2)	91
7.4.3	Covariância	92
7.5	FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE	92

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 DIFUSÃO

O movimento browniano foi originalmente observado na flutuação de partículas em um fluido. Esta primeira observação foi feita pelo botânico britânico Robert Brown, no movimento de pólen suspenso em um fluido, em meados do século XIX[1]. Um pouco antes, no final do século XVII, Jan Ingenhousz estudou o movimento irregular de pó de carvão suspenso em álcool [2]. Questões próximas a essa foram estudadas durante o século XVI por Jacob Bernoulli, Pierre de Fermat e Blaise Pascal. No princípio do século XX, em 1905, Albert Einstein revolucionou os estudos na área de mecânica estatística ao publicar seu artigo sobre movimento browniano, no qual estudou a difusão de uma partícula cuja trajetória é regida pelas colisões dela própria com as moléculas do fluido. O trabalho de Einstein sobre movimento browniano aborda a relação entre o coeficiente de difusão e a

viscosidade numa dedução probabilística da equação da difusão[3]. A partir dessa visão probabilística, Einstein obtém a sua conhecida equação para a distância quadrática média percorrida pela partícula no movimento browniano:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \quad (1.1)$$

onde D expressa o coeficiente de difusividade e pode ser expresso por:

$$D = \frac{RT}{3\pi N_A a \eta}, \quad (1.2)$$

onde R é a constante universal dos gases, T é a temperatura, N_A o número de avogrado, a é o raio das partículas suspensas e η é a viscosidade do fluido.

Einstein também mostra que a solução para a equação da difusão, expressa por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

onde $n = n(x, t)$ é o número de partículas por unidade de volume no instante de tempo t e posição x , é dada pela forma gaussiana

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[-\frac{x^2}{4Dt} \right]. \quad (1.4)$$

É possível fazer uma relação do problema abordado por Einstein com o problema do caminhante aleatório unidimensional, que é frequentemente discutido nos livros de física estatística[4]. Neste segundo, quando o número de passos dados pelo caminhante tende a infinito, a distribuição de passos tende a uma função gaussiana.

Outro cientista que contribuiu para o estudo da difusão foi o médico alemão Adolf Eugen Fick, que em 1855 apresentou as leis de Fick, as quais descrevem vários casos de difusão de energia ou matéria em um meio que, em princípio, não está em equilíbrio.

A primeira lei de Fick trata da corrente de difusão num estado estacionário, isto é, um fluxo de energia ou matéria de um meio mais concentrado para um menos concentrado

com intuito de homogeneizar o sistema sendo expressa da seguinte forma:

$$\vec{J} = -D\nabla n, \quad (1.5)$$

onde \vec{J} é o fluxo ou densidade de corrente, D é o coeficiente de difusão e ∇n é o gradiente de concentração.

A segunda lei de Fick descreve como a difusão causa a mudança de concentração com o tempo. Diferentemente da primeira lei, a segunda trabalha com situações não estacionárias. Ao combinar a equação da continuidade:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.6)$$

com a equação da primeira lei de Fick, obtém-se a expressão matemática para a segunda lei de Fick eq. (1.3). A análise dimensional da segunda lei de Fick[5] revela que, em processos de difusão, há uma relação fundamental entre o tempo decorrido e o quadrado do comprimento ao longo do qual a difusão ocorre.

A lei de condução térmica, também conhecida por lei de Fourier, em homenagem ao físico e matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier que estudou, entre outros temas, a condução térmica; estabelece a relação entre o fluxo de calor e o negativo do gradiente de temperatura, o qual é expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\vec{Q} = -k\nabla T, \quad (1.7)$$

onde \vec{Q} é o fluxo de calor, k a condutividade térmica e T a temperatura. Pode-se observar que a lei de Fourier é uma particularidade da primeira lei de Fick para o calor.

Já foi visto que a equação da difusão(1.3) está presente nos estudos de Einstein, Fick e Fourier. Esse comportamento de difusão e movimento de partículas também pode ser entendido por meio da Equação de Langevin e da Equação de Fokker-Planck, que serão observadas a seguir.

Paul Langevin, físico francês, foi mais um cientista que contribuiu para o avanço do conhecimento sobre movimento browniano. A equação que recebe seu nome descreve o movimento de uma partícula suspensa em um fluido, que, para o caso unidimensional,

é expressa da seguinte maneira:

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + F(t), \quad (1.8)$$

onde $v = dx/dt$ é a velocidade da partícula, x a posição dessa partícula e m é a massa da partícula imersa no fluido. O primeiro termo do lado direito da igualdade é a força viscosa e α é uma constante e $F(t)$ é uma força de caráter estocástico, de maneira que, para $t \neq t'$, $F(t)$ e $F(t')$ são independentes e possuem as seguintes propriedades:

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (1.9)$$

e

$$\langle F(t)F(t') \rangle = B\delta(t - t'). \quad (1.10)$$

A função δ aparece em conformidade com a lei de equipartição[6]. Pode-se reescrever, portanto, a equação (1.8) da seguinte forma:

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \zeta(t) \quad (1.11)$$

onde $\gamma = \alpha/m$ e $\zeta(t) = F(t)/m$. $\zeta(t)$ é chamada de ruído e possui as mesmas propriedades de $F(t)$:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad (1.12)$$

e

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \Gamma\delta(t - t'). \quad (1.13)$$

onde $\Gamma = B/m^2$.

A equação (1.11) é uma equação diferencial que possui solução geral do tipo

$v(t) = u(t)e^{-\gamma t}$. O que nos leva a

$$\frac{du(t)}{dt} = e^{\gamma t} \zeta(t), \quad (1.14)$$

cuja solução é

$$u = u_0 + \int_0^t e^{\gamma t'} \zeta(t') dt'. \quad (1.15)$$

Consequentemente,

$$v = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \zeta(t') dt', \quad (1.16)$$

onde v_0 é a velocidade da partícula no tempo $t = 0$.

Agora pode-se calcular, primeiramente $x(t)$, para, em seguida, obter o deslocamento quadrático médio da partícula.

$$x = x_0 + \int_0^t v(t') dt', \quad (1.17)$$

onde x_0 é a posição da partícula no momento $t = 0$. Aplicando a equação (1.16) na equação (1.17), obtém-se

$$x = x_0 + v_0 \int_0^t e^{-\gamma t'} dt' + \int_0^t e^{-\gamma t'} \int_0^{t'} \zeta(t'') e^{\gamma t''} dt'' dt'. \quad (1.18)$$

Resolvendo a primeira integral e invertendo a ordem das integrais da última componente obtém-se

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \int_0^t \zeta(t'') e^{\gamma t''} \int_{t''}^t e^{-\gamma t'} dt' dt''. \quad (1.19)$$

Ao integrar em t' , obtém-se:

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t \zeta(t'') (1 - e^{\gamma(t''-t)}) dt''. \quad (1.20)$$

Uma vez que esta equação é válida para qualquer função temporal $\zeta(t)$, pode-se aplicar a

propriedade (1.12) e obter o deslocamento médio da partícula:

$$\langle x \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \quad (1.21)$$

Com isso, tem-se que:

$$x - \langle x \rangle = \frac{1}{\gamma} \int_0^t \zeta(t'')(1 - e^{\gamma(t''-t)}) dt'' \quad (1.22)$$

De onde se obtém

$$(x - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^t \int_0^t \zeta(t') \zeta(t'')(1 - e^{\gamma(t'-t)})(1 - e^{\gamma(t''-t)}) dt' dt'', \quad (1.23)$$

aplicando a propriedade (1.13), chega-se a

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \int_0^t (1 - e^{\gamma(t'-t)}) dt' \quad (1.24)$$

Resolvendo a integral, obtém-se

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\Gamma}{\gamma^2} \left\{ t - \frac{2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{1}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \right\}. \quad (1.25)$$

Para tempos $t \gg 1$, o primeiro termo do lado direito da igualdade é dominante, o que leva a dependência linear com o tempo do desvio quadrático médio do deslocamento, isto é,

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = Dt, \quad (1.26)$$

onde $D = \Gamma/\gamma^2 = B/\alpha^2$ é o coeficiente de difusão, que tem sua forma mais completa descrita na equação (1.2). Esse resultado converge com o obtido por Einstein.

A segunda forma de abranger o movimento browniano é pela equação de Fokker-Planck. Tal equação recebe este nome em honra a Adriaan Fokker e Max Planck e descreve a evolução temporal de uma distribuição de probabilidade, mostrando a posição e a velocidade de uma partícula, também podendo ser denominada equação avançada de

Kolmogorov. A seguir, uma equação do tipo Langevin descrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \zeta(t), \quad (1.27)$$

onde a variável x é uma coordenada generalizada e pode representar tanto a posição quanto a velocidade. Assim, a equação de Fokker-Planck é frequentemente descrita como[7]:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x)P(x,t)] + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1.28)$$

onde $f(x)$ pode ser representada como uma força de atrito, como na equação (1.8), e $P(x,t)$ é a distribuição de probabilidade de localizar a partícula num determinado intervalo de comprimento. A referida equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

que representa a equação da continuidade para a densidade de probabilidade $P(x,t)$ e $J(x,t)$ é uma corrente de probabilidade [8] e é descrita como:

$$J(x,t) = f(x)P(x,t) - \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}. \quad (1.30)$$

Uma abordagem mais detalhada pode ser vista em [7, 8].

Com essa pequena introdução, pode-se notar a abrangência e importância do estudo da difusão. Vale ressaltar a diversidade de aplicações que fazem uso dessa ferramenta, a exemplo dos estudos com polímeros, movimentações financeiras, mobilidade humana e dinâmica molecular[9].

1.2 CAMINHADAS ALEATÓRIAS E VOOS DE LÉVY

Muitos tipos de partículas, como as auto impulsionadas [10, 11, 12, 13], são difundidas anormalmente. Partículas que se difundem com o deslocamento quadrático

médio linear com o tempo efetuam difusão normal. Por outro lado, partículas que se difundem com o deslocamento quadrático médio não linear com o tempo efetuam difusão anômala. E dentro dos padrões de difusão anômala se encontram as caminhadas de Lévy ou movimentos de padrões similares. O conhecimento deste tipo de movimento, difusão e transporte é de fundamental importância no estudo de processos epidêmicos e diversos outros fenômenos [9, 14, 15].

Nesse contexto, analisar uma caminhada de Lévy a partir de uma trajetória de dados é um passo muito importante na análise de dados empíricos. Tal análise é uma tarefa relativamente fácil quando realizada em uma dimensão, isto porque as mudanças na direção são de fácil identificação e a distribuição assintótica, tipo lei de potência, das distâncias percorridas pode ser facilmente obtida através de análise estatística de dados padrão [16, 17], como, por exemplo, histogramas das distâncias percorridas. Em uma dimensão, os pontos nos quais a velocidade muda o sinal definem as distâncias viajadas entre as rotações.

Se a Função Densidade de Probabilidade (FDP)^a das distâncias tem uma cauda (truncada), tipo lei de potência, com um valor pertinente para o expoente, então, pode-se concluir com convicção que há um processo de Lévy. O fato de não haver curvatura em uma dimensão facilita a identificação do padrão de Lévy. Por outro lado, nos casos bidimensional e tridimensional a velocidade é um vetor em vez de um escalar. Dessa maneira, as rotações podem ser contínuas em vez de localizadas. Sem ângulos de rotação precisamente localizados, torna-se impossível estimar explicitamente a FDP das distâncias entre as rotações. De fato, a própria idéia de “distância entre os ângulos de rotação” torna-se mal definida. Por essa razão, caminhadas curvas tornam a identificação de uma caminhada de Lévy mais difícil [18, 19, 20] e aquece o debate a respeito de como analisar e inferir caminhadas de Lévy para dados empíricos bidimensionais e tridimensionais [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

Recentemente, um novo método para detectar um padrão de Lévy em dados empíricos ou simulacionais foi proposto [30]. Esse método envolve uma análise de projeções unidimensionais de trajetórias curvas de dimensões superiores. A idéia principal do trabalho de Humphries *et al* foi explorar o fato de que uma projeção unidimensional de uma caminhada de Lévy, em uma dimensão superior, continua sendo uma caminhada de Lévy.

^aVer seção 7.5

Tradicionalmente, a definição matemática de caminhadas de Lévy em duas e três dimensões não possui curvatura. Em vez disso, consiste em sequências de segmentos de caminho conectadas consecutivamente^b. Dessa maneira, os ângulos de rotação são localizados nas junções entre os segmentos conectados.

Dados experimentais possuem ruído. Com isso, a caminhada de Lévy idealizada não é observada. Tipicamente, trajetórias reais incluem curvatura, seja devido a erros de medida ou por reais flutuações na direção da velocidade. Faz sentido generalizar o tradicional conceito de caminhadas de Lévy para permitir a curvatura. Deveras, ao contrário do entendimento tradicional, curvatura não é uma exceção. Por essa razão, usar-se-á o termo caminhada de Lévy no que se segue, em sentido mais amplo, visando incluir trajetórias curvas, que em todos sentidos, exceto pela curvatura, comportam-se como uma tradicional caminhada de Lévy.

O método da projeção para identificar caminhadas de Lévy em duas e três dimensões é especialmente relevante no contexto do debate sobre a realização ou não, pelos animais, de caminhadas de Lévy na busca por alimento ou por companheiros para acasalamento, por exemplo [31, 32]. Embora exista evidência indiscutível que caminhadas de Lévy descrevem corretamente importantes aspectos de reais movimentos de diversos animais em uma ampla variedade de ambientes e circunstâncias (veja as Refs.[30, 33]), ainda há argumentos no sentido de que o padrão de caminhadas de Lévy não seria um fenômeno tão comum na natureza[34]. Uma das críticas trata da análise estatística de dados e inferência estatística. Neste contexto, muito progresso tem sido feito [23, 30, 33, 35, 36, 37, 38] na aplicação de métodos mais sofisticados para estudo de dados experimentais, tais como estimativa máxima da propabilidade^c, estimativa do parâmetro da FDP em combinação com testes de qualidade de ajuste^d e modelo de seleção através peso Bayesiano ou Akaike[39].

Ademais, a identificação objetiva dos comprimentos de passos em caminhos curvos em duas ou três dimensões tem sido prejudicada pelo uso de procedimentos que dependem fortemente de escolhas de parâmetros *ad hoc*^e[21, 24, 26, 27, 28]. Este é assim chamado problema de discretização: das muitas maneiras que se pode discretizar um caminho contínuo, qual é melhor ou suficientemente boa? A discretização dos passos, em particular, faz a distinção correta entre caminhadas de Lévy e CRW's^f em duas e três dimensões[22]

^bVer seção 3.4

^cDo inglês: maximum likelihood estimation (MLE)

^dDo inglês: goodness-of-fit (GOF)

^eexpressão latina que traduzida literalmente significa: para isto, para esta finalidade.

^fCorrelated Random Walks, do inglês: caminhadas aleatórias correlacionadas. Esse tipo de compor-

um desafio mais complexo. Entretanto, no primeiro, a superdifusividade se estende por todas escalas, no último, a presença de correlações de alcance finito pode dar origem à dinâmica superdifusiva transiente em escalas comparáveis ao comprimento de correlação. Portanto, caminhadas de Lévy e CRW's podem conduzir a uma dinâmica e aspecto visual muito similares em escalas temporais e espaciais específicos[18].

Neste trabalho, foram aplicadas as idéias gerais do recentemente proposto método da projeção[30] para dois diferentes modelos. As duas caminhadas aleatórias^g compartilham as mesmas distribuições de tamanho de passos e ângulos de rotação. Um dos modelos é uma caminhada aleatória genuinamente superdifusiva com correlações de longo alcance construído pela adição de curvatura no esqueleto de uma caminhada de Lévy tradicional. O outro é uma caminhada correlacionada de curto alcance (CRW). Na Ref.[30], comprimentos de passos menores que um limite mínimo são simplesmente removidos dos dados (para minimizar efeitos artificiais resultados da projeção unidimensional). Aqui, introduziu-se uma nova maneira de lidar com o regime de pequenos comprimentos de passos e a presença de correlações agindo em intervalos de escala distintos. Foi aplicado o procedimento de *coarse graining*^h ou reescalamento que destrói informação sobre o regime de comprimento de pequenos passos, retendo informação apenas em grandes escalas. Observou-se que o método de projeção combinado com esse protocolo de renormalização funciona extremamente bem para distinguir claramente caminhadas aleatórias correlacionadas (CRW) de curto alcance de caminhadas de Lévy curvas. O método é tão bem sucedido, que é apto para distingui-los claramente, mesmo quando as duas trajetórias bidimensionais originais são descritas por distribuições de ângulos de rotação idênticas, bem como distribuições de tamanho de passos idênticas. O método de projeção aqui discutido não pode dar um falso positivo: Se uma projeção unidimensional é um processo de Lévy, então, seu processo bidimensional correspondente é um processo de Lévy.

1.3 ESTRUTURA DA TESE

No Cap.(2), foram abordados o Teorema do Limite Central (TLC) e o Teorema

tamento é muito comum em movimento animal. O passo subsequente está relacionado com o anterior. A escolha aleatória é com relação a direção tomada, isto é, os ângulos de rotação. Para mais detalhes, verificar em [40]. A correlação dos passos nesses tipo de caminhada são de curto alcance.

^gVer Cap. 5

^hMétodo que reescala um fenômeno para a ordem da incerteza da medida.

do Limite Central Generalizado (TLCG), bem como duas distribuições estatísticas que são de suma importância para esse trabalho: a distribuição de Lévy e a distribuição Lei de Potência. No Cap.(3), abordou-se a caminhada aleatória em uma e duas dimensões, assim como a difusão normal, difusão anômala e caminhadas e voos de Lévy.

No Cap.(4), foi realizada uma revisão sobre eficiência de buscas aleatórias. No Cap.(5), foram demonstrados os modelos teóricos de caminhadas aleatórias que trabalhamos nessa tese. No Cap.(6), por sua vez, foram debatidos os resultados obtidos com os modelos do capítulo anterior, e, no Cap.(7), listaram-se as conclusões deste trabalho e perspectivas futuras.

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

O Teorema do Limite Central (TLC) é utilizado em problemas que envolvem análise estatística. Este teorema mostra que a distribuição da soma de N variáveis torna-se gaussiana para $N \rightarrow \infty$ mesmo que as distribuições individuais das variáveis x_i não sejam em geral gaussianas. Desta maneira, pode-se ter uma variável que inicialmente possui uma distribuição muito diferente da distribuição normal e que ao tomar várias amostras grandes desta distribuição, a forma dos histogramas das médias amostrais tenderá a uma curva gaussiana. Na seção a seguir, será definida a distribuição gaussiana e por conseguinte, o TLC.

2.1 DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA

O primeiro a descrever a distribuição normal foi o matemático francês Moivre, em 1733. O desenvolvimento dessa distribuição também é atribuída a Gauss, que aplicou-a na teoria para o movimento dos corpos celestes.

Originalmente, foi desenvolvida como uma aproximação da distribuição binomial quando o número de tentativas é grande e a probabilidade de Bernoulli p não está próxima

de 0 ou de 1. É também uma forma assintótica da soma de variáveis aleatórias sob uma vasta gama de condições[41].

A distribuição gaussiana é utilizada para o estudo de uma vasta quantidade de fenômenos naturais, em particular aos relacionados à difusão normal. Ela surge naturalmente como uma distribuição limite para processos aleatórios, como consequência do TLC (ver seção 2.2). Do TLC, é possível verificar que quando não há o domínio da variância de uma distribuição em relação a outra, e as variáveis são fracamente interdependentes há uma estabilidade na distribuição gaussiana [42]. O TLC mostra que distribuições com segundo momento finito convergem gradualmente para distribuição estável gaussiana. A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal é dada por

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.1)$$

onde μ é a média e σ^2 é a variância. A equação acima é denominada distribuição Gaussiana padrão.

2.2 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL - (TLC)

O TLC afirma que a soma de variáveis aleatórias estatisticamente independentes tende a uma distribuição gaussiana, mesmo que, individualmente essas variáveis aleatórias não tenham uma distribuição gaussiana. Considere a soma de N variáveis aleatórias estatisticamente independentes x , não necessariamente gaussianas,

$$X = \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.2)$$

A distribuição de X é dada pela integração de todos os valores de x_i , que pode

ser escrita como[43]

$$P_N(X) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2)dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P(x_N)dx_N \delta(x_1 + x_2 + \dots + x_N - X), \quad (2.3)$$

onde $p(x_i)$ é a probabilidade da variável x_i . Usando a representação da função delta,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \quad (2.4)$$

tem-se

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1)e^{ikx_1} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} P(x_2)e^{ikx_2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P(x_N)e^{ikx_N} dx_N \quad (2.5)$$

ou

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikX} \tilde{P}_N(k) dk, \quad (2.6)$$

com

$$\tilde{P}_N(k) = [\tilde{P}(k)]^N. \quad (2.7)$$

Assim, é fácil ver que

$$\tilde{P}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{ikX} dx, \quad (2.8)$$

que nada mais é que a Transformada de Fourier de $P(x)$. A equação (2.7) deixa claro que a Transformada de Fourier da distribuição da soma de N variáveis, $P_N(X)$, é a N -ésima potência de $\tilde{P}(k)$. Para se ter uma visão mais detalhada, segue uma expansão da

Transformada de Fourier.

$$\tilde{P}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n P(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle, \quad (2.9)$$

onde $\langle x^n \rangle$ indica uma média de $P(x)$. A função geradora dos momentos da distribuição é denominada por:

$$\tilde{P}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \right] \quad (2.10)$$

que define a média cumulante $\langle x^n \rangle_c$. Expandindo 2.10 tem-se as primeiras cumulantes:

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle \equiv \mu \quad (2.11a)$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \equiv \sigma^2 \quad (2.11b)$$

Se uma constante C for adicionada a x , por conseguinte, uma C também será adicionada a μ , e isto não afetará as cumulantes de ordem superior. Considere $P'(x) = P(x - C)$. Ambas terão a mesma forma, a diferença será um deslocamento na média, ou seja, se a média de $P(x)$ for μ , a média de $P'(x)$ será $\mu + C$. A Transformada de Fourier de $P'(x)$ será

$$\begin{aligned} \tilde{P}'(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - C) e^{ikx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{ikx} e^{ikC} dx = \exp \left[(ik)(\mu + c) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Todas as cumulantes, exceto a primeira, não são alteradas. Cada cumulante de $P_N(X)$ é N vezes tão grande quanto seu cumulante correspondente de $P(x)$.

$$\langle X \rangle_{N,C} = N \langle x \rangle_c = N\mu \quad (2.13)$$

$$\langle X^2 \rangle_{N,C} = N \langle x^2 \rangle_c = N\sigma^2 \quad (2.14)$$

$$\langle X^3 \rangle_{N,C} = N \langle x^3 \rangle_c \quad (2.15)$$

Ao definir $Y = (X - N\mu)/\sqrt{N}$, pode-se ver a partir de $\langle X \rangle_{N,C}$ e $\langle X^2 \rangle_{N,C}$ que Y terá a média zero e o desvio padrão será unitário. Ao retirar a constante, as cumulantes de ordem maior que um não sofrem nenhuma mudança, então

$$\langle Y^3 \rangle_{N,C} = N^{-3/2} \langle X^3 \rangle_{N,C} = N^{-1/2} \langle x^3 \rangle_c. \quad (2.16)$$

Pode-se notar que $\langle Y^3 \rangle_{N,C} \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, desde que existam os 3 primeiros momentos de x . Do mesmo modo, $\langle Y^n \rangle_{N,C} \propto N^{-(n-2)/2}$ e conseqüentemente desaparecerá quando $N \rightarrow \infty$ para todo $n > 2$. Uma vez que todos cumulantes de Y de ordem superior a 2 desaparecem para $N \rightarrow \infty$, a distribuição Y deverá ser gaussiana no seu limite. Agora, se Y tem média zero e variância unitária, logo $X = \sqrt{N}(Y + N\mu)$ deverá ser gaussiana, mas com média $N\mu$ e variância $N\sigma^2$, que é

$$P_N(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp \left[-\frac{(X - N\mu)^2}{2N\sigma^2} \right], \quad (2.17)$$

que nada mais é que a prova do Teorema do Limite Central.

2.3 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL GENERALIZADO - (TLCG)

Paul Lévy (1886-1971) propôs o seguinte questionamento [44]: Quando é que a probabilidade $P_N(X)$ de uma soma de N passos $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ possui a mesma distribuição $p(x)$, exceto por um fator de escala, dos passos individuais? A resposta intuitiva é que $p(x)$ deve ser uma gaussiana, porque uma soma de N gaussianas é um

gaussiana com variância $N\sigma^2$. Todavia, Lévy provou haver outras soluções, todas com variáveis aleatórias com variância infinita.

Em 1853, outro francês, Augustin Cauchy, percebeu que havia outras soluções para o problema de adição de N variáveis aleatórias [44]. Uma delas é a Transformada de Fourier da distribuição $p_N(x)$:

$$\tilde{p}_N(k) = \exp(-N|k|^\alpha). \quad (2.18)$$

Quando $\alpha = 1$, a transformada inversa para o espaço x tem a forma

$$p_N(x) = \frac{1}{\pi N} \frac{1}{1 + (x/N)^2} = \frac{1}{N} p_1(x/N). \quad (2.19)$$

A equação acima é conhecida como Distribuição de Cauchy, que mostra a relação entre uma distribuição de passo único $p_1(x)$ e sua extensão para N passos, $p_N(x)$ [47].

Lévy obteve as, hoje conhecidas, distribuições α -estáveis de Lévy através da generalização desse resultado, com $\alpha \in (0, 2]$.

Uma maneira simples e concreta de parametrizar as possíveis distribuições estáveis de $p(x)$ é escrevendo a função característica (2.8). As distribuições estáveis possuem, em geral, função característica da forma[45, 46]:

$$\tilde{P}(k) = \begin{cases} \exp(-a|k|^\alpha[1 - i\beta \tan(\pi\alpha/2)\text{sign}(k)]), & \text{para } \alpha \neq 1; \\ \exp(-a|k|[1 + i\beta\frac{\pi}{2}\text{sign}(k) \ln|k|]), & \text{para } \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

com $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, a determina a largura da distribuição e $\text{sign}(k)$ é a função sinal. Para $\alpha = 1$, Cauchy demonstrou que é a generalização da função característica, adicionando também β , responsável pela assimetria da distribuição. As distribuições estáveis tem comportamento similar ao das distribuições gaussianas no TLC, todavia com uma abrangência maior por não se restringir a finitude dos momentos. E esse resultado é conhecido como Teorema do Limite Central Generalizado.

Pelo TLGG, para os casos em que a variância e o momento são infinitos, os resultados limites possíveis são as distribuições estáveis [47]. Nesses casos, quando $N \gg 1$

, para $y = x_1, x_2, \dots, x_N$ [48], a distribuição será

$$p_{x,\alpha}(x, N) \sim N^{-(1/\alpha)} p_{y,\alpha}(x/N^{1/\alpha}), \quad (2.21)$$

enquanto que no caso gaussiano do TLC, a distribuição será

$$p_{x,\alpha}(x, N) \sim N^{-(1/2)} p_y(x/N^{1/2}). \quad (2.22)$$

2.4 CASOS ESPECIAIS DA DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY ($\alpha = 1$ e $\alpha = 2$)

Quando a equação (2.20) tem $\beta = 0$, isto é, quando há simetria na distribuição, tem-se a distribuição de Lévy, que é definida em termos da sua transformada de Fourier:

$$\tilde{L}_\alpha(a, k) = \tilde{P}(k) = e^{-a|k|^\alpha}. \quad (2.23)$$

A validade dessa função é para $0 < \alpha \leq 2$, porque quando $\alpha > 2$ a variância de $L_\alpha(a, x)$ não existe.

Para $\alpha = 2$, isto é, $L_2(\sigma^2/2, x)$ tem-se:

$$\tilde{p}(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}, \quad (2.24)$$

aplicando a transformada inversa de Fourier, obtem-se a distribuição gaussiana(Fig.2.1):

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (2.25)$$

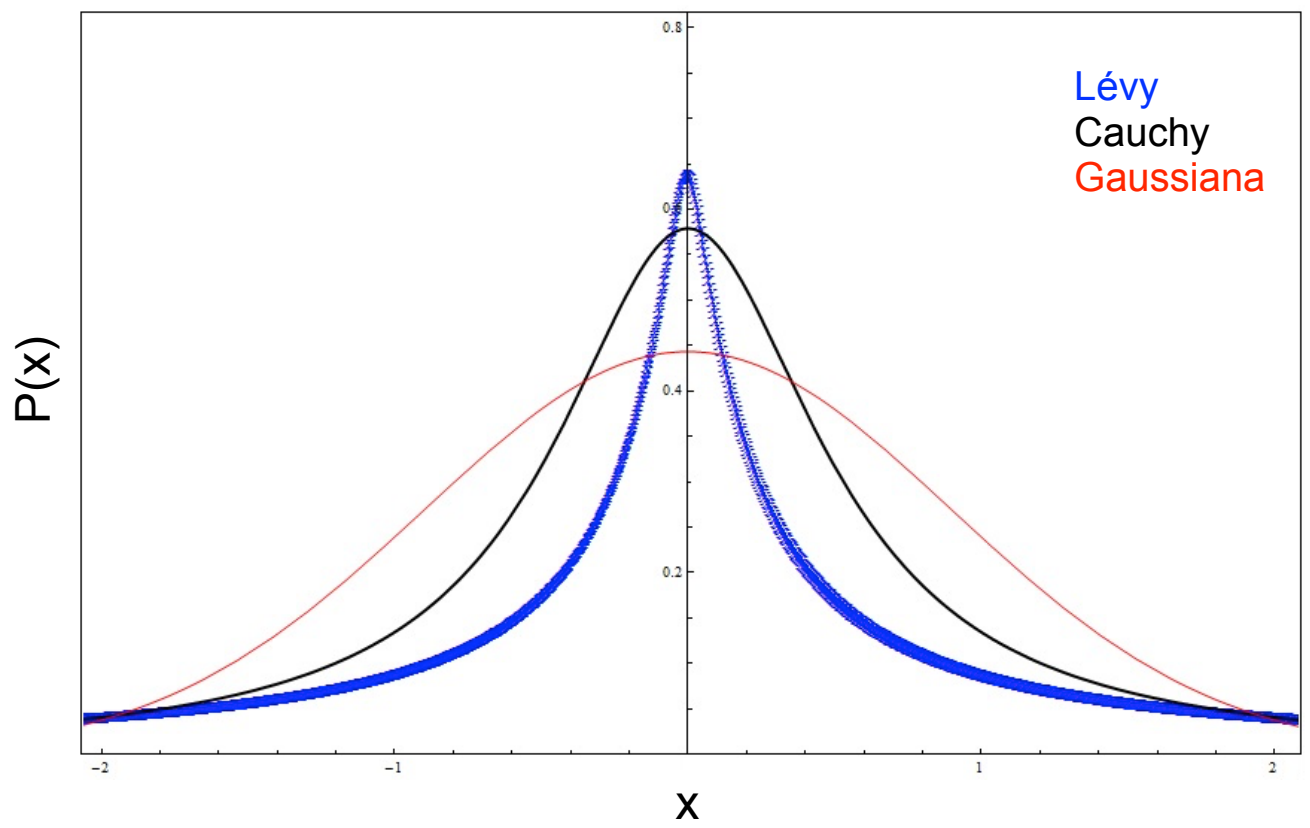


Figura 2.1: Gráfico linear da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).

Para $\alpha = 1$, isto é, $L_1(a, x)$ tem-se

$$\tilde{p}(k) = e^{-a|k|}, \quad (2.26)$$

de semelhante modo ao caso $\alpha = 2$, aplica-se a transformada inversa de Fourier e obtem-se:

$$p(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \quad (2.27)$$

que é a distribuição de Cauchy.

Os gráficos linear, log-linear e log-log da distribuição de Lévy e seus casos especiais para $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ podem ser observadas nas Figs. (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4).

Apenas essas duas distribuições de Lévy podem ser invertidas e expressas como funções elementares. Como observado acima, a distribuição de Cauchy possui variância infinita. Na verdade, para $0 < \alpha < 2$, todas distribuições de Lévy possuem variância infinita [49]. Distribuições de Lévy possuem duas características importantes: 1) São estáveis sob a operação de adição, isto é, variáveis de Lévy aleatórias independentes e identicamente distribuídas se aproximam de uma distribuição de Lévy e 2) o parâmetro a controla a amplitude da cauda da distribuição, que é aditivo para N passos. Para $\alpha < 1$, o primeiro momento diverge.

2.4.1 Expansão da Distribuição de Lévy para $x \ll 1$

Agora, aplica-se a transformada inversa de Fourier na equação (2.23) e tom-se o limite $x \ll 1$. Uma vez que $\tilde{L}_\alpha(a, k)$ é simétrica e uma função par, é necessário utilizar a transformada inversa de cossenos de Fourier.

$$L_\alpha(a, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ak^\alpha} \cos(kx) dk. \quad (2.28)$$

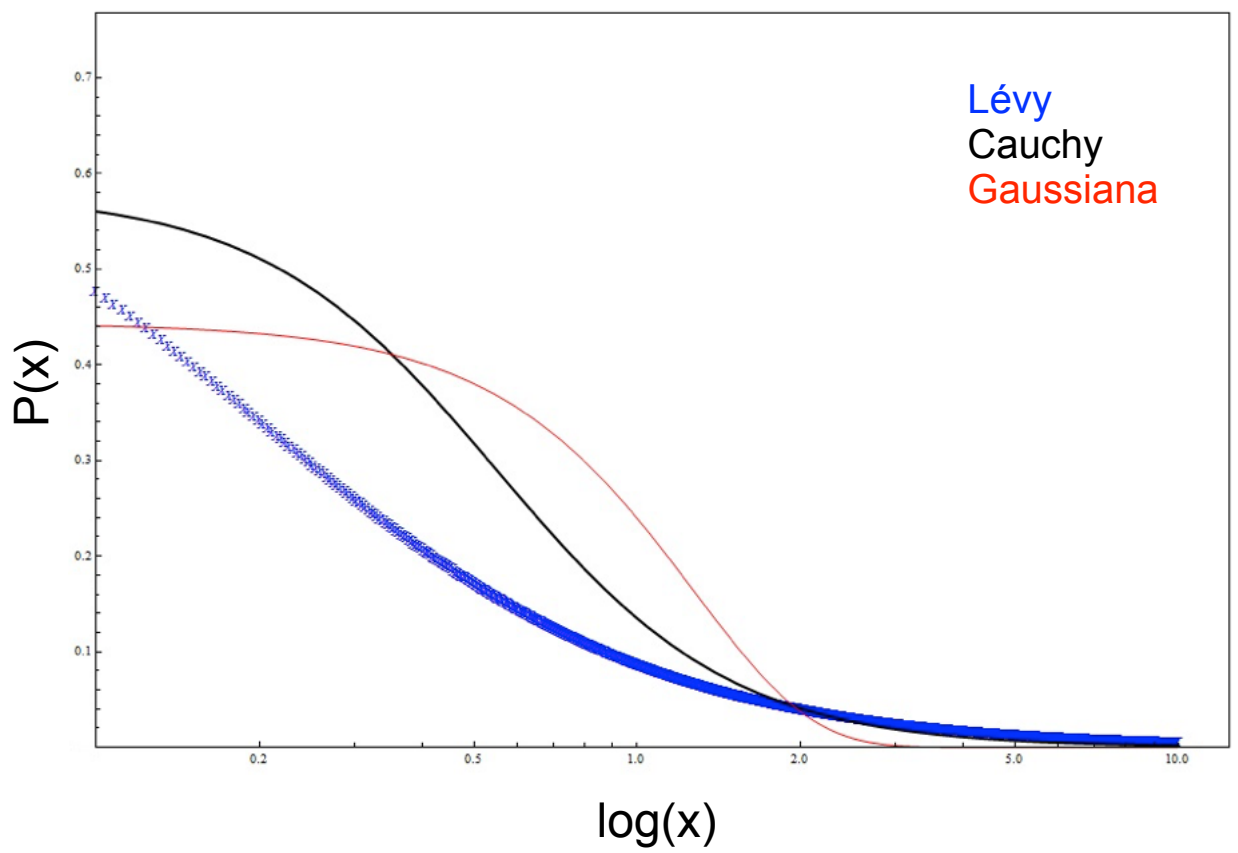


Figura 2.2: Gráfico log-linear da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).

Expandindo em série de Taylor para $\cos(kx)$, obtem-se

$$L_\alpha(a, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ak^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kx)^{2n}}{(2n)!} dk, \quad (2.29)$$

usando mudança de variável, $y = ak^\alpha$ e $dy = a\alpha k^{\alpha-1} dk$, tem-se:

$$L_\alpha(a, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \exp(-y) \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{y}{a}\right)^{2n/\alpha} \frac{dy}{a\alpha \left(\frac{y}{a}\right)^{(\alpha-1)/\alpha}}. \quad (2.30)$$

Uma vez que o interesse é em $x \ll 1$, despreza-se os termos de ordem superior,

$$L_\alpha(a, x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(x)^{2n}}{\alpha a^{(2n+1)/\alpha}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right), \quad (2.31)$$

isto nos fornecerá

$$L_\alpha(a, x) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha a^{1/\alpha}}, \quad (2.32)$$

nota-se que para ao passo que $\alpha \rightarrow 0$, para $x \ll 1$, a distribuição cresce.

2.4.2 Expansão da Distribuição de Lévy para $x \gg 1$

Ao integrar a equação (2.28) por parte, obtem-se

$$L_\alpha(a, x) = \frac{a\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kx)}{x} k^{\alpha-1} \exp(-ak^\alpha) dk, \quad (2.33)$$

fazendo a mudança de variável $y = kx$, $dy = x dy$

$$L_\alpha(a, x) = \frac{a\alpha}{\pi x^{1+\alpha}} \int_0^\infty y^{\alpha-1} \text{sen}(y) \exp\left(\frac{-ay^\alpha}{x^\alpha}\right) dy, \quad (2.34)$$

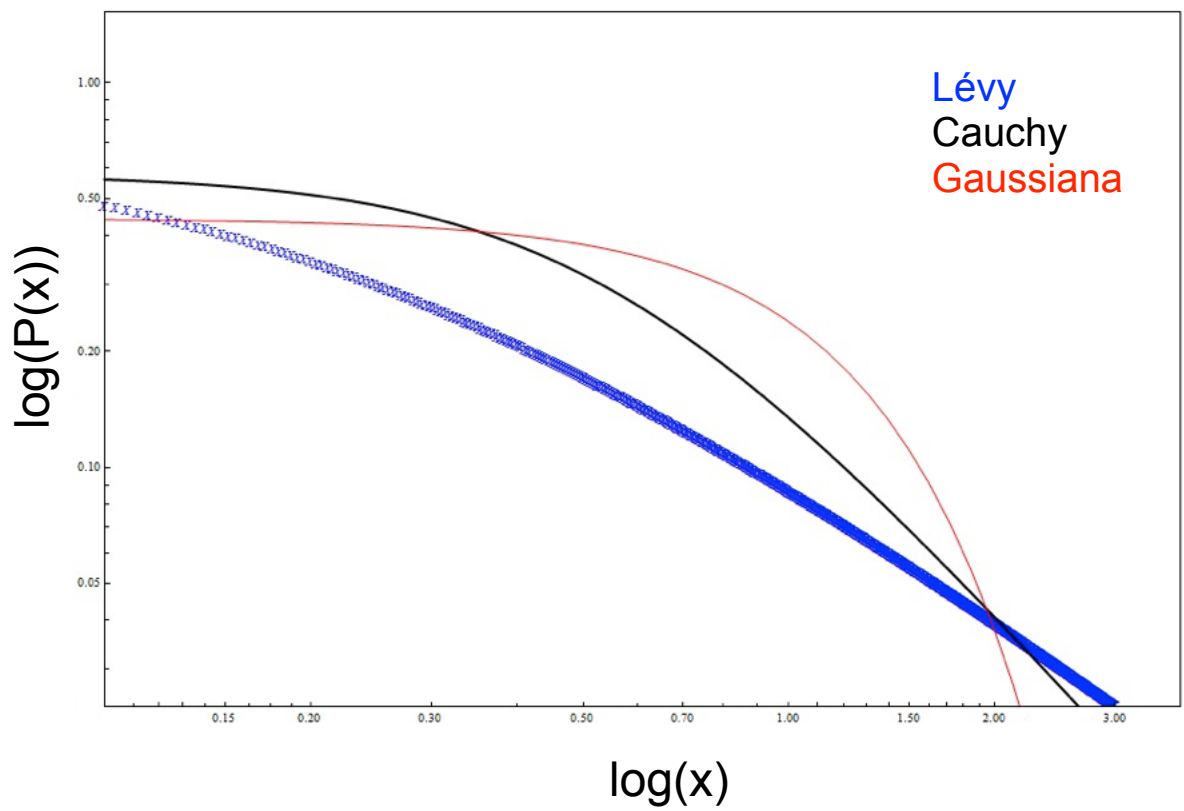


Figura 2.3: Gráfico log-log da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0,5$ (azul), $\alpha = 1,0$ (preta), $\alpha = 2,0$ (vermelha).

considerando o limite $x \rightarrow \infty$

$$L_\alpha(a, x) \sim \frac{a\alpha}{\pi x^{1+\alpha}} \int_0^\infty y^{\alpha-1} \text{sen}(y) dy. \quad (2.35)$$

A solução da integral acima é $\Gamma(\alpha)\text{sen}(\pi\alpha/2)$, que no limite assintótico, isto é, quando $x \gg 1$ fornece

$$L_\alpha(a, x) \sim \frac{a\alpha\Gamma(\alpha)\text{sen}(\pi\alpha/2)}{\pi x^{1+\alpha}}. \quad (2.36)$$

Verifica-se que quando x é muito grande, a distribuição de Lévy se comporta como uma lei de potência de expoente $\alpha + 1$. O segundo momento diverge quando $0 < \alpha < 2$.

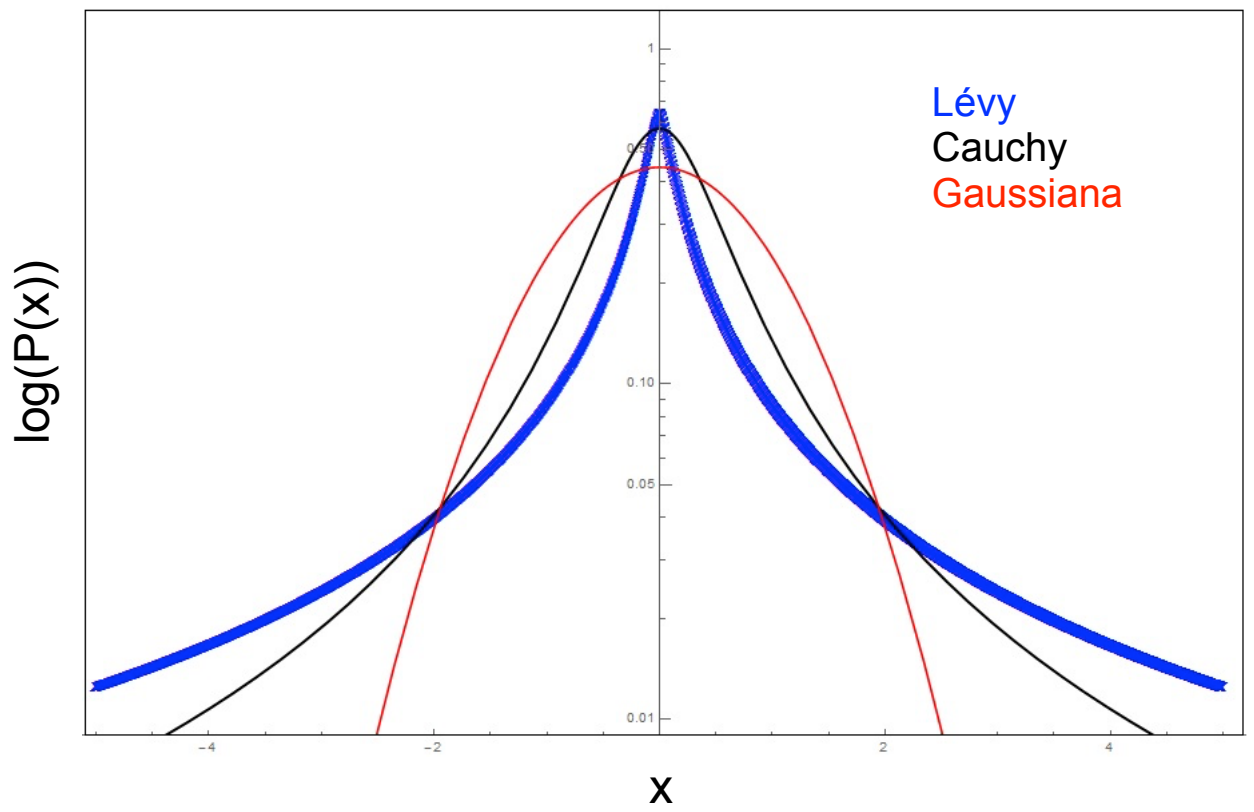


Figura 2.4: Gráfico linear-log da distribuição de Lévy para os fatores $\alpha = 0.5$ (azul), $\alpha = 1.0$ (preta), $\alpha = 2.0$ (vermelha).

Capítulo 3

CAMINHADAS ALEATÓRIAS E DIFUSÃO

Numa abordagem histórica sobre caminhadas aleatórias, há vários nomes que emergem como de fundamental importância para o desenvolvimento dessa área. As observações feitas por Robert Brown em 1827 no movimento de pólen em suspensão em um fluido [1], hoje conhecido como movimento browniano são um marco na história das caminhadas aleatórias (em inglês *random walk*). Mas antes, em 1785, Jan Ingenhousz estudou o movimento irregular de pó de carvão suspenso em álcool [2]. Questões próximas a essa foram estudadas durante o século XVI por Jacob Bernoulli, Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Entretanto, a teoria radicou-se no princípio do século XX com trabalhos publicados na área de processos estocásticos.

Posteriormente, no início do século XX, em 1900, Louis Bachelier relacionou caminhada aleatória e séries temporais aplicadas em economia [56]. Ainda no princípio do século XX, em 1905, Albert Einstein publicou seu artigo sobre movimento browniano, no qual estudou a difusão de uma partícula, cuja trajetória é regida pelas colisões da partícula com as moléculas do fluido e revolucionou estudos na área de mecânica estatística. No mesmo ano, Karl Pearson [57] propôs o termo *random walk*, em uma carta enviada à Nature. Nessa carta ele apresentou um modelo descrevendo a movimentação de mosquitos numa floresta de maneira que um mosquito movimenta-se uma distância x a cada

incremento de tempo em uma direção aleatória. Pearson desejava conhecer a distribuição dos mosquitos após uma grande quantidade de voos executados. Posteriormente, essa foi adotada com nomenclatura padrão.

3.1 CAMINHADA ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL

Considere um caminhante movendo-se unidimensionalmente. A cada incremento temporal τ , um incremento espacial h é adicionado à direita com probabilidade p ou um incremento espacial h para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$. Variáveis aleatórias independentes x_1, x_2, \dots , serão introduzidas para descrever o movimento do caminhante, que possuem valor $+1$ se o passo for para direita ou -1 se o passo for para a esquerda. A variável x_j indica o j -ésimo instante.

A média de x é:

$$\mu = \langle x_j \rangle = p - q, \quad (3.1)$$

e a variância σ^2 :

$$\sigma^2 = \langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2 = 1 - (p - q)^2 = 4pq. \quad (3.2)$$

A função característica $g(k)$ da variável x_j é:

$$g(k) = \langle e^{ikx_j} \rangle = pe^{ik} + qe^{-ik}. \quad (3.3)$$

Para determinar a probabilidade $P_n(m)$ de o caminhante estar a m passos da posição inicial após n intervalos de tempo, é necessário obter primeiro a função característica correspondente

$$G_n(k) = [g(k)]^n. \quad (3.4)$$

Expandindo, tem-se:

$$G_n(k) = \sum_{\ell=0}^n \binom{a}{b} p^\ell q^{n-\ell} e^{ik(2\ell-n)}. \quad (3.5)$$

A definição de $G_n(k)$ é conhecida e é:

$$G_n(k) = \sum_{m=-n}^n P_n(m) e^{ikm}, \quad (3.6)$$

com m tomando os valores $-n, -n+2, \dots, n-2, n$, obtem-se então:

$$P_n(m) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}. \quad (3.7)$$

Para conservar a coerência da equação acima, convém mudar a variável de ℓ para $m = 2\ell - n$. Logo, a média e a variância de m serão, respectivamente:

$$\langle m \rangle = n\mu = n(p - q) \quad (3.8)$$

e

$$\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = n\sigma^2 = 4npq. \quad (3.9)$$

Uma vez que as variáveis são independentes, pode-se usar o teorema do limite central, obtendo assim:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp -\frac{(m - n\mu)^2}{2n\sigma^2} \quad (3.10)$$

válido para $n \rightarrow \infty$. A densidade de probabilidade $\rho(x, t) = P_n(m)/h$ da variável x no instante t é:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp \left[-\frac{(x - \gamma t)^2}{2Dt} \right], \quad (3.11)$$

com

$$\gamma = \frac{h\mu}{\tau} = \frac{h(p-q)}{\tau} \quad (3.12)$$

e

$$D = \frac{h^2\sigma^2}{\tau} = \frac{h^2 4pq}{\tau}. \quad (3.13)$$

Obtendo assim:

$$\langle x \rangle = \gamma t \quad (3.14)$$

e

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = Dt, \quad (3.15)$$

onde γ é a velocidade média do caminhante e D o coeficiente de difusão.

Considere, agora, uma caminhada aleatória unidimensional genérica. Considere ainda que uma partícula desloque-se um valor x_j da sua posição de origem a cada intervalo de tempo τ . Assuma que sua posição inicial é a origem de uma reta, assim, no instante $t = n\tau$, a partícula estará na posição $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Seja $P(x_j)$ a densidade de probabilidade de x_j e $g(k)$ a função característica, isto é,

$$g(k) = \langle e^{ikx_j} \rangle = \int P(x_j) e^{ikx_j} dx_j. \quad (3.16)$$

A função característica $G(k)$ correspondente à variável x será:

$$G(k) = [g(k)]^n. \quad (3.17)$$

Ao expandir a função característica $g(k)$ em cumulantes até a segunda ordem, obtem-se:

$$g(k) = e^{i\mu k - \sigma^2 k^2/2}, \quad (3.18)$$

desde que haja o valor médio μ e a variância σ^2 de x_j . Assim,

$$G(k) = e^{in\mu k - n\sigma^2 k^2/2}, \quad (3.19)$$

recordando que $t = \tau n$ e definindo $\gamma = \mu/\tau$ e $D = \sigma^2/\tau$, tem-se

$$G(k) = e^{i\gamma t k - D t k^2/2} \quad (3.20)$$

de forma que a densidade de probabilidade $\rho(x, t)$ será

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} \exp \left[-\frac{(x - \gamma t)^2}{2 D t} \right]. \quad (3.21)$$

Fazendo a análise de um grande número de partículas que realizam caminhada aleatória independentemente umas das outras, o resultado (3.21) será melhor entendido. Todas iniciam sua caminhada na origem e depois de um determinado tempo elas estarão distribuídas conforme a distribuição acima. Para $t \gg 1$, a densidade dessas partículas será uma gaussiana centrada em $x = \gamma t$ e com largura $\Delta = \sqrt{D t}$.

3.2 CAMINHADA ALEATÓRIA BIDIMENSIONAL

Para o caso de uma partícula se movendo em um plano, segue-se a mesma idéia: a cada intervalo de tempo τ a partícula se deslocará para uma nova posição. Logo, no j -ésimo intervalo de tempo a partícula estará na posição $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$. Novamente, considerando o início da movimentação ocorrendo na origem, a posição da partícula no instante $t = n\tau$ será $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_n$. Considere então, essas variáveis como vetores aleatórios independentes, que possuem uma distribuição de probabilidades dada por $P(\mathbf{r}_j) = P(x_j, y_j)$, cuja função característica $g(\mathbf{k}) = g(k_1, k_2)$ será dada por

$$g(\mathbf{k}) = \langle \exp \{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j\} \rangle = \langle \exp \{i(k_1 x_j + k_2 y_j)\} \rangle, \quad (3.22)$$

ou ainda por

$$g(\mathbf{k}) = \int \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} P(\mathbf{r}_j) dx_j dy_j. \quad (3.23)$$

Vale salientar que x_j e y_j podem não ser independentes.

A função característica $G(\mathbf{k})$ correspondente ao vetor $\mathbf{r} = (x, y)$ é dada por

$$G(\mathbf{k}) = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rangle = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\dots+\mathbf{r}_n)} \rangle = \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \rangle^n = [g(\mathbf{k})]^n. \quad (3.24)$$

Expandindo $g(\mathbf{k})$ em cumulantes até ordem k^2 , isto é,

$$g(\mathbf{k}) = \exp \left\{ i(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2) - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 k_1^2 + \sigma_{12}^2 k_1 k_2 + \sigma_{22}^2 k_2^2) \right\}. \quad (3.25)$$

Os cumulantes de primeira ordem são

$$\mu_1 = \langle x_j \rangle, \quad (3.26a)$$

$$\mu_2 = \langle y_j \rangle, \quad (3.26b)$$

e os de segunda ordem

$$\sigma_{11}^2 = \langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2, \quad (3.27a)$$

$$\sigma_{12}^2 = \langle x_j y_j \rangle - \langle x_j \rangle \langle y_j \rangle, \quad (3.27b)$$

$$\sigma_{22}^2 = \langle y_j^2 \rangle - \langle y_j \rangle^2. \quad (3.27c)$$

Logo, para $t = n\tau$ grande, tem-se

$$G(\mathbf{k}) = \exp \left\{ in(\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2) - \frac{n}{2}(\sigma_{11}^2 k_1^2 + \sigma_{12}^2 k_1 k_2 + \sigma_{22}^2 k_2^2) \right\}. \quad (3.28)$$

Assim, para o vetor aleatório $\mathbf{r} = (x, y)$, a densidade de probabilidade $P_n(\mathbf{r}) =$

$P_n(x, y)$ é

$$P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} G(\mathbf{k}) dk_1 dk_2, \quad (3.29)$$

que é uma gaussiana bidimensional da forma

$$P_n(x, y) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2nD} [\sigma_{22}^2 (x - n\mu_1)^2 + 2b_{12}(x - n\mu_1)(y - n\mu_2) + b_{11}(y - n\mu_2)^2] \right\}}{2\pi\sqrt{n^2 D}}, \quad (3.30)$$

com $D = \sigma_{11}^2 \sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4$.

Suponha que a cada incremento de tempo τ , a partícula desloque uma distância constante h na direção x ou y com igual probabilidade. A densidade de probabilidade será

$$P(x_j, y_j) = \frac{1}{4} \delta(x_j - h) \delta(y_j) + \frac{1}{4} \delta(x_j + h) \delta(y_j) + \frac{1}{4} \delta(x_j) \delta(y_j - h) + \frac{1}{4} \delta(x_j) \delta(y_j + h). \quad (3.31)$$

A função característica correspondente é representada por

$$g(k_1, k_2) = \langle \exp \{ i(k_1 x_j + k_2 y_j) \} \rangle = \frac{1}{4} (e^{ihk_1} + e^{-ihk_1} + e^{ihk_2} + e^{-ihk_2}), \quad (3.32)$$

ou

$$g(k_1, k_2) = \frac{1}{2} (\cos hk_1 + \cos hk_2). \quad (3.33)$$

Para n grande, utiliza-se a expansão de cumulantes até ordem \mathbf{k}^2

$$g(k_1, k_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} h^2 (k_1^2 + k_2^2) \right\}. \quad (3.34)$$

Portanto

$$G(k_1, k_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} n h^2 (k_1^2 + k_2^2) \right\}. \quad (3.35)$$

Utilizando a transformada inversa de Fourier,

$$P_n(x, y) = \frac{1}{\pi n h^2} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{n h^2} \right\}. \quad (3.36)$$

Definindo o coeficiente de difusão $D = h^2/2\tau$, a densidade de probabilidade de x e y no instante t é dada por

$$\rho(x, y, t) = \frac{1}{2\pi Dt} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2Dt} \right\}. \quad (3.37)$$

Pode-se observar que $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = Dt$ e por conseguinte $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = 2Dt$.

3.3 DIFUSÃO

Um fator de relevância para o estudo de caminhadas aleatórias é o comportamento temporal do TLC . É um parâmetro utilizado para estudar o tipo de difusão gerada pela dinâmica da caminhada é o expoente de Hurst, \mathbf{H} [58].

Definindo:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i \quad (3.38)$$

como a posição total de todos os passos da caminhada, a raiz quadrada da distância média quadrática do caminhante, $\langle (\Delta L)^2 \rangle^{1/2}$, é proporcional a t^H , para t suficientemente grande. O movimento browniano que possui passos com variância finita e sem correlação, tem $H = 1/2$, implicando na difusão normal. Para valores de $H \neq 1/2$ tem-se difusão anômala, com $H > 1/2$ implicando em superdifusão e $H < 1/2$ em subdifusão. Quando $H = 1$ o comportamento é denominado balístico.

Difusão Normal

Para uma caminhada unidimensional, considere que cada passo tenha tamanho fixo δx e possa ocorrer dentro de um intervalo de tempo $(t, t + dt)$, com probabilidade dada por

$$P(t, t + dt) = \xi dt + 0(dt), \quad (3.39)$$

onde ξ é uma constante e $0(dt)$ indica os termos de ordem superior a dt . As probabilidades de transição numa situação equiprovável será

$$P(x \rightarrow x + \delta x) = P(x \rightarrow x - \delta x) = \frac{1}{2}. \quad (3.40)$$

Agora, denomina-se a densidade de probabilidade $p_i(t)$ de encontrar o caminhante em $x = i \cdot \delta x$ no instante t , ou seja, $p_i(t) \equiv p[x(t) = i \cdot \delta x]$. Assim, a densidade de probabilidade de achar o caminhante em x , no instante $t + dt$ é representada por

$$p_i(t + dt) = (1 - \xi dt)p_i(t) + \xi dt \left[\frac{1}{2}p_{i-1}(t) + \frac{1}{2}p_{i+1}(t) \right] + 0(dt), \quad (3.41)$$

o primeiro termo corresponde à probabilidade de não dar passo após dt , estando inicialmente em x no momento t , já o segundo termo corresponde à probabilidade de dar um passo após dt , para direita estando inicialmente em $x - \delta x$ ou para a esquerda estando inicialmente em $x + \delta x$. Conseqüentemente,

$$p_i(t + dt) - p_i(t) = -\xi dt p_i(t) + \frac{\xi dt}{2} [p_{i-1}(t) + p_{i+1}(t)] + 0(dt). \quad (3.42)$$

Ao dividir por dt quando $dt \rightarrow \infty$ obtem-se

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\xi p_i(t) + \frac{\xi}{2} [p_{i-1}(t) + p_{i+1}(t)] + 0(dt). \quad (3.43)$$

No limite contínuo e usando a notação $p_i(t) = p(x, t)$, com o intuito de discretizar arbitri-

trariamente δx , escreve-se

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\xi p(x, t) + \frac{\xi}{2} [p(x - \delta x, t) + p(x + \delta x, t)] + 0(dt). \quad (3.44)$$

Expandindo p em série de Taylor como função de x , tem-se

$$\begin{aligned} p(x - \delta x, t) + p(x + \delta x, t) &= [p(x) - \partial_x p(x)\delta x + \partial_x^2 p(x)(\delta x)^2] + \\ &[p(x) + \partial_x p(x)\delta x + \partial_x^2 p(x)(\delta x)^2] = 2p(x) + 2\partial_x^2 p(x)(\delta x)^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

de maneira que

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\xi p(x, t) + \frac{\xi}{2} [2p(x) + 2\partial_x^2 p(x)(\delta x)^2]. \quad (3.46)$$

Reescrevendo, tem-se

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{-\xi(\delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.47)$$

Definindo $D \equiv \xi(\delta x)^2/2$ como o coeficiente de difusão e assim chega-se na equação de difusão para um caminhante aleatório no limite de tempos contínuos [47]:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.48)$$

Esta expressão, também é conhecida como equação de Fokker-Planck ^a para densidade da posição $p(x)$ e pode ser resolvida por uma distribuição gaussiana:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right], \quad (3.49)$$

assumindo a condição inicial $p(x, 0) = \delta(x)$.

Com esse resultado, é possível calcular os momentos

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x, t) dt. \quad (3.50)$$

^aPara uma explicação mais detalhada, verificar [123].

Desse resultado pode-se deduzir que a média $\langle x \rangle$ é invariante temporal, ou seja,

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0, \quad (3.51)$$

coerente com a simetria da caminhada. É possível calcular a dispersão da caminhada,

$$\frac{d\langle x^2(t) \rangle}{dt} = 2D, \quad (3.52)$$

a partir da qual obtém-se a relação linear

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt. \quad (3.53)$$

Da definição de variância $\sigma^2(x) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ e $\langle x(t) \rangle^2 = 0$, o desvio padrão $\sigma(t)$, é

$$\sigma(t) = \sqrt{2Dt} \quad (3.54)$$

Com isso, é possível concluir que o espalhamento espacial é limitado em termos temporais por uma lei de escala

$$\sigma(t) = \langle x^2 \rangle \sim t^{1/2}. \quad (3.55)$$

Esse resultado é válido para caminhadas em qualquer dimensão, isto é, a relação acima permanecerá o mesmo para caminhadas brownianas independente da dimensão espacial.

Difusão Anômala

Generalizando, o desvio σ_q de caminhadas aleatórias pode ser descrito como

$$\sigma_q(t) = \langle |x|^q \rangle^{1/q} \sim t^H, \quad (3.56)$$

o parâmetro q depende da distribuição, H é o expoente de Hurst, válido para $H \in [0, 1]$. Como visto anteriormente, para $H = 1/2$ pode-se ter uma caminhada browniana com ausência de correlação. A difusão normal é descrita por propagadores gaussianos cujas variâncias crescem linearmente com o tempo. Quando $H \neq 1/2$ tem-se uma difusão anômala, com $H < 1/2$ caracterizando uma caminhada subdifusiva, com comportamento anti-persistente, isto é, o caminhante tende a mudar a direção do passo seguinte e $H > 1/2$, tem-se uma caminhada superdifusiva, com comportamento persistente, ou seja, o caminhante tende a manter a direção do passo anterior. Quanto maior for H , maior a tendência do caminhante a manter a direção atual. Vale ressaltar que anomalias na difusão surgem devido a estatísticas não-gaussianas.

3.4 CAMINHADAS E VOOS DE LÉVY

Mandelbrot cunhou o termo *Lévy Flight* (voo de Lévy) no seu livro de geometria fractal [59], no contexto de poeira de Lévy, que é poeira fractal gerada por um voo de Lévy[31]. Voos e caminhadas de Lévy são aplicados em diversas fenômenos e sistemas [60, 61, 62]: finanças e economia [63, 64, 65, 66], eletrodinâmica de cavidade quântica[67], clima [68] e física atmosférica [69], cinemática de ions numa rede ótica [70], relaxação anômala de spin[71], superdifusão fotônica[72] entre outros.

Voos de Lévy aparecem quando a distribuição do tamanho dos saltos tem uma cauda lei de potência $\lambda(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ que leva a uma variância divergente em $\mu < 3$. As condições suficientes e necessárias do TLC não se sustentam nesse caso. Em vez disso, verifica-se que a função densidade de probabilidade do caminhante converge para uma distribuição de Lévy estável com índice de Lévy $\alpha = \mu - 1$, com $0 < \alpha \leq 2$. Quando $\alpha = 2$ há difusão normal, Fig.(3.1). Quando $\alpha < 2$, o comportamento é superdifusivo, com o limite $\alpha \rightarrow 0$, ou seja, $\mu \rightarrow 1$ levando ao movimento balístico, Fig.(3.4).

Para $\alpha < 2$, não é possível definir o deslocamento médio quadrático porque ele

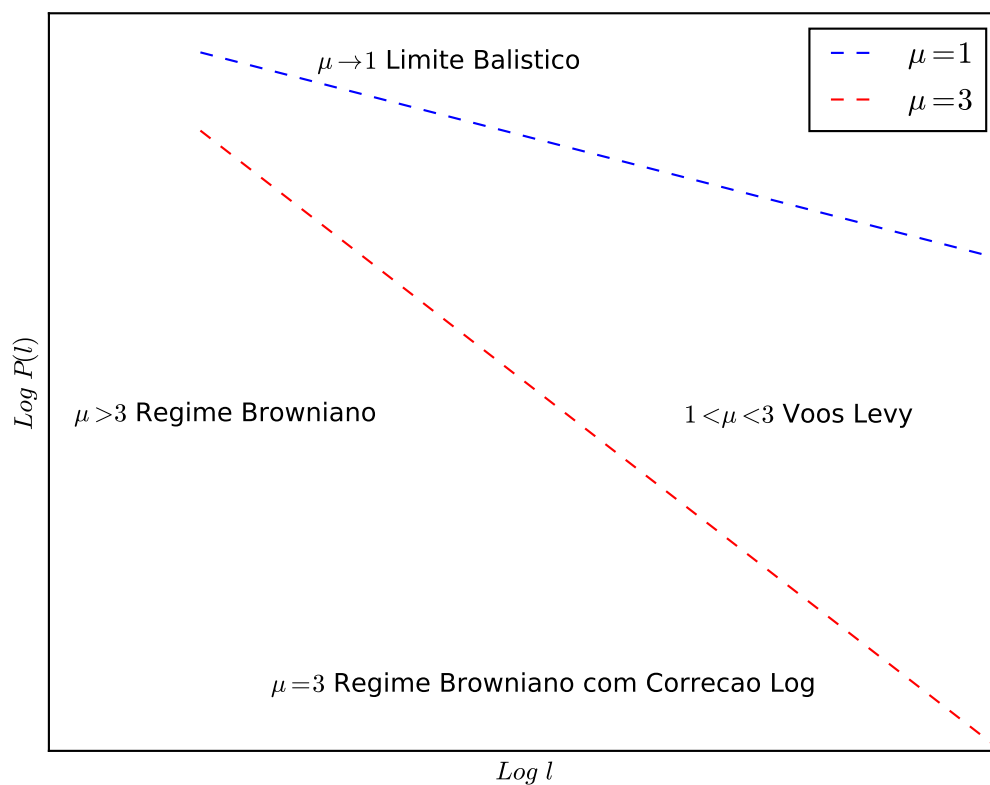


Figura 3.1: Para um caminhante aleatório que dá passos de tamanho ℓ de acordo com a função densidade de probabilidade $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, o tipo de difusão depende do valor de μ . Para $\mu > 3$, o CLT garante a convergência para a difusão normal. O limite balístico corresponde à $\mu \rightarrow 1$. Para $\mu \leq 1$, $P(\ell)$ não é normalizável. Valores intermediários, isto é, $1 < \mu < 3$ resultam em voos de Lévy superdifusivos (adaptado de [31]).

diverge. Em vez disso, pode-se estudar momentos de ordem inferior a α porque eles não divergem Fig.(3.2). Dessa maneira, pode-se definir largura, como uma meia largura a meia altura, e mostrar que um pseudo deslocamento quadrático médio cresce como $\sim t^{1/\alpha}$ para voos de Lévy. Assim, um único expoente de Hurst,

$$H = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\mu - 1}, \quad (3.57)$$

caracteriza o comportamento de voo de Lévy. A relação de escala segue da forma do propagador, que é uma distribuição estável de Lévy. Para o caso de um voo de Lévy com velocidade de arrasto zero e ruído simétrico, o propagador tem forma geral[31]

$$P(x, t) = \aleph(t)F(-|x|t^{-1/\alpha}) \quad (3.58)$$

onde \aleph é a normalização. Assim os momentos satisfazem

$$\langle |x|^q \rangle \sim t^{1/\alpha}, \quad q < \alpha. \quad (3.59)$$

Embora tenho sido proposto em configurações de baixa dimensão, voos de Lévy têm sido generalizados para dimensões superiores [73, 74]. Há muitas propriedades incomuns e interessantes em voos de Lévy [75], além de momentos divergentes e superdifusão[31]. Por possuir propriedades contraintuitivas [76, 77], voos de Lévy continuam sendo matéria de contínua investigação.

A diferença entre caminhada e voo de Lévy diz respeito à velocidade. Os saltos de voos de Lévy vão a zero ou quase desaparecem em tempo pequeno, enquanto caminhadas de Lévy têm velocidade constante Fig.(3.3). Especificamente, um voo de Lévy pode ser descrito por uma equação mestre com taxas de transição de longo alcance no espaço, uma vez que é um processo Markoviano ^b. Por outro lado, um caminhante de Lévy, leva $v\ell_j$ unidades de tempo para se deslocar uma distância ℓ_j devido sua velocidade finita v . Conseqüentemente, a caminhada de Lévy é mais difícil de ser obtida devido seu comportamento de escala. Caminhadas de Lévy podem ser descritas em termos de uma função δ de Dirac do espaço-tempo.

Tomando τ_j como sendo o tempo necessário para percorrer a distância ℓ_j . Uti-

^bPara uma explicação mais detalhada sobre processo Markoviano, ver [124].

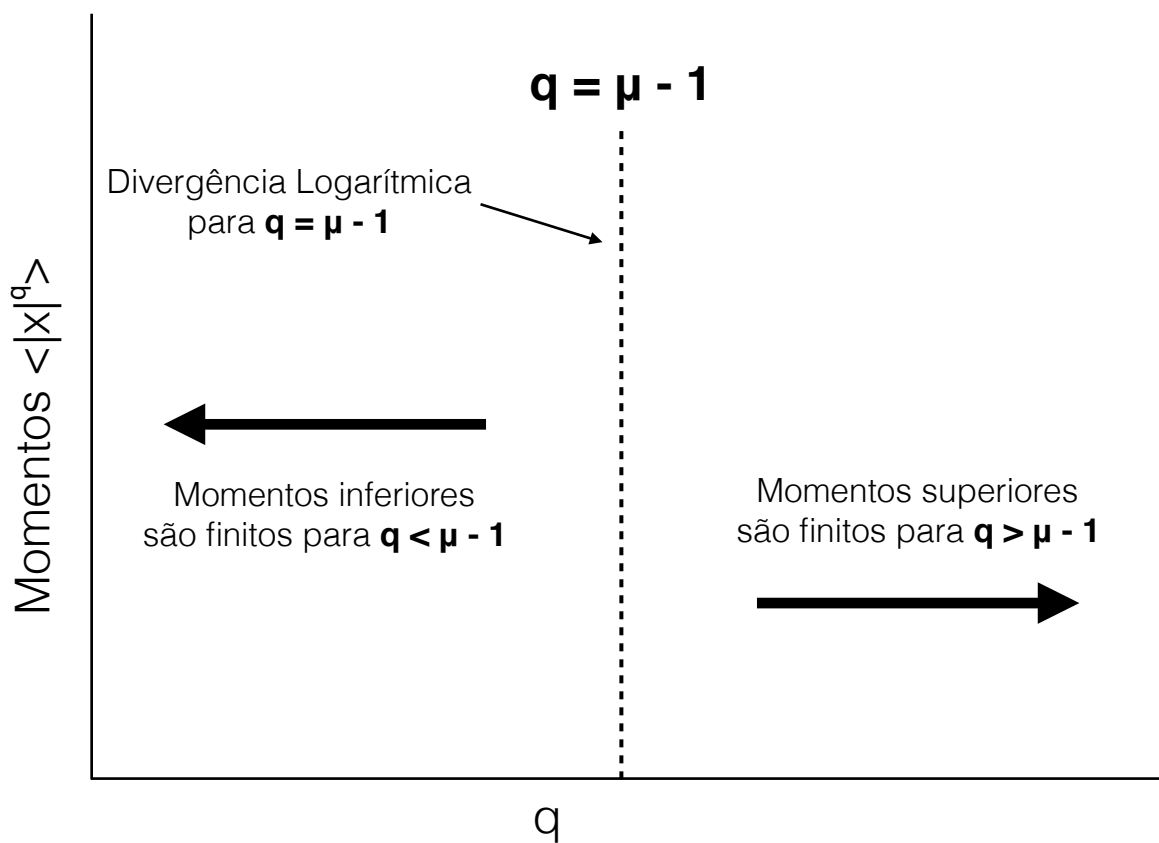


Figura 3.2: Para uma distribuição lei de potência $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$ de passos ou tamanho de passos ℓ_j momentos superiores não existem. Especificamente, o momento de ordem $\mu - 1$ diverge logaritmicamente com limite superior, and todos momentos superiores divergem como alguma potência de limite superior. Momentos inferiores permanecem finitos. Momentos divergentes são uma consequência das propriedades de invariância de escala: sistemas livre de escala não tem características de escalas bem definidos.(figura retirada e adaptada de [31]).

lizando o formalismo CTRW (do inglês *Continuous Time Random Walk*), [31] pode-se expressar a velocidade finita por

$$\psi(\ell, \tau) = \psi(v\tau, \tau) \quad (3.60)$$

$$\psi(\ell, \tau) \propto \omega(\tau)\delta(\ell - v\tau). \quad (3.61)$$

A caminhada de Lévy corresponde a lei de potência nessa distribuição não-separável:

$$\psi \sim \ell^{-(\mu-1)}\delta(\ell - v\tau) \quad (3.62)$$

Por $\psi(\ell, \tau)$ não ser separável, a caminhada de Lévy necessita de uma equação mestre generalizada para sua descrição ^c.

Utilizando o argumento de escala *back-of-the-envelope*, para tentar entender de forma simplificada o comportamento superdifusivo do voo de Lévy. Considere o caso $\omega(\tau) \sim \tau^{-(1+\alpha)}$, que é o equivalente a tomarmos $\gamma(\ell) \sim \ell^{-(1+\alpha)}$ devido ao acoplamento espaço-tempo,

$$\tau \sim N, \quad 1 < \alpha < 2, \quad (3.63)$$

$$x = \sum_i^N \ell_j, \quad (3.64)$$

$$\langle \ell^2 \rangle \sim \int_a^t d\ell \ell^2 \ell^{1+\alpha} \sim t^{2-\alpha}. \quad (3.65)$$

Por $\langle \ell^2 \rangle$ ser finita e crescente, é de se esperar um comportamento de difusão normal, todavia com uma constante de difusão dependente do tempo. Notadamente, espera-se que $\langle x^2 \rangle$ seja proporcional $\langle \ell^2 \rangle$, uma vez que o esse último apresenta uma escala característica

^cPara mais informação, ver Metzler [125].

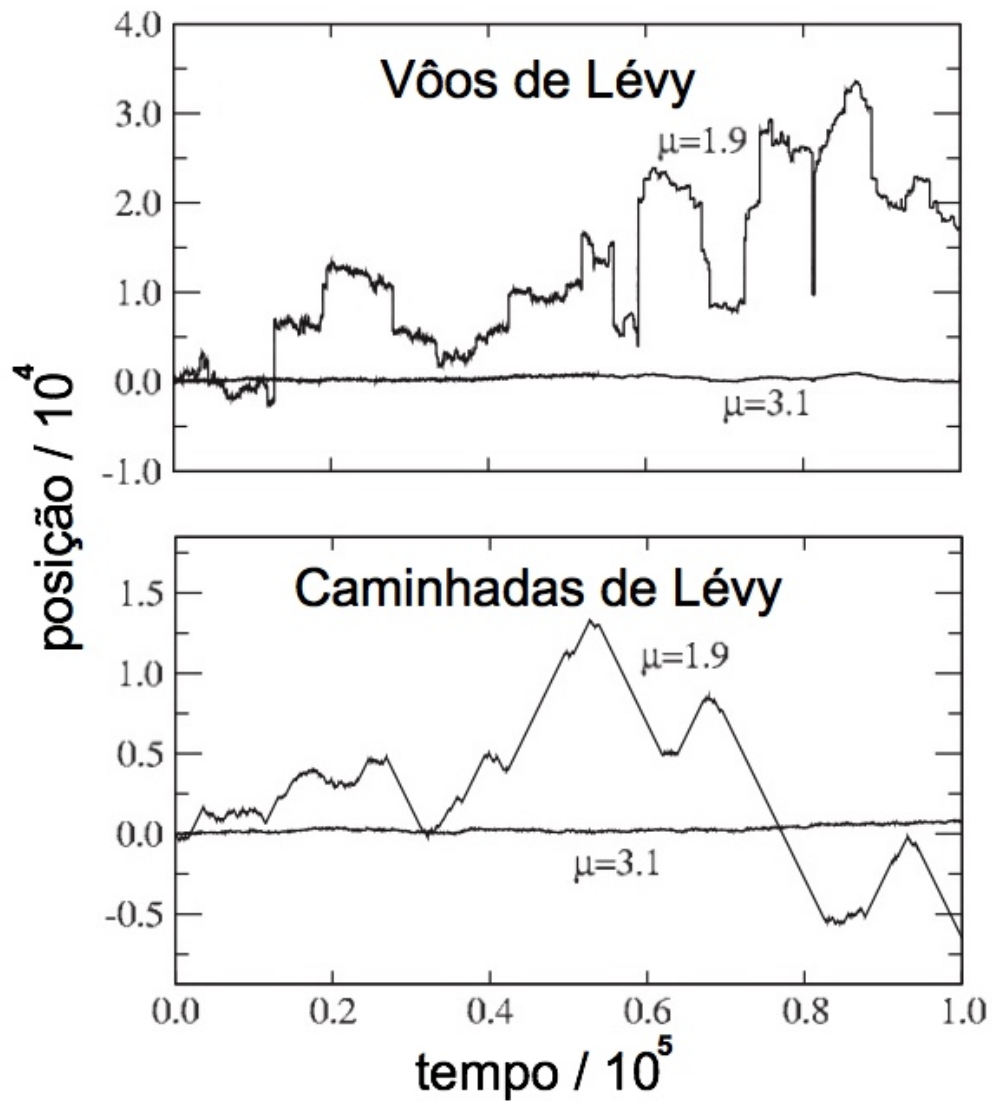


Figura 3.3: Voos e caminhadas de Lévy para diferentes expoentes μ . Para $\mu > 3$, a variância da distribuição de ruído é finita, e assim a caminhada aleatória é difusiva com expoente de Hurst $H = 1/2$. Todavia, para $\mu < 3$, o comportamento é superdifusivo. A única diferença entre voos e caminhadas de Lévy é que os caminhantes movem-se com velocidade finita, visto pelo declive finito no gráfico espaço-tempo. Em contraste, voadores mudam-se "instantaneamente" (figura retirada e adaptada de [31]).

de saltos,

$$\langle x^2 \rangle \sim \langle \ell^2 \rangle t. \quad (3.66)$$

Do resultado obtido na equação 3.65, tem-se:

$$\langle x^2 \rangle \sim t^{3-\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (3.67)$$

Da última expressão, pode-se concluir que para um limite de tempo grande,

$$H = \frac{3 - \alpha}{2} = \frac{4 - \mu}{2}, \quad 1 < \alpha < 2 \quad (3.68)$$

para caminhadas de Lévy Fig.(3.4).

Para $\alpha < 1$, o tamanho médio do salto diverge, então $H = 1$. Há correções logarítmicas para os casos de $\mu = 2$ e $\mu = 3$ para o deslocamento quadrático médio porque o comprimento médio do passo diverge logaritmicamente para $\mu = 2$ ($\mu = 3$). A figura 3.4 compara o expoente de Hurst para voos e caminhadas de Lévy [31].

Basicamente, a diferença entre caminhadas e voos de Lévy é a natureza do tempo operacional. Se o interesse do estudo está como uma função do tempo real t , deve-se utilizar a expressão caminhada de Lévy. Entretanto, se o foco do estudo é expressar a escala em termos do número de passos j da caminhada aleatória, é apropriado utilizar o termo voo de Lévy porque j é proporcional ao tempo de ação para um voo de Lévy[31].

Caminhadas de Lévy tornam-se semelhantes a voos de Lévy apenas para um período de tempo grande. Embora caminhadas e voos de Lévy tenham muitas características em comum, algumas diferenças singulares não devem ser negligenciadas. Uma característica dos voos de Lévy é possuir velocidades infinitas, o que é fisicamente impossível, assim não se pode descrever voos de Lévy num espaço físico geométrico. Não obstante, eles são possíveis, por exemplo, uma partícula numa cadeia de polímeros pode dar um salto muito grande dentro dessa cadeia, embora a distância Euclidiana possa ser pequena[78].

Por outro lado, caminhadas de Lévy não violam as leis físicas. Precisamente, nenhuma quantidade física mensurável diverge no tempo para uma caminhada de Lévy. A variância infinita do processo de Lévy torna-se uma questão de tempo infinito apenas

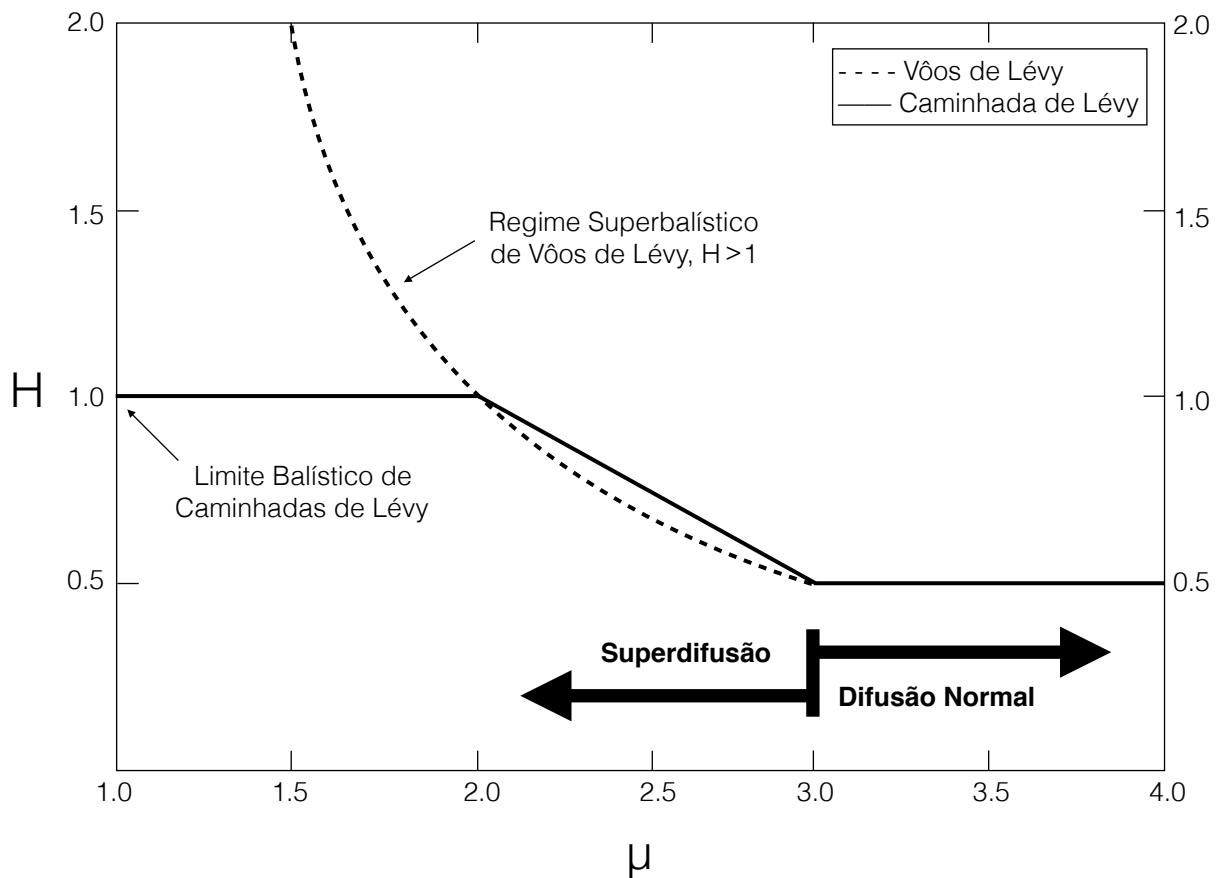


Figura 3.4: O expoente de Hurst, $H=H(2)$ para o comportamento do deslocamento quadrático médio no limite de muito tempo para caminhada de Lévy, como uma função do expoente μ da cauda de lei de potência $\sim \ell^{-\mu}$ na distribuição do tamanho do salto. Para $1 < \mu \leq 3$, o índice de Lévy correspondente é $\alpha = \mu - 1$. Caminhadas de Lévy são superdifusivas para $\mu < 3$, isto é, $\alpha < 2$. Para fins de comparação, o comportamento também é apresentado como voos de Lévy; entretanto, voos de Lévy, de fato, tem deslocamento quadrático médio divergente para $\alpha < 2$, não sendo possível definir $H=H(2)$. Não obstante, uma vez que, voos de Lévy são monofractais, pode-se ainda definir $H = H(q)$ para $q < \alpha$ (figura retirada e adaptada de [31]).

porque um caminhante de Lévy pode percorrer uma distância máxima de vt em um tempo t . Logo, todos os momentos do propagador permanecem finitos em todo tempo, diferente dos voos de Lévy, que possuem momentos divergentes. Em forrageamento^d e movimento animal, caminhadas de Lévy são mais plausíveis[31].

^dEm biologia, forrageamento é a busca animal por recursos alimentícios na natureza. Para uma leitura mais detalhada ver capítulo 2 de [31] e [126, 127].

O DESAFIO DA ANÁLISE DE DADOS EM TRAJETÓRIAS CURVAS

Nesse capítulo serão abordados dois fatores que são relevantes em estudos a respeito de buscas aleatórias. O primeiro deles é a superdifusividade como estratégia de busca aleatória e o segundo é um método para identificação do padrão de Lévy em caminhadas em dimensões que, originalmente, não favorecem a identificação deste padrão.

4.1 UM CRITÉRIO PARA O USO DA ESTRATÉGIA DE LÉVY EM BUSCAS ALEATÓRIAS

A difusão gerada por caminhadas aleatórias é um problema clássico na física[60]. Quando o tempo t é grande o suficiente, a raiz do deslocamento quadrático médio é proporcional a t^α . Para a difusão normal tem-se $\alpha = 1/2$, na superdifusão $\alpha > 1/2$ e na subdifusão $\alpha < 1/2$. Há vários tipos de caminhadas aleatórias, por exemplo, *CRW* que por

possuir característica markoviana tende a uma difusão browniana para tempos maiores que o tempo de correlação[94]. Outro exemplo são caminhadas e voos de Lévy[60] que podem dar origem a um comportamento superdifusivo genuíno numa grande quantidade de fenômenos, isto é, $\alpha > 1/2$ [101, 95]. Diferentemente de *CRW*, caminhadas de Lévy utilizam distribuições de comprimento de passo que renormalizam com distribuições de Lévy α -estáveis[60].

Para passos ℓ_j , as caudas de longo alcance destas distribuições seguem a lei de potência

$$P(\ell_j) \sim \ell_j^{-\mu}, \quad \ell_j \gg \ell_0, \quad (4.1)$$

onde ℓ_0 é uma distância mínima típica para o regime de caudas de lei de potência, e $\alpha_L = \mu - 1$ é o índice de Lévy. Para $2 \leq \mu < 3$ tem-se superdifusão, para $\mu \geq 3$ tem-se difusão normal e quando $\mu \rightarrow 1$ tem-se movimento balístico. Ambas classes supracitadas explicam diversos fenômenos e a escolha entre elas dependerá das propriedades estatística e de escala do sistema que será analisado.

O trabalho proposto por [94] visa estabelecer um critério geral que possa distinguir com mais cuidado entre um processo difusivo e um processo superdifusivo invariante de escala.

A identificação de correlações em série temporais pode ser obtida por diferentes métodos. Em geral, a detecção de correlação em padrões *CRW* nos quais não há caminhadas e voos de Lévy não é uma tarefa muito complicada. Todavia, características intrínsecas de dados experimentais podem dificultar essa distinção, uma vez que, por exemplo, a trajetória pode ser dividida em uma quantidade de passos pequenos para gerar uma caminhada aleatória[21, 96].

Geralmente, os procedimentos padrão comumente utilizados consideram o movimento animal um processo contínuo. Então, discretizar um conjunto de dados de movimento animal é uma tarefa arbitrária. No caso dos pontos de mudança de direção entre passos sucessivos, a dependência está no comprimento dos passos, que por sua vez, depende do processo de discretização. Logo, a discretização introduzida é um parâmetro técnico.

Um parâmetro significativo é a definição de uma tolerância entre a caminhada

aleatória discretizada e a trajetória original. Se a tolerância é pequena, a discretização levará a perda das características de Lévy do conjunto de dados original. Com intuito de compensar este efeito, os passos que são discretizados preservam a memória direcional. Então, o principal desafio na análise de dados experimentais é como diferenciar um *CRW* de uma caminhada de Lévy.

O critério proposto por [94] consiste em distinguir um *CRW* de uma caminhada de Lévy, posto que *CRW* tem comportamento superdifusivo apenas em escalas suficientemente pequenas. Uma vez que um *CRW* converge para um movimento browniano para valores muito maiores que o tempo de correlação τ , qualquer dado que abranger um período Δ menor que o tempo de correlação não terá informação suficiente para fazer a distinção entre os tipos de caminhada aleatória. É possível estimar o tempo de medida, $\tau_{medida} = -1/\ln[\langle \cos[\theta] \rangle_{medida}]$, no qual $\langle \cos[\theta] \rangle_{medida}$ denota o valor medido experimentalmente do primeiro momento do cosseno[94]. A proposta foi de um critério necessário mas não suficiente para estabelecer um comportamento superdifusivo:

$$\Delta \gg \tau_{medida} = -\frac{1}{\ln[\langle \cos[\theta] \rangle_{medida}]} \quad (4.2)$$

Se os dados correspondem a uma escala temporal Δ com duas ordens de magnitude maior que o valor do tempo de medida τ_{medida} , então é possível fazer a distinção de uma legítima caminhada aleatória superdifusiva de um *CRW*. De fato, um *CRW* nessa escala contém 10^2 ou mais trechos de caminhadas aleatórias, o que torna possível uma análise estatística adequada[94].

É bem verdade, que uma autêntica caminhada de Lévy superdifusiva possui uma correlação temporal divergente, todavia ao utilizar $\langle \cos[\theta] \rangle_{medida}$ para estimar τ_{medida} essa correlação nunca irá divergir, exceto se a distribuição dos pontos de mudança de direção for uma δ . No caso dos dados analisados não possuírem abrangência temporal suficiente, a identificação da existência de uma genuína caminhada de Lévy só poderá ser feita por métodos indiretos como testes de auto afinidade ou verificação do alcance do decaimento da lei de potência dos ângulos de rotação.

Por outro lado, se os dados analisados satisfazem o critério proposto por [94], então um teste direto de superdifusão em escalas maiores que o tempo de medida τ_{medida} pode eliminar falsos positivos para escalas menores, que aparecem devido a persistência Markoviana dos ângulos de rotação.

De fato, este critério é necessário mas não suficiente para a detecção de uma legítima caminhada de Lévy. Isto ocorre pelo fato de que teoricamente pode-se estimar um limite mínimo para τ_{medida} , mas não um limite máximo. Portanto, mesmo que um conjunto de dados satisfaça o critério e seja identificado um padrão de superdifusividade em escalas maiores que τ_{medida} , isso não é suficiente para excluir o comportamento difusivo em escalas maiores.

Algumas questões a respeito das flutuações em torno de τ_{medida} podem gerar debate em torno da distinção de *CRW's* e caminhadas de Lévy. Entretanto, uma possível redução no valor τ_{medida} não acarretaria problema para a identificação do tipo de caminhada aleatória, uma vez que o valor já obtido é relativamente pequeno^a.

O critério por si só não restringe a escolha dos métodos de análise de dados para caracterizar a escala da raiz quadrada média do deslocamento. Na verdade, o critério fornece a escala mínima necessária que permite, em princípio, estabelecer a diferença entre os dois tipos de difusão[94].

4.2 MÉTODO DE HUMPHRIES *et al* PARA ANÁLISE DE TRAJETÓRIA

Outra perspectiva a ser abordada sobre a utilização da estratégia de Lévy em buscas aleatórias é projeção de dados de trajetórias 2D e 3D em uma única dimensão, o que facilitaria a identificação de padrões de Lévy. Tal perspectiva será apresentada nos parágrafos subsequentes.

Como já citado anteriormente, caminhadas ou voos de Lévy podem prever teoricamente como otimizar buscas em situações nas quais os recursos são escassos, por exemplo, quando a presa está fora do alcance sensorial de um predador [31, 97].

Em dados unidimensionais, os pontos de mudança de direção são inequívocos e de simples identificação, uma vez que nesses pontos há uma inversão no sentido da caminhada [35, 33, 110, 111]. Embora os pontos de mudança de direção unidimensionais

^aPara uma explicação mais detalhada do critério, verifique a Ref. [94].

não correspondam exatamente aos pontos de mudança de direção reais em movimento animal tridimensional, as propriedades globais de escala de voos de Lévy são preservadas [30]. Vale ressaltar que a que otimização da busca aleatória utilizando a estratégia de Lévy ocorre quando há escassez no recurso, enquanto que na abundância de recurso a estratégia browniana é mais eficaz [31].

Em dados que possuem baixa resolução espacial, os pontos de mudança de direção são relativamente fáceis de identificar, todavia a quantidade e diversidade de erros tornam esses dados impróprios para um teste rigoroso sobre a existência de um comportamento de Lévy [112]. Dados com alta resolução espacial tornam a identificação dos pontos de mudança de direção bastante complexa [30]. Há prova matemática que é possível projetar voos de Lévy bi e tridimensionais em uma dimensão e preservar o expoente da lei de potência [35] e que o ajuste mais típico para dados de movimento animal é distribuição truncada Pareto-Lévy [33].

Para testar a hipótese que o expoente (μ) do voo de Lévy permanece simétrico em todas as dimensões, Humphries *et al.* [30] projetaram os dados simulados 3D em cada uma das dimensões, calculando o deslocamento entre dados consecutivos. Para os dados simulados, foi usado a estimativa máxima de probabilidade através do método descrito em [20, 38]. Os dados experimentais foram testados através de peso Akaike e teste de qualidade de ajuste descrito em [20].

A projeção em uma dimensão de dados tridimensionais gera passos com comprimentos menores que o comprimento de passo mínimo ℓ_{min} que não seguem a distribuição de lei de potência (que já eram esperados), o que gera uma inconsistência ao analisar a distribuição de comprimentos de passos. Embora os passos abaixo do comprimento de passo mínimo ℓ_{min} não se encaixem numa distribuição tipo lei de potência, os passos acima de ℓ_{min} seguem a distribuição truncada Pareto-Lévy [30]. Logo, para fazer uma análise precisa da existência de propriedades de lei de potência em dados 2D e 3D projetados em 1D é necessário estabelecer um novo comprimento mínimo de passo ℓ_{min} . Com base nisso, é possível mostrar a conservação das características de voo de Lévy em trajetórias projetadas em 1D [30].

Um método capaz de identificar ângulos de rotação e comprimentos de passos de dados bi e tridimensionais em alta resolução através da projeção da projeção desse passos em uma dimensão foi proposto por Humphries *et al.* [30]. Para dados obtidos por simulação computacional, o tamanho mínimo de passo, ℓ_0 , é conhecido. Todavia, quando

os dados analisados são experimentais, esse ℓ_{min} não pode ser determinado *a priori*. No método proposto, Humphries *et al.* [30] utilizaram uma adaptação teste de qualidade de ajuste (Kolmogorov-Smirnov GOF) para determinar o melhor valor de ajuste para ℓ_{min} e também simularam potenciais erros experimentais das medidas:

- i - baixa resolução espacial;
- ii - o buscador faz mais mudanças de direção que o sistema grava;
- iii - o sistema grava mais mudanças de direção que as feitas pelo buscador;
- iv - lacunas nas gravações.

Mesmo havendo erros, que em alguns casos são graves, todos dados simulados seguem a distribuição truncada Pareto-Lévy e a estimação do expoente foi precisa o suficiente para não interferir na análise nos padrões de comportamento para testar a hipótese de busca por voo de Lévy.

No trabalho de Humphries *et al* foi verificado a suposta simetria dimensional dos padrões de movimento de Lévy usando dados simulados de comprimentos de passo de caminhadas de Lévy 3D, com uma gama de expoentes, a partir da qual qualquer uma das três dimensões pode ser utilizada para criar um conjunto de dados projetados. Baixa resolução temporal e espacial que são efeitos que poderiam abalar a confiabilidade da identificação dos comprimentos de passo e por conseguinte a detecção de um comportamento de voo de Lévy também foram examinados. A fim de mostrar a utilidade desta metodologia, um trabalho anterior, também proposto por Humphries [20], foi re-analisado para verificar a presença do padrão de caminhada Lévy na distribuição de lugares de pouso de albatrozes errantes (*Diomedea exulans*).

Os resultados obtidos por Humphries *et al.* são claros a respeito da preservação do padrão de Lévy quando dados de movimentos de Lévy em 3D são projetados em uma dimensão. Isso faz com que a identificação da presença de um padrão de Lévy, ou sua ausência em conjuntos complexos de movimentação seja direta e objetiva. A reanálise mostrou que dados projetados em uma dimensão preservam as características da distribuição de passos em dimensões superiores, obtendo resultados que métodos anteriores não obtiveram.

Vale ressaltar que nem todos os conjuntos de dados dos albatrozes errantes são

ajustáveis com estratégia de Lévy, uma vez que eles utilizam pistas olfativas e nestes casos eles abandonam a estratégia de busca e vão diretamente ao ponto [113]. Uma vez que trajetórias que seguem o padrão de Lévy otimizam a busca aleatória quando os alvos são escassos [31, 97, 98] e que albatrozes errantes em busca de presas, em situações em que estas são escassas e em que sua distribuição não é previsível, descrevem uma trajetória de Lévy, fornece uma evidência que a escolha da estratégia de Lévy pode ser uma evolução natural[20, 111].

Diretamente, o trabalho de Humphries *et al* [30] (sic):

1. A first step in the analysis of complex movement data often involves discretisation of the path into a series of step-lengths and turns, for example in the analysis of specialised random walks, such as Lévy flights. However, the identification of turning points, and therefore step-lengths, in a tortuous path is dependent on *ad-hoc* parameter choices. Consequently, studies testing for movement patterns in these data, such as Lévy flights, have generated debate. However, studies focusing on one-dimensional (1D) data, as in the vertical displacements of marine pelagic predators, where turning points can be identified unambiguously have provided strong support for Lévy flight movement patterns.

2. Here, we investigate how step-length distributions in 3D movement patterns would be interpreted by tags recording in 1D (i.e. depth) and demonstrate the dimensional symmetry previously shown mathematically for Lévy-flight movements. We test the veracity of this symmetry by simulating several measurement errors common in empirical datasets and find Lévy patterns and exponents to be robust to low-quality movement data.

3. We then consider exponential and composite Brownian random walks and show that these also project into 1D with sufficient symmetry to be clearly identifiable as such.

4. By extending the symmetry paradigm, we propose a new methodology for step-length identification in 2D or 3D movement data. The methodology is successfully demonstrated in a re-analysis of wandering albatross Global Positioning System (GPS) location data previously analysed using a complex methodology to determine bird-landing locations as turning points in a Lévy walk. For this high-resolution GPS data, we show that there is strong evidence for albatross foraging patterns approximated by truncated Lévy flights spanning over 3.5 orders of magnitude.

5. Our simple methodology and freely available software can be used with any 2D or 3D movement data at any scale or resolution and are robust to common empirical measurement errors. The method should find wide applicability in the field of movement ecology spanning the study of motile cells to humans.

Em síntese, o método proposto por Humphries *et al.* projeta caminhadas bidimensionais e tridimensionais em uma dimensão e elimina os passos que estão abaixo de ℓ_{min} . Esse método da projeção é útil porque a identificação de um padrão de Lévy é mais fácil em trajetórias unidimensionais, uma vez que os pontos de mudança de direção, isto é, os pontos onde ocorrem as mudanças de direção e os comprimentos de passos são mais facilmente identificados se comparados com trajetórias bi e tridimensionais.

Ademais, os dados analisados por Humphries *et al.* mostram que trajetórias de Lévy 3D possuem simetria dimensional na qual o padrão global e o expoente são preservados quando a dimensão é reduzida para 1. Desta maneira, analisar uma trajetória 3D projetada em uma dimensão é suficiente para concluir se há ou não um padrão de Lévy na trajetória analisada.

MODELOS TEÓRICOS

As caminhadas e voos de Lévy formam uma variedade de caminhadas aleatórias que conduzem à difusão anômala [31]. Pode-se estabelecer um paralelo entre movimento browniano e caminhadas/voos de Lévy. O primeiro, tem a função distribuição de probabilidades (FDP) $P(\ell)$, de comprimento de passos ℓ com momentos estatísticos finitos. Já caminhada de Lévy unidimensional, tem passos ou “voos” de comprimento ℓ definidos por $P(\ell) \sim \ell^{-\mu}$, que é uma lei de potência. Isto provoca divergência dos momentos estatísticos de ordem $\geq \mu - 1$. Uma vez que os passos aleatórios são não correlacionados ou com correlação de curto alcance [114], o TLC será aplicado apenas quando o expoente μ é grande o suficiente para a variância da FDP ser finita. Quando a dimensão utilizada é 1, o movimento browniano aparece como resultado do TLC para valores de $\mu \geq 3$. Para caminhadas e voos de Lévy, a generalização do TLC conduz à família das distribuições de Lévy α -estáveis, com o parâmetro α de Lévy vinculado ao expoente da lei de potência através da relação $\alpha = \mu - 1$ (valores de $\alpha \neq 0$ ou $\mu \neq 1$ não corresponde a FDP's normalizáveis). Essas características também generalizam em dimensões superiores. Vale ressaltar que, para os casos de dimensão superiores, a análise do expoente μ deve ser cuidadosa [31].

Portanto, uma tática adequada para concluir se uma caminhada aleatória, seja ela produzida por dados experimentais ou simulação computacional, é uma caminhada

de Lévy consiste em analisar a FDP do tamanho dos passos. O método de inferência [30, 36, 38] mostra-se adequado para identificar um comportamento puro de uma caminhada aleatória de Lévy. Entretanto, quando se trata de dados experimentais, a análise requer mais atenção devido ao grau de dificuldade, uma vez que complicações técnicas e a presença de ruído inerente ao próprio conjunto de dados causa uma limitação na análise [30], como, por exemplo, um movimento browniano com correlação de curto alcance que pode ser superposto num modelo de caminhada de Lévy.

Esse ruído intrínseco, presente em dados experimentais, pode causar a descaracterização da caminhada de Lévy, pois a presença dele pode causar uma quebra ou “corte” nos passos grandes, que são essenciais para identificar a caminhada de Lévy. Esse “corte” pode manifestar-se mesmo sem ruído. Considere o exemplo de uma caminhada de Lévy com velocidade constante. Um dado mostrando um passo muito grande ou voo de 1000 unidades de distância pode ser interpretado como 1000 passos consecutivos de valor unitário de comprimento tomados todos na mesma direção. Se o processo de discretização usado nos dados empíricos considerar apenas os passos de comprimento unitário, então a FDP da caminhada de Lévy não terá mais uma cauda tipo lei de potência. Por outro lado, se os dados são discretizados de acordo com a regra que um passo é a distância entre mudanças de direção, então a FDP do comprimento de passos da caminhada de Lévy claramente terá cauda tipo lei de potência. Todavia, nesta representação haverá anticorrelações temporais, uma vez que a cada mudança de direção o sinal da velocidade mudará. Logo, mesmo para o caso unidimensional, detectar ou perceber uma caminhada de Lévy estará condicionada à maneira que a trajetória da caminhada é representada.

Para evitar determinados problemas, tornando, assim, a detecção de uma caminhada de Lévy mais fácil, a aplicação de reescalonamento no conjunto dos dados a ser analisado é uma boa opção. Desta maneira, a função densidade de probabilidade dos comprimentos de passos foi reconstruída. Considerando que o ruído tem uma escala determinada, ao utilizar *coarse-graining*, o efeito do ruído será atenuado. Assim sendo, a análise foi concentrada no modo de escala aumentada em vez dos detalhes de escala reduzida de processo estocástico. Isto é, as correlações de alcance finito são eliminadas se estão fora da escala escolhida. Portanto, se a caminhada é um *CRW* unidimensional que possui termos pequenos, após o processo de reescalonamento ela se mostrará como uma caminhada browniana simples [115, 116]. Em contrapartida, se a caminhada possui um verdadeiro padrão de caminhada de Lévy unidimensional, ela tem propriedades livres de escala que permanecerão mesmo após o *coarse-graining*. Isto significa que as propriedades auto afins da caminhada de Lévy aparecerão mesmo após o reescalonamento [34, 35]. À

vista disso, conclui-se que caminhadas de Lévy continuam com padrão de caminhadas de Lévy mesmo após *coarse-graining*, enquanto que *CRW's* aparentam ser movimento Browniano depois de *coarse-graining*.

Infelizmente, quando a dimensão da caminhada foi aumentada, isto é, saiu-se do regime unidimensional e trabalhou-se com duas e três dimensões, essa idéia de reescalonamento pode não funcionar sem sofrer modificações. Isso decorre do fato de existir curvatura em caminhadas aleatórias em duas e três dimensões, o que gera dificuldades que não aparecem na caminhada unidimensional e que estão associados a discretização do problema[21, 24, 25, 26, 27, 28]. Efetivamente, como segmentar rigorosamente na forma de passos discretos de uma caminhada aleatória quando a caminhada em questão possui curvatura? Esse critério de estabelecer onde termina um passo e começa o passo subsequente é subjetivo. Nesta perspectiva, um método proposto recentemente[30] avançou de forma relevante estudos de análise de caminhadas de Lévy. Basicamente, o método supracitado investiga o fato de que a projeção unidimensional de uma caminhada browniana em duas ou três dimensões também é uma caminhada browniana, esta lógica também é válida quando a caminhada aleatória em questão é uma caminhada de Lévy. Vale salientar que a projeção unidimensional de uma caminhada originalmente em duas ou três dimensões não pode conter qualquer tipo de curvatura. Deste modo, uma caminhada n -dimensional pode ser estudada como n trajetórias unidimensionais separadas. Então, um método que é utilizado para o estudo de caminhada de Lévy unidimensional pode, assim, ser aplicado com êxito às trajetórias projetadas.

Humphries *et al* [30] empregaram esta idéia para detectar caminhadas de Lévy, sejam elas oriundas de dados experimentais ou geradas por simulação computacional. Os resultados alcançados por [30] evidenciam que mesmo para caminhadas que são numericamente controladas, quando é feita a projeção unidimensional o número de tamanho de passos é menor que o comprimento real ℓ_{min} . O que é uma desvantagem do ponto de vista prático. Posto que quando se trabalha com caminhadas simuladas o valor de ℓ_{min} é previamente fixado e em dados experimentais esse valor não é conhecido *a priori*, se faz necessário a utilização de um método objetivo para estimar o valor de ℓ_{min} [38]. Observe que, em geral, as FDP's dos passos projetados denunciam a existência de dois domínios: no primeiro deles prevalece a relação de curto alcance que é regida pela estatística browniana; nesse regime se sobressaem os passos que devem ser eliminados; já o outro domínio transmite precisamente as propriedades estatísticas da caminhada original. Portanto, para impedir a interferência dos tamanhos de passos artificialmente pequenos, neste método eles são apagados do conjunto de dados [30] antes de uma última análise

estatística unidimensional.

Neste trabalho, foi testado o método da projeção usando dados de simulação computacional e foi introduzido uma nova maneira de lidar com o regime de curto alcance das projeções unidimensionais das caminhadas aleatórias bidimensionais e tridimensionais. Nesta nova maneira, é feito um reescalonamento da caminhada, preservando, assim, as propriedades estatísticas de longo alcance das caminhadas originais, em vez de apenas eliminar os passos projetados unidimensionais de tamanho menor que ℓ_{min} que não interessam neste trabalho. Para obter essa análise, foi utilizado o método *coarse-graining* com intuito de conseguir uma trajetória com uma resolução inferior a da trajetória original. Após refazer a caminhada, toda a informação abaixo da nova escala determinada foi eliminada (este é um efeito bem conhecido associado com o teorema de Nyquist [117]).

Uma vez que o método foi estabelecido, torna-se necessário verificar a capacidade da projeção unidimensional de identificar o padrão de caminhada de Lévy em caminhadas aleatórias em dimensões mais altas. Para isso, duas caminhadas aleatórias curvas bidimensionais diferentes são utilizadas [22, 118], que serão definidas nas seções subsequentes.

5.1 CAMINHADA 1 - (MODELO 1)

Na primeira caminhada, o modelo utilizado é o de caminhada de Lévy curva bidimensional. Primeiramente, é gerada uma caminhada de Lévy unidimensional tradicional de comprimento total $L = 10^5$, com passos de tamanho $\ell_j \geq \ell_0 = 1$, para $j = 1, 2, \dots, N$. Neste procedimento, passos maiores que 10% de $L = 10^5$, ou seja, $\ell_j > 10^4$ são sumariamente eliminados, de maneira que a estatística não é definida por um único passo. A caminhada de Lévy truncada resultante é conhecida [119] porque preserva as propriedades estatísticas da caminhada de Lévy original, para uma comprimento considerável [118].

Com isso, N *CRW's* são geradas utilizando a sequência de N tamanhos de passos. Esses *CRW's* são gerados assim: o j -ésimo *CRW* tem tamanho de passo fixo ℓ_0 e comprimento total ℓ_j , de modo que o número de passos N_j no j -ésimo *CRW* é dado pelo maior inteiro $\leq \ell_j/\ell_0$. Os N_j ângulos são gerados a partir da *Wrapped Cauchy Distribution*

(*WCD*)^a com parâmetro de largura dado por [22]:

$$\rho_j = \frac{e^{-1} - e^{-\ell_j/\ell_0}}{e^{-1} - 1}. \quad (5.1)$$

Isto implica que o comprimento de correlação ξ_j do j -ésimo *CRW* é comparável ao correspondente valor de tamanho de passo ℓ_j da caminhada de Lévy subjacente. Assim os N *CRW's* imitam N segmentos tradicionais da caminhada de Lévy. Finalmente, os N *CRW's* são unidos e as emendas feitas são suaves e utilizam o método descrito na referência [22], as técnicas são irrelevantes para o propósito do presente trabalho. Assim, o comprimento total da caminhada que teve os pontos subsequentes ligados coincide com o comprimento da caminhada de Lévy unidimensional original.

A caminhada aleatória bidimensional que teve os pontos ligados é localmente um *CRW* não markoviano, mas integralmente é uma caminhada de Lévy curva. Originalmente, curvaturas não são incluídas na definição de caminhada de Lévy [120]. Aqui, a curvatura no **caminhada 1** aparece devido a *WCD's* dos ângulos de rotação. A conexão entre o conjunto de comprimento de correlações $\{\xi_j\}$ das *WCD's* e os tamanhos de passos $\{\ell_j\}$ do modelo de caminhada de Lévy subjacente implica que a **caminhada 1**, de fato, corresponde a uma caminhada aleatória curva superdifusiva com correlações de lei de potência de longo alcance e propriedades livres de escala [22, 121, 122].

^aDistribuição estatística oriunda de um empacotamento de uma distribuição de Cauchy em volta de um círculo.

5.2 CAMINHADA 2 - (MODELO 2)

A **caminhada 2** é uma *CRW* que é gerada pelo simples embaralhamento dos ângulos de rotação da **caminhada 1**, desse modo, destruindo completamente todas as correlações. Conseqüentemente, as **caminhadas 1 e 2** têm, exatamente, a mesma distribuição de ângulos de rotação e tamanho de passos, embora as correlações de longo alcance estejam presentes apenas na **caminhada 1**. Especificamente, a distribuição teórica de tamanhos de passos para ambos modelos é uma função δ de Dirac, com todos passos tendo comprimento unitário $\ell_0 = 1$. A distribuição de ângulos de rotação para as duas caminhadas é uma *WCD*. A única diferença entre as duas caminhadas é que os ângulos de rotação estão em correlação de longo alcance na **caminhada 1** e na **caminhada 2** eles estão descorrelacionados.

Há um problema nessa análise, que é o fato de não ser possível distinguir a **caminhada 1** da **caminhada 2** apenas investigando as FDP's do tamanho de passos e dos ângulos de rotação. A ausência de correlações na **caminhada 2** faz dela uma caminhada difusiva. Por esse motivo, ela não possui propriedades livres de escala, tais propriedades são características das caminhadas de Lévy. Como resultado, as trajetórias curvas bidimensionais das duas caminhadas têm aparência similar quando lida-se em escalas pequenas ou quando há um número de passos muito pequeno. Não obstante, quando o tamanho da escala é aumentado, pode-se notar que as caminhadas diferem (Fig. 5.1).

Apesar da memória direcional da **caminhada 2** possuir curto alcance, devido a distribuição embaralhada dos ângulos de rotação, o caráter de longo alcance da **caminhada 1** segue o padrão de Lévy inerente na caminhada original. Na caminhada de Lévy original da **caminhada 1** o expoente superdifusivo de lei de potência é $\mu = 2$ e o comprimento de passo mínimo é $\ell_0 = 1$. Para as duas caminhadas foram geradas trajetórias aleatórias bidimensionais com comprimento total $L = 10^5$.

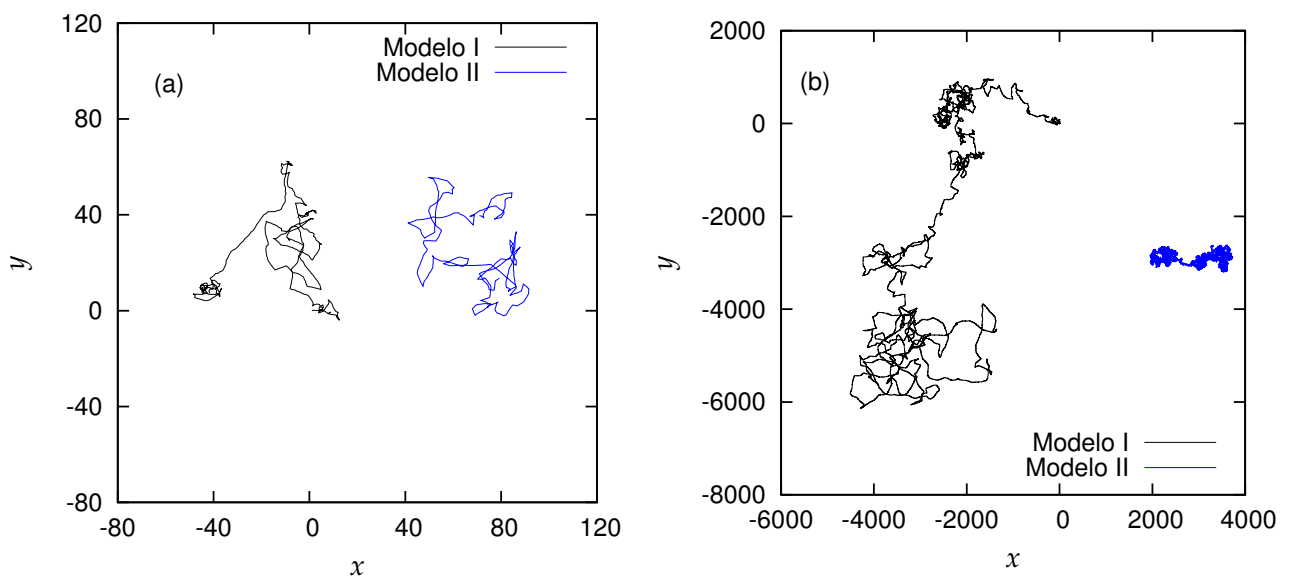


Figura 5.1: Trajetórias curvas bidimensionais de caminhadas aleatórias geradas usando os modelos 1 e 2, como comprimento total (a) 500 e (b) $\approx 10^5$. A **caminhada 1** representa um *CRW* não markoviano construído com a forma de uma caminhada de Lévy, enquanto a **caminhada 2** é uma caminhada markoviana com correlação de curto alcance. Ambos modelos compartilham as mesmas FDP's de tamanho de passos e de ângulos. Mas o modelo da **caminhada 1** tem ordem de longo alcance e é superdifusivo em tempos grandes, enquanto o modelo **caminhada 2** tem apenas ordem de curto alcance e é difusivo em longos períodos.

RESULTADOS

Neste trabalho foi aplicado o método da projeção [30] conjuntamente com o reescalonamento de trajetórias curvas bidimensionais obtidas pelos modelos, que geraram as caminhadas 1 e 2, que foram discutidos no capítulo anterior. Como já foi abordado no capítulo anterior, ambas caminhadas foram geradas utilizando a mesma FDP de tamanho de passos e ângulos de rotação. Isso torna a distinção dos dois modelos uma tarefa mais difícil e contando apenas com as análises das correlações direcionais.

Cada caminhada fornecida está associada com um conjunto de dados na forma (t_n, x_n, y_n) , com $n = 1, 2, \dots$. Essa relação denota o ordenamento temporal dos passos, e x_n e y_n são as coordenadas do plano xy . Uma vez que o comprimento de passos nos modelos que geraram as caminhadas 1 e 2 como ℓ_0 foi definido, tem-se

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 = \ell_0^2. \quad (6.1)$$

Para iniciar o processo de reescalonamento, é necessário definir parâmetro λ . O reescalonamento é introduzido quando é feita uma reamostragem na série temporal considerando os pontos separados por um intervalo de tempo λ no conjunto de dados

original. Com isso, tem-se um novo conjunto de dados dependendo do valor de λ escolhido. O valor $\lambda = 1$ corresponde ao conjunto de dados original, ou seja, sem reescalonamento.

A Fig. 6.1 mostra a FDP conjunta nas direções x e y dos vetores comprimento de passo (ou vetores velocidade) para $\lambda = 1$ (Fig.6.1(a)) (conjunto de dados original). Depois do reescalonamento os dados, usando $\lambda = 20$, foi obtido Fig. 6.1(b) e $\lambda = 100$ na Fig. 6.1(c).

Em todos os exemplos, os comprimentos de passos são dados pela distância Euclidiana:

$$\ell_n = \sqrt{(\ell_{n,x}^2 + \ell_{n,y}^2)}, \quad (6.2)$$

com $\ell_{n,x} = x_{n+1} - x_n$ e $\ell_{n,y} = y_{n+1} - y_n$ e o conjunto de coordenadas $\{x_n, y_n\}$ considerado depois do reescalonamento nas Fig. 6.1(b) e 6.1(c) e sem reescalonamento na Fig. 6.1(a). Cada par $(\ell_{n,x}, \ell_{n,y})$ está impresso numa região circular com raio correspondente ao comprimento de passo reescalonado máximo possível, $\lambda\ell_0$. O preenchimento desta região dá uma indicação visual da distribuição de comprimento de passos reescalonada. De fato, observe que todos comprimentos de passos são fixos em $\ell_n = \ell_0 = 1$ pelos dados original ($\lambda = 1$) de ambos modelos **1** e **2**. Quando um reescalonamento intermediário de $\lambda = 20$ é aplicado, a diferença entre as distribuições já se tornam notáveis, com os dados do **modelo 1** ainda mais provável que se encontrem perto da borda do círculo, enquanto o **modelo 2** apresenta pontos distribuídos por toda região circular. Mesmo para um reescalonamento maior usando $\lambda = 100$, a distribuição para o **modelo 1** ainda contem muitos passos grandes localizados próximos as bordas do círculo, em contraste com a distribuição tipo gaussiana do **modelo 2**, com alta densidade de pequenos passos e uma probabilidade de diminuir rapidamente para grandes deslocamentos.

A Fig. 6.1 indica que, a princípio, o reescalonamento usando $\lambda = 20$ já indica alteração no comportamento da caminhadas, o que poderia ser suficiente para diferenciar entre os modelos **1** e **2**. Conseqüentemente, após verificar que a distinção entre as caminhadas 1 e 2 é possível através desse método, a próxima etapa é quantificar esta diferença.

A Fig. 6.2 exhibe a raiz quadrada média do comprimento (*rms - do inglês: root mean square*) dos modelos **1** e **2** em função do parâmetro λ de reescalonamento. Esse

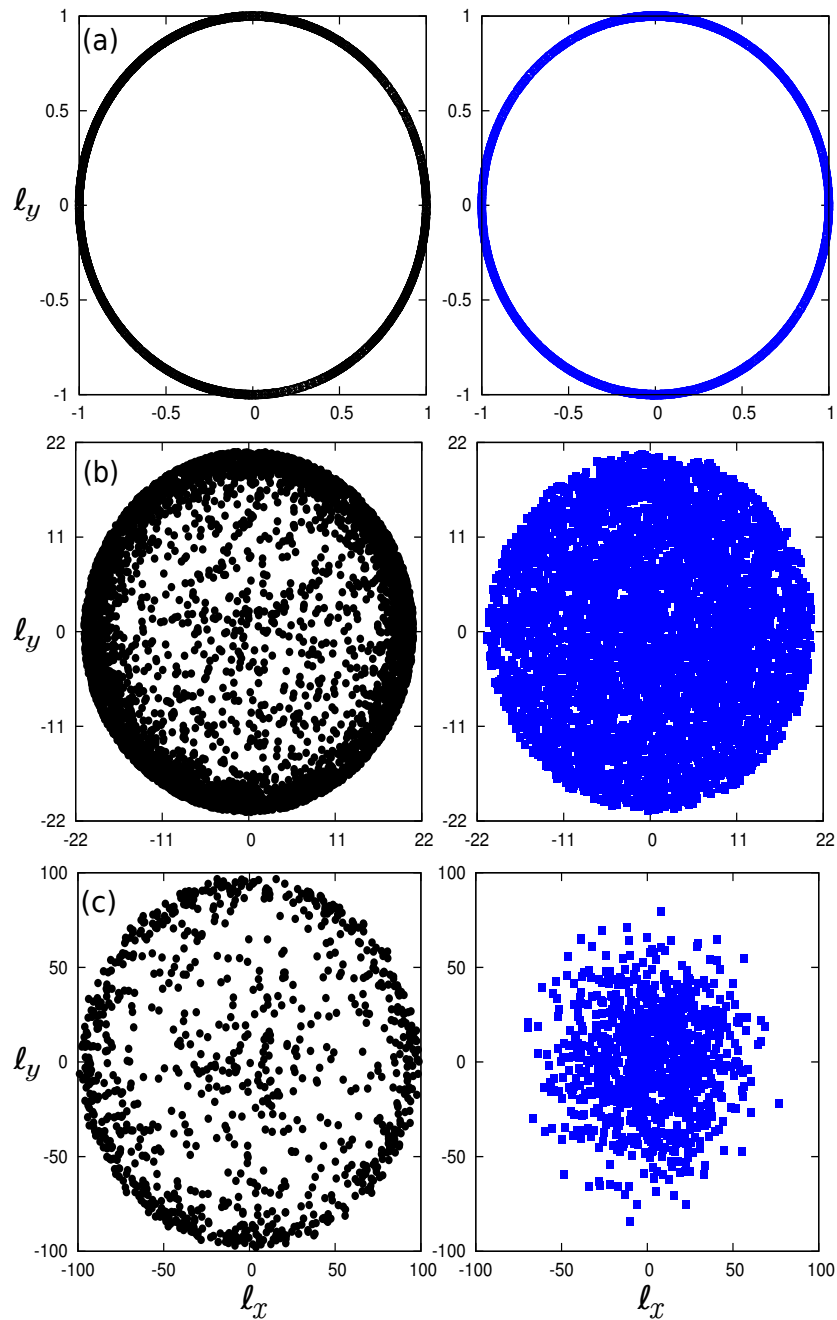


Figura 6.1: FDP conjunta nas direções x e y dos vetores comprimento de passo (ou vetores velocidade) para $\lambda = 1$ (a)(conjunto de dados originais), e dados reescalados usando (b) $\lambda = 20$ e (c) $\lambda = 100$. No conjunto de dados original (a) todos os passos são fixos e tem tamanho unitário, ou seja, $\ell_n = \ell_0 = 1$ para ambos modelos **1** (coluna esquerda) **2** (coluna direita). Como o reescalamento para maiores valores de λ são aplicados, a diferenças entre as distribuições dos modelos **1** e **2** tornam-se notáveis. A presença de grande passos no **modelo 1** é indicada pela linha densa e grossa na borda do círculo. Por outro lado, o dado reescalado do **modelo 2** é similar a uma gaussiana, com alta densidade de passos pequenos e uma probabilidade rapidamente decrescente para grandes deslocamentos. O ponto importante para ser observado é que o reescalamento ou renormalização traz a diferença entre os dois modelos. Sem o reescalamento, os modelos são visivelmente indistinguíveis, todavia após o reescalamento os modelos podem ser facilmente diferenciáveis.

valor é definido por:

$$\ell_{rms} = \langle \ell^2 - \langle \ell \rangle^2 \rangle^{1/2} \quad (6.3)$$

Observe que no **modelo 2**, a passagem para o comportamento browniano, isto é, $\ell_{rms} \sim \lambda^H$, com $H = 0.5$, começa próximo a um valor de $\lambda \approx 50$. Em concordância com a referência [22], abaixo desse valor, um comportamento superdifusivo momentâneo aparece no **modelo 2**. A superdifusividade do **modelo 1**, com $H > 0.5$, não mostra convergência para o regime do movimento browniano. Vale ressaltar que se o valor do parâmetro λ de reescalonamento é muito grande uma perda de significância estatística para a análise pode acontecer.

A partir destes resultados, pode-se concluir que o reescalonamento dos dados é um método eficaz para distinguir os modelos **1** e **2**. Entretanto, caminhadas aleatórias superdifusivas são formadas por uma variedade de caminhadas aleatórias, isto é, nem sempre uma caminhada aleatória superdifusiva implicará numa caminhada de Lévy. O movimento browniano fracionário é um exemplo de uma caminhada aleatória superdifusiva que não é caminhada ou voo de Lévy [31].

Para diferenciar uma caminhada de Lévy de outras caminhadas aleatórias superdifusivas precisa-se utilizar de uma estatística boa o suficiente para poder identificar os ângulos de rotação sem cometer erros. Para obter esse resultado, utiliza-se o método da projeção, com o qual a identificação dos ângulos de rotação é obtida mais facilmente.

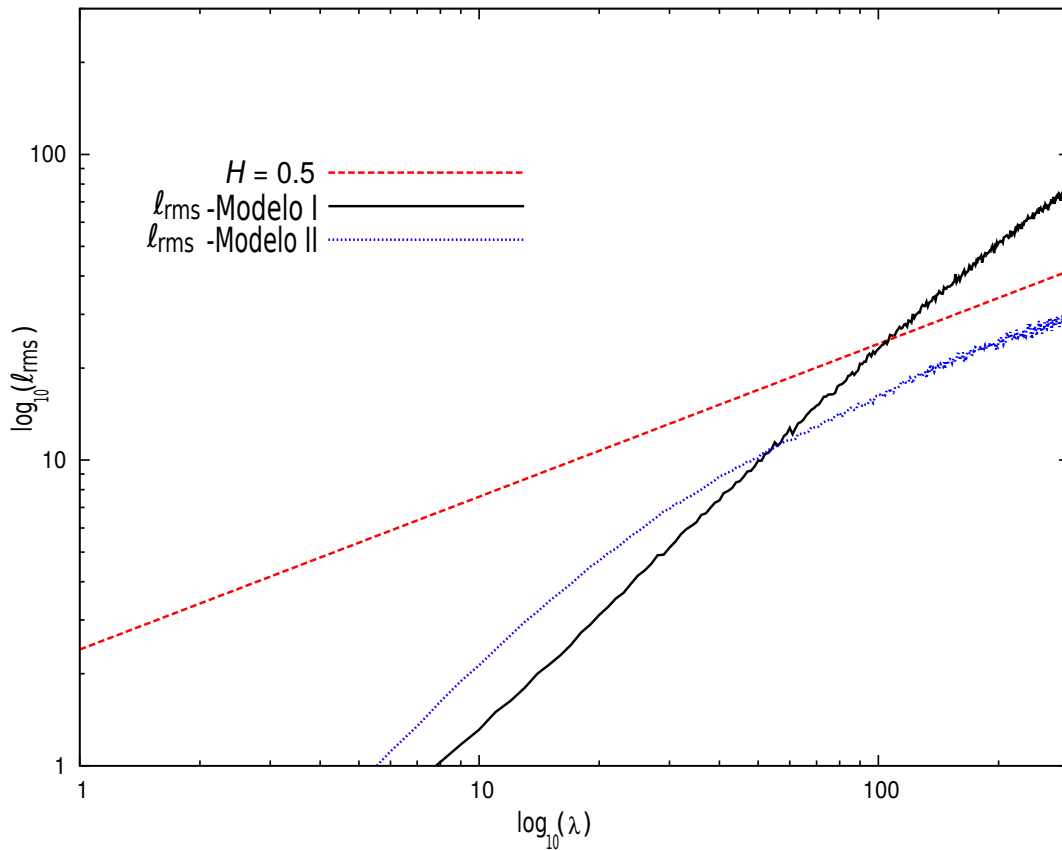


Figura 6.2: O gráfico log-log da raiz quadrática média do comprimento, $\ell_{rms} = (\ell^2 - \langle \ell \rangle^2)^{1/2}$, dos modelos **1** (linha preta) e **2** (linha azul) com uma função do parâmetro de reescalonamento λ . Aqui, ℓ são os valores dos comprimentos de passo mostrado na Fig. 6.1. No **modelo 2**, a passagem para o comportamento browniano, $\ell_{rms} \sim \lambda^H$, com $H = 0.5$, começa por volta de $\lambda \approx 50$. Abaixo desse valor é configurado um comportamento superdifusivo transitente. Em contraste, a superdifusividade do **modelo 1**, com $H > 0.5$, não mostra qualquer convergência para o regime do movimento browniano no intervalo estudado. O método do reescalonamento produz, assim, os valores do expoente para os dois modelos. Os modelos são facilmente distinguidos por seus expoentes. Apenas o **modelo 1** é superdifusivo.

6.1 PROJEÇÃO UNIDIMENSIONAL

Aplicando o método da projeção haverá, nos eixos x e y , duas caminhadas unidimensionais, que são denotadas por duas séries temporais t_n, x_n e t_n, y_n , como pode ser observada na Fig. 6.3(a). A partir desse conjunto de projeções unidimensionais, duas FDP's de comprimentos de voos unidimensionais são gerados para cada modelo, um para o eixo x e outro para o eixo y , como mostra os histogramas na Fig. 6.4.

O reescalonamento foi feito acordo com o método de projeção original [30] para analisar do comprimento de passo mínimo ℓ_{min} . Com esta análise, se faz necessário impor um limite abaixo do qual todos os pontos do conjunto de dados (t_n, x_n) e (t_n, y_n) devem ser removidos. No modelo adaptado, desenvolvido neste trabalho, o conjunto de dados foi reescalonado com a finalidade de observar a presença de um padrão de Lévy no **modelo 1**.

A série temporal, com o conjunto reescalonado com parâmetro $\lambda = 100$, foi refeita, Fig. 6.3(b), isto é, o ponto $t_n = 20000$ na Fig. 6.3(a) agora corresponde ao ponto $t_n = 200$. No conjunto reescalonado, $t_n = 200$ está conectado com o ponto $t_n = 201$ e no conjunto com parâmetro $\lambda = 1$, Fig. 6.3(a), equivale a $t_n = 20100$. A Fig. 6.3 mostra detalhadamente o que foi discutido.

6.2 ANÁLISE DE HISTOGRAMAS

Ao analisar os histogramas, é possível identificar a diferença entre os dois modelos. Na escala original, isto é, quando $\lambda = 1$ praticamente não há nenhuma diferença entre os modelos **1** e **2** como pode ser observado nas Fig. 6.4(a) e 6.4(b). É bem verdade, que há uma diferença mínima nos histogramas citados, todavia essa diferença não possui relevância estatística.

Uma vez que o *coarse graining* foi aplicado devido a introdução do parâmetro de

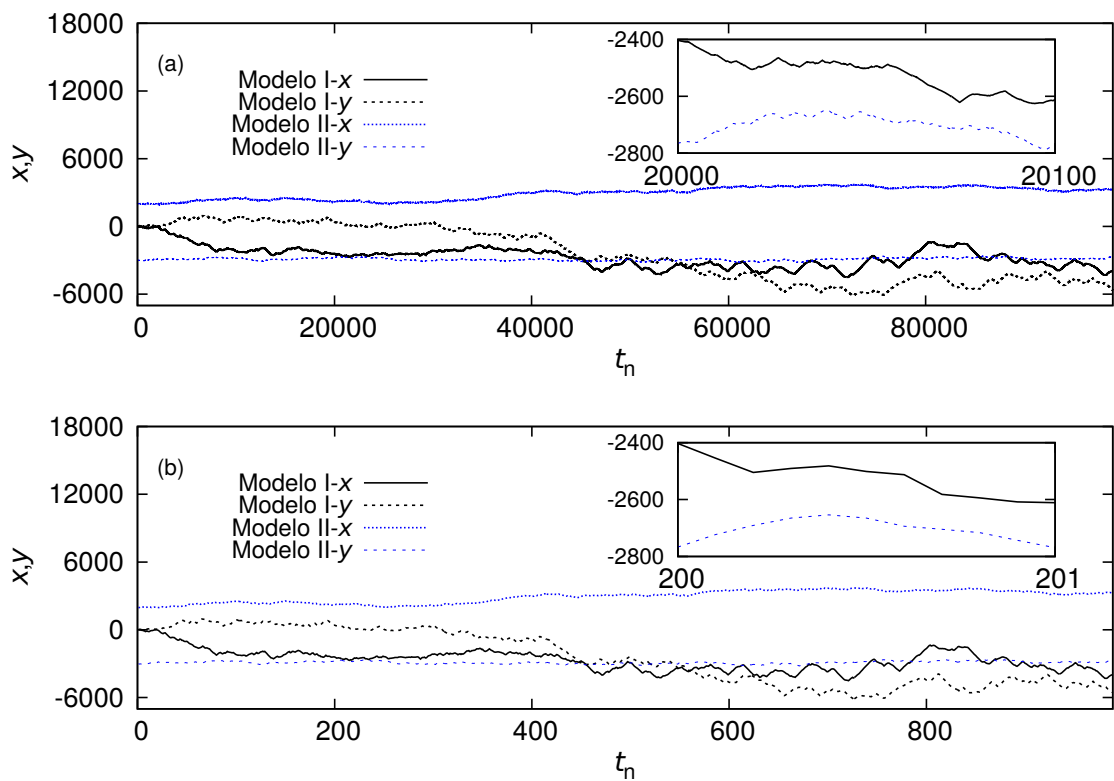


Figura 6.3: Evolução com número de passos t_n das coordenadas (x, y) da caminhada aleatória curva 2D mostrada na Fig. 5.1(b) geradas usando os modelos **1** e **2**: (a) conjunto de dados original (sem reescalonamento, $\lambda = 1$); (b) dados reescalados usando $\lambda = 100$. A diferença entre (a) e (b) se encontra basicamente na escala temporal. As inserções mostram detalhes da correspondência entre as partes reescaladas de (a) e (b)

reescalonamento λ , as FDP's dos comprimentos de voos dos conjuntos projetados e reescalados podem ser calculadas. A diferença entre as FDP's reescaladas relacionadas aos modelos **1** e **2** é muito clara, como mostra a Fig. 6.5. Outra característica, que é notória, é o crescimento das caudas para o **modelo 1** reescalado. Por outro lado, os comprimentos projetados e escalonados do **modelo 2** possuem um alcance muito menor que os do modelo anterior. Já as FDP's do **modelo 2** são muito bem ajustadas pelo ajuste gaussiano. Isso pode ser observado nas linhas pontilhadas da Fig. 6.5 e também no gráfico semi-log da Fig. 6.6. Com isto, a identificação a verdadeira natureza estatística das caminhadas é obtida, posto que o reescalonamento com parâmetro $\lambda = 100$ elimina qualquer possível correlação de curto alcance existente no **modelo 2**.

Em contrapartida, as correlações de longo alcance tipo lei de potência que estão presentes no **modelo 1** não sofrem nenhuma alteração nesse procedimento. Este comportamento nada mais é que uma consequência da estrutura de Lévy presente no “esqueleto” da caminhada aleatória.

Ao plotar um gráfico log-log, como mostrado na Fig. 6.7, o resultado obtido devido ao processo de reescalonamento é similar ao obtido anteriormente. A FDP original, isto é, com parâmetro de reescalonamento $\lambda = 1$, dos comprimentos de voos projetados exibem comportamento similar para os dois modelos. Todavia, quando há a diferenciação entre os modelos devido ao *coarse graining*, isto é, quando o parâmetro de reescalonamento é $\lambda = 100$, o **modelo 1** segue, basicamente, um decaimento lei de potência, com caudas longas. Por outro lado, os comprimentos de voos projetados do **modelo 2** tem seu alcance muito mais restrito. A característica peculiar da caminhada de Lévy que é cauda na lei de potência da FDP pode ser vista na Fig. 6.7.

A indicação visual da escala lei de potência vista na Fig. 6.7 para o **modelo 1**, mas não para o **modelo 2**, é fator suficiente para diferenciação destes modelos. Entretanto, há outra maneira de identificar essa diferença que é através de estimativas do expoente da lei de potência das projeções unidimensionais para o **modelo 1**. Para $\lambda = 1$, isto é, sem reescalonamento, pode-se observar que a cauda do histograma do valor absoluto dos comprimentos de voos das projeções unidimensionais tem expoente $\mu \approx 1.7$ (obtido usando ajuste não linear para comprimentos de voo de alcance de 10 até 200 unidades). Já para $\lambda = 100$ obteve-se $\mu \approx 2.1$ (para alcances de voos de 100 até 1000 unidades).

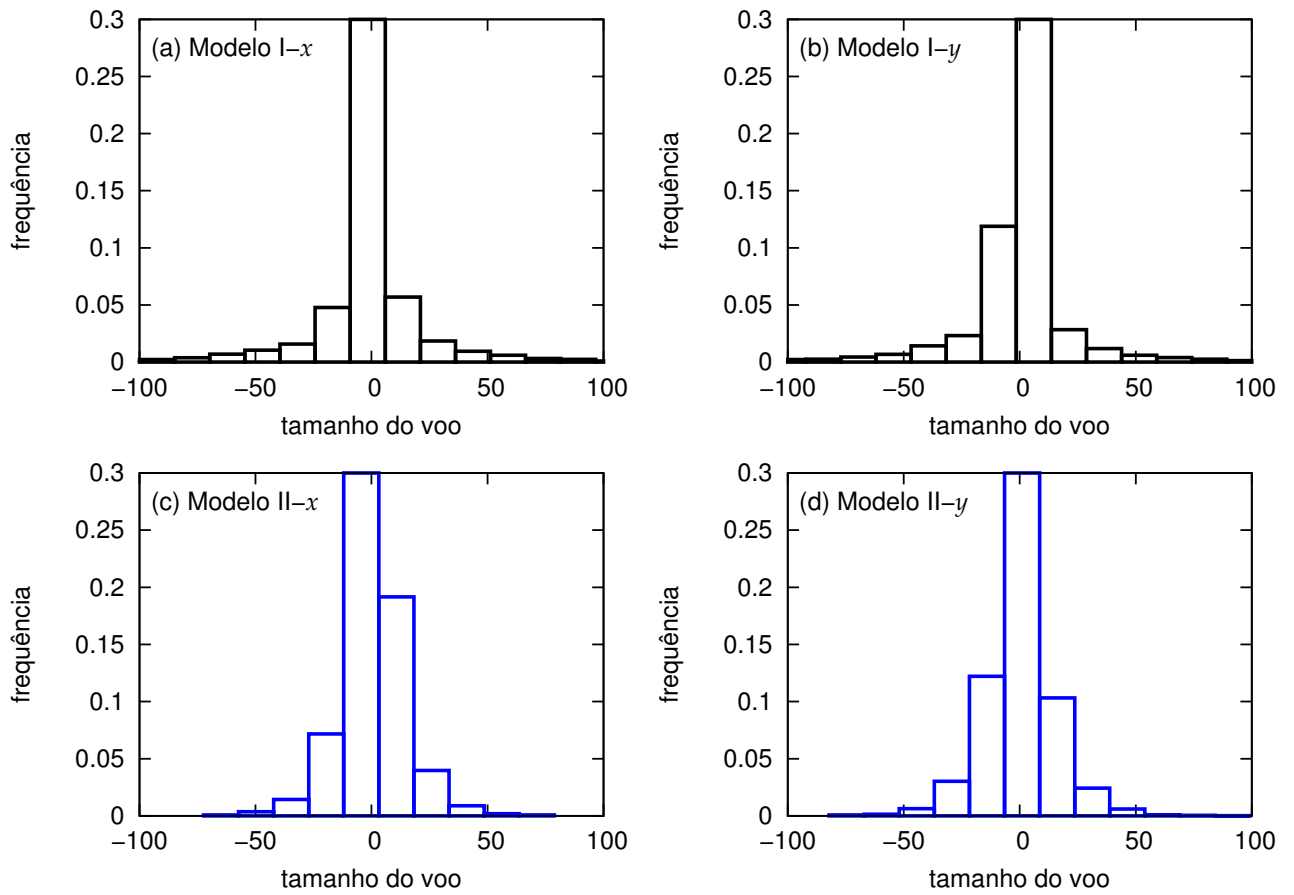


Figura 6.4: Histograma das distância entre os sucessivos ângulos de rotação projetados nos eixos x [(a) e (c)] e y [(b) e (d)] das séries temporais mostradas na Fig. 6.3(a) (dados não reescalados, $\lambda = 1$). (a), (b) **Modelo 1**; (c), (d) **Modelo 2**. Praticamente nenhuma diferença é observada. Essa ausência de diferença demonstra a dificuldade de distinguir os dois modelos.

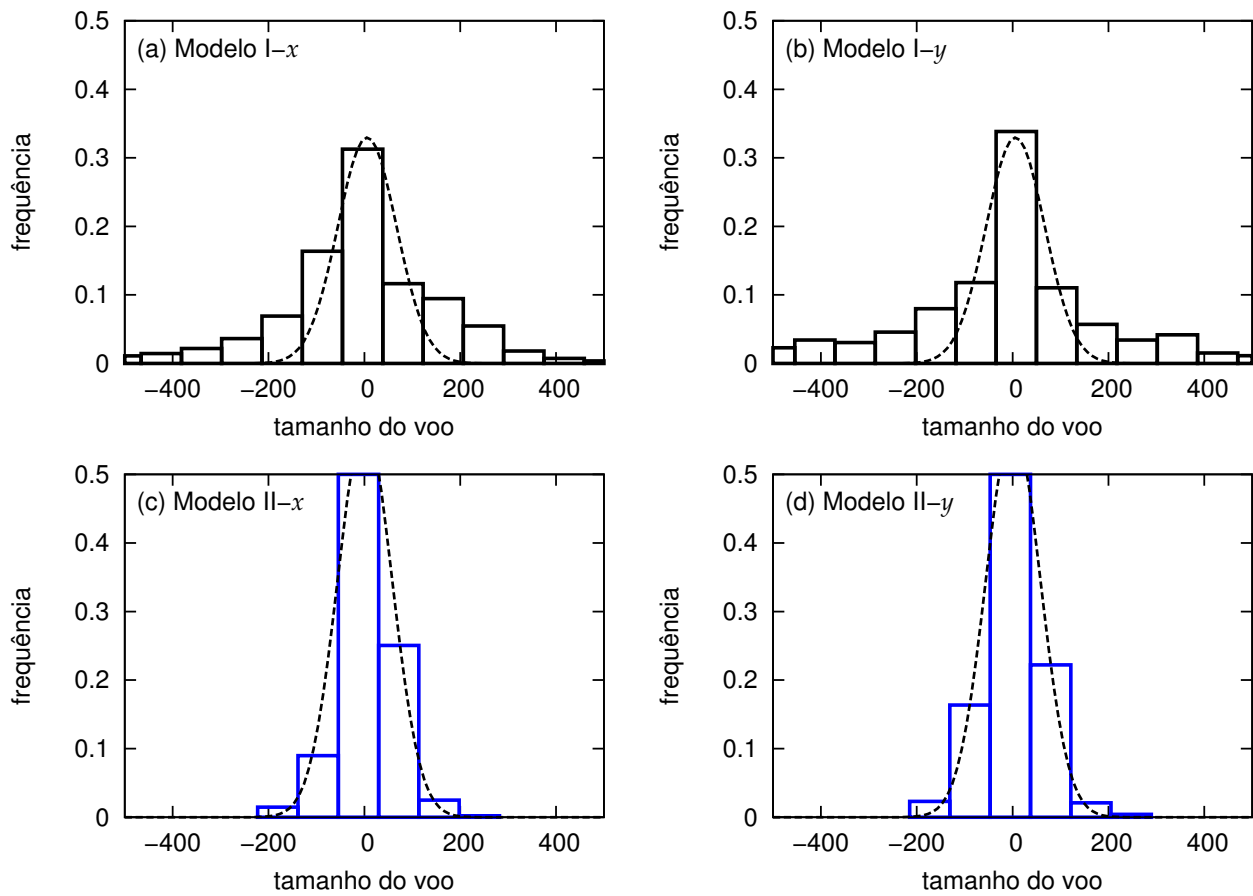


Figura 6.5: Histograma das distância entre os sucessivos ângulos de rotação projetados nos eixos x [(a) e (c)] e y [(b) e (d)] das séries temporais mostradas na Fig. 6.3(b), agora reescalados, $\lambda = 100$. (a), (b) **Modelo 1**; (c), (d) **Modelo 2**. O ajuste gaussiano, mostrado na linha pontilhada, descreve razoavelmente bem o **modelo 2**, mas falha completamente nas caudas para o **modelo 1**. O reescalamento tem levado para uma notável diferença entre os modelos, quando comparado com a análise não reescalada mostrado na figura anterior.

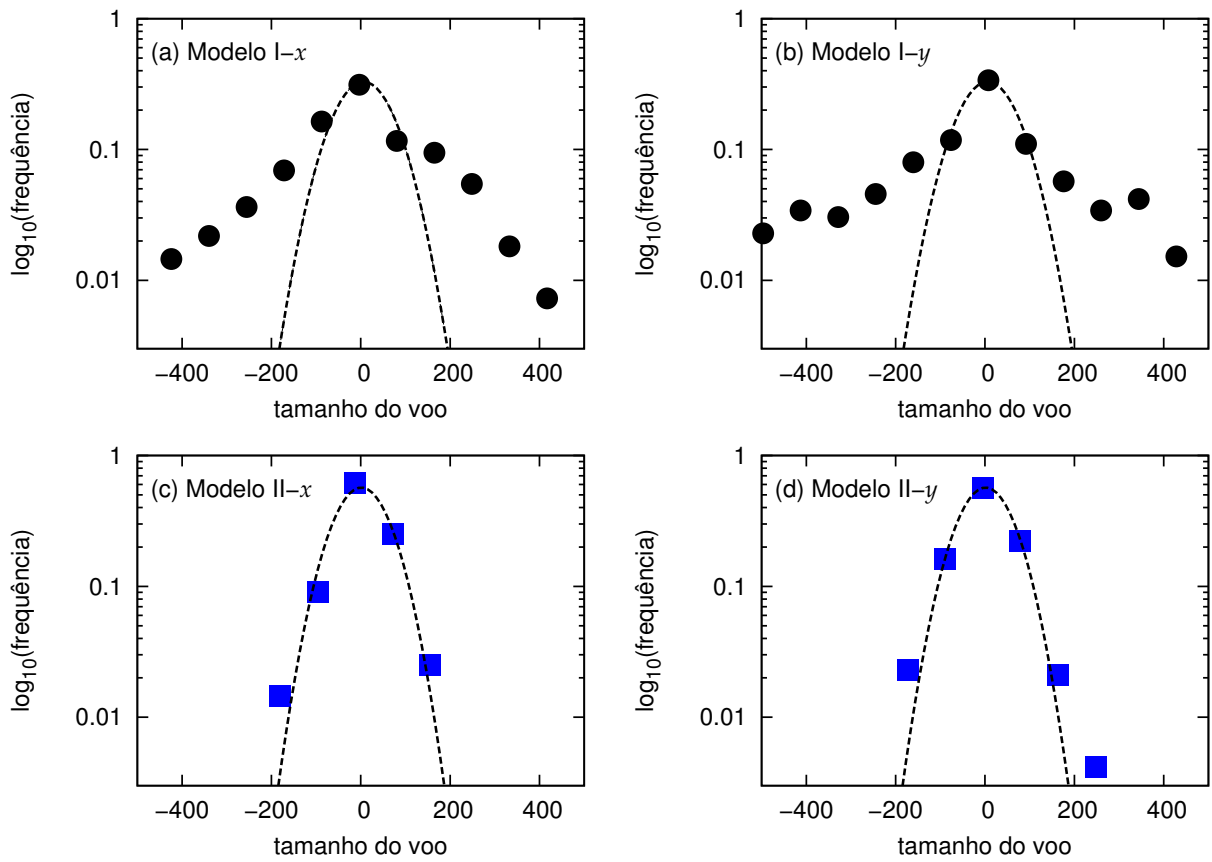


Figura 6.6: O gráfico semilog dos histogramas exibidos na Fig. 6.5 para dados reescalados usando $\lambda = 100$, incluindo os melhores ajustes para uma FDP gaussiana mostrada nas linhas pontilhadas. (a), (b) **Modelo 1**; (c), (d) **Modelo 2**. Observe como o **modelo 1** tem caudas longas, enquanto o **modelo 2** é basicamente gaussiano.

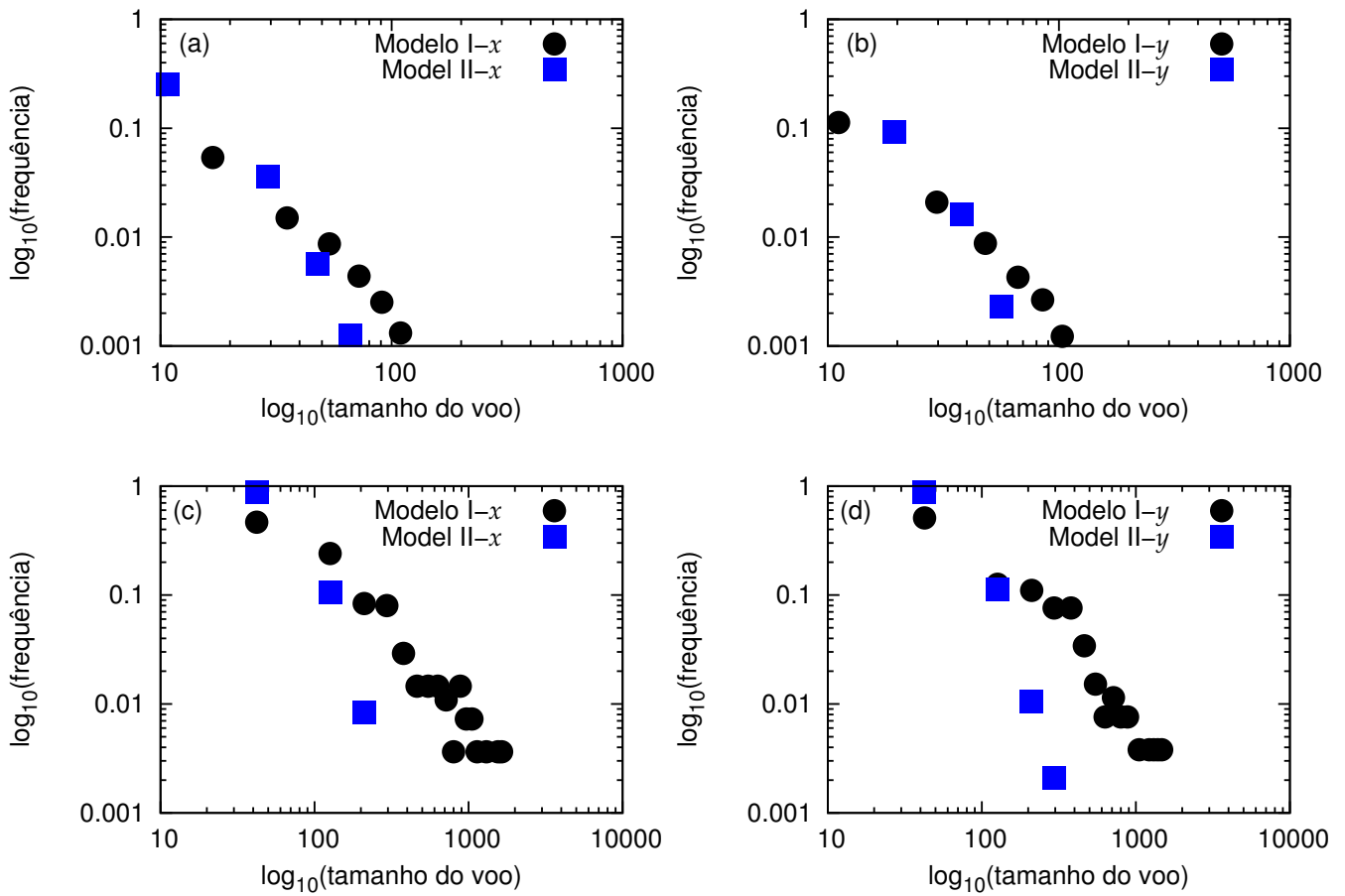


Figura 6.7: O gráfico log-log dos histogramas exibidos nas Figs. (6.4) e (6.5) para (a) os dados originais não escalonados, isto é $\lambda = 1$ e (b) dados escalonados, com $\lambda = 100$. Os círculos pretos (quadrados azuis) descrevem os resultados para o Modelo 1 (Modelo 2). É evidente a diferença entre os dois modelos no que diz respeito a cauda do gráfico, que são descritos por uma lei de potência (truncada). Esta diferença aparece apenas devido ao reescalamento. Sem utilizar esse método os modelos são indistinguíveis como mostra a Fig. 6.4. O ponto chave a salientar é que o método de projecção, juntamente com o método de reescalamento faz com que seja possível revelar que o Modelo 1 é uma caminhada de Lévy curva.

6.3 EXPOENTE DE HURST

Ainda há um outro método para estimar o expoente da lei de potência, sugerido pela Fig. 6.2, que é utilizar a relação $\ell_{rms} \sim \lambda^H$, onde H é o expoente de Hurst. Voos de Lévy aparecem quando a distribuição do tamanho dos saltos segue uma lei de potência $\lambda(\ell) \sim \ell^{-\mu}$. Todavia, a variância diverge para $\mu < 3$. As condições necessárias e suficientes do Teorema do Limite Central não são mantidas neste caso. Em vez disso, verifica-se que a função de densidade de probabilidade para a posição do caminhante converge para uma distribuição de Lévy α -estável[31] com o índice Lévy $\alpha = \mu - 1$, com $0 < \alpha \leq 2$. Para $\alpha = 2$ tem-se um comportamento de difusão normal, para $\alpha < 2$ tem-se um comportamento superdifusivo e para $\alpha \rightarrow 0$ tem-se um comportamento balístico. Baseado nas relações acima,^a pode-se chegar a

$$H = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\mu - 1}, \quad (\text{Voo de Lévy}) \quad (6.4)$$

e

$$H = \frac{3 - \alpha}{2} = \frac{4 - \mu}{2}, \quad (\text{Caminhada de Lévy})[31]. \quad (6.5)$$

Se observar a Fig. 6.2 pode-se obter valor estimado de $H \approx 1.1$. Substituindo nas equações acima, serão obtidos os valores de $\mu \approx 1.9$, assumindo que o tipo de caminhada aleatória em questão é voo de Lévy e $\mu \approx 1.8$, considerando que a análise é para caminhada de Lévy. As caminhadas de Lévy possuem uma restrição que é $H \leq 1$, tal restrição não se aplica aos voos de Lévy^b.

Uma vez que há essa restrição para caminhadas de Lévy, assumi-se que o valor máximo permitido para o expoente de Hurst é 1. Se $H = 1$ o valor obtido será, exatamente, $\mu = 2$ para caminhada de Lévy. Apesar da concordância como o valor correto de $\mu = 2$, foi observado que a estimativa dos expoentes de lei de potência dos dados da trajetória não é tão simples e vai além da abordagem desse trabalho.

^aPara uma explicação mais detalhada, sobre as relações entre índice de Lévy, expoente de lei de potência e expoente de Hurst, verificar a seção 3.4 de [31].

^bVer seção 3.4 [31].

CONCLUSÃO

7.1 PALAVRAS FINAIS

Neste trabalho, foi observado que a identificação do padrão de Lévy em trajetórias curvas bidimensionais ou tridimensionais é bem mais complicado do que em caminhadas unidimensionais. A dificuldade gira em torno da discretização da trajetória curva.

A abordagem utilizada nesse problema obteve sucesso, utilizando o método da projeção que foi recentemente proposto[30]. Além disso, se há correlações de alcance finito na caminhada curva, a distinção entre um *CRW* e uma caminhada de Lévy se torna mais difícil. Essa análise torna-se mais complexa se as caminhadas possuem FDP's de tamanho de passos e de ângulos de rotação totalmente idênticas.

O tratamento adotado neste caso foi através do estudo de dois modelos de caminhadas curvas bidimensionais que foram definidos no Cap.5. O método da projeção original foi alterado, de maneira que não foram descartados os comprimentos de passos

menores que um limite mínimo[30] das trajetórias projetadas. Foi introduzido um parâmetro de reescalonamento λ para reordenar o conjunto de dados projetados e desta maneira reconstruir as FDP's de comprimentos de passos. Essa adaptação torna o modelo apto para testar as propriedades estatísticas das correlações sob efeito de *coarse graining*. Um valor λ foi escolhido, de maneira que funcione aproximadamente da mesma maneira que encontrar um ℓ_{min} no método de projeção original, proposto em [30]. Também foi apresentado que a combinação feita funcionou bem no intuito de distinguir uma caminhada correlacionada de curto alcance do **modelo 2** de uma caminhada que possui o padrão genuíno de Lévy como no **modelo 1**.

Este resultado é uma técnica muito útil para caracterizar melhor caminhadas aleatórias curvas em espaços bidimensionais e tridimensionais. Esta ferramenta valiosa pode ser de grande utilidade para determinar se há ou não o padrão de caminhadas de Lévy em dados experimentais.

7.2 PERSPECTIVAS

A aplicação do método desenvolvido num conjunto de dados experimentais é um passo a ser trabalho subsequentemente. De maneira que com esta aplicação será possível verificar se a eficácia do método da projeção desenvolvido nesse trabalho quando aplicado a dados que não sejam simulações computacionais.

Referências Bibliográficas

- [1] Brown R., *Philos. Mag.* **4**, 161-173, (1828).
- [2] Ingenhousz J., *Vermischte schriften physisch medicinischen inhalts*, Wapler, Vienna, **2**, 123-126, (1784).
- [3] Salinas S. R. A., *Einstein e a Teoria do Movimento Browniano*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **27**, 2, 263-269, (2005).
- [4] Salinas S. R. A., *Introdução à Física Estatística* EDUSP, São Paulo, (1997).
- [5] Maslov D. *Dimensional Analysis - Lecture 5*, Qualitative Methods of Theoretical Physics, (2011).
- [6] Rossato, R. *Soluções e Aplicações da Equação de Difusão Fracionária a Problemas de Contorno*. 2009. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Física.
- [7] Oliveira M.J., Tomé T., *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001).
- [8] Silva J.M., Lima J.A.S. *Quatro Abordagens do Movimento Browniano*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **29**, 25-35, (2007).
- [9] Radons G., Klages R., Sokolov I. M., *Anomalous Transport* (Wiley, Berlin, 2008).
- [10] Burrese M., Radhalakshmi V., Savo R., Bertolotti J., Vynck K., Wiersma D. S. *Weak Localization of Light in Superdiffusive Random Systems*, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 110604 (2012).
- [11] Zaburdaev V., Denisov S., Hanggi P., *Space-Time Velocity Correlation Function for Random Walks*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 170604 (2013).

- [12] Bernabo P. , Burioni R., Lepri S., Vezzani A., *Anomalous transmission and drifts in one-dimensional Lévy structures*, Chaos Soliton Fract. **67**, 11 (2014).
- [13] Baudouin Q., Pierrat R., Eloy A., Nunes-Pereira E. J., Cuniasse P. A, Mercadier N., Kaiser R., *Signatures of Lévy flights with annealed disorder*, Phys. Rev. E **90**, 052114 (2014).
- [14] Lewis M. A., Maini P., Petrovski S. V., *Dispersal, Individual Movement and Spatial Ecology: A Mathematical Perspective*, (Springer, London, 2013).
- [15] Metzler R., Klafter J., *The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics* J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 161-208 (2004).
- [16] Bartumeus F., Fernández P. , da Luz M. G. E., Catalan J., Solé R. V., Levin S. A., *Superdiffusion and encounter rates in diluted, low dimensional worlds*, Eur. Phys. J. Spec. Topics, **157**, 157-166 (2008).
- [17] Hays G. C., Bastian T. , Doyle T. K., et al, *High activity and Lévy searches : jellyfish can search the water column like fish* Proc. R. Soc. B **279**, 465-473 (2012).
- [18] Bartumeus F., Catalan J., Viswanathan G. M., Raposo E. P., da Luz M. G. E., *The influence of turning angles on the success of non-oriented animal searches*, J. Theor. Biol. **252**, 43-55, (2008).
- [19] Codling E. A., Plank M. J., *Turn designation, sampling rate and the misidentification of power laws in movement path data using maximum likelihood estimates*, Theor. Ecol. **4**, 397-406 (2011).
- [20] Humphries N. E., Weimerskirch H., Queiroz N., Southall E. J., Sims D. W., *Foraging success of biological Lévy flights recorded in situ* Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **109**, 7169-7174, (2012).
- [21] Turchin P., *Quantitative Analysis of Movement: Measuring and Modeling Population Redistribution in Plants and Animals* (Sinauer Associates, Sunderland, MA, 1998).
- [22] Viswanathan G. M., Raposo E. P., Bartumeus F., Catalan J., da Luz M. G. E., *Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes*, Phys. Rev. E, **72**, 011111 (2005).
- [23] Edwards A. M., Phillips R. A., Watkins N. W., Freeman M. P., et al, *Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer*, Nature **449**, 1044-8, (2007).

- [24] Reynolds A. M., Smith A. D., Menzel R., Greggers U., Reynolds D. R., Riley J. R., *Displaced honey bees perform optimal scale-free search flights*, Ecology **88**, 1955-1961, (2007).
- [25] Bartumeus F., Oikos, *Behavioral intermittence, Lévy patterns, and randomness in animal movement*, **118**, 488-494, (2009).
- [26] de Knecht H. J., Hengeveld G. M., van Langevelde F., de Boer W. F., Kirkman K.P., *Patch density determines movement patterns and foraging efficiency of large herbivores*, Behav. Ecol. **18**, 1065-1072, (2007).
- [27] Plank M. J., Codling E. A., *Sampling rate and misidentification of Lévy and non-Lévy movement paths*, Ecology **90**, 3546-3553, (2009).
- [28] Reynolds A. M., *Bridging the gulf between correlated random walks and Lévy walks: autocorrelation as a source of Lévy walk movement patterns*, J. R. Soc. Interface **7**, 1753-1758, (2010).
- [29] Stumpf M. P. H., Porter M. A., *Critical Truths About Power Laws*, Science **335**, 665-666, (2012).
- [30] Humphries N. E., Weimerskirch H., Sims D. W. *A new approach to objective identification of turns and steps in organism movement data relevant to random walk modelling*, Methods in Ecology and Evolution, **4**, 930-938 (2013).
- [31] Gandhimohan M. V., Stanley E. H., Raposo E.C., Da Luz M. G. E., *The Physics of Foraging*, (Cambridge University Press, New York, 2011).
- [32] Méndez V., Campos D., Bartumeus F., *Stochastic Foundations in Movement Ecology: Anomalous Diffusion, Front Propagation and Random Searches* (Springer, Berlin, 2014).
- [33] Humphries N. E., Queiroz N., Dyer J. R. M., et al, *Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators*, Nature **465**, 1066-1069, (2010).
- [34] Edwards A. M., *Overtuning conclusions of Lévy flight movement patterns by fishing boats and foraging animals.*, Ecol., **6**, 1247-1257, (2011).
- [35] Sims D. W, Southall E. J. , Humphries N. E., et al, *Scaling laws of marine predator search behaviour*, Nature **451**, 1098-1102, (2008).
- [36] Edwards A. M., *Using likelihood to test for Lévy flights search patterns and for general power-law distribution in nature*, J. Anim. Ecol., **77**, 1212-1222, (2008).

- [37] Edwards A. M., Freeman M. P., Breed G. A., Jonsen I. D., *Incorrect Likelihood Methods Were Used to Infer Scaling Laws of Marine Predator Search Behaviour*, PLoS ONE, **7**, e45174, (2012).
- [38] Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. E. J., *Power-Law Distributions in Empirical Data* SIAM Rev. **51**, 661-703, (2009).
- [39] Burnham K. P., Anderson D. R., *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*, (Springer, 2002).
- [40] Gillis J., *Correlated random walk*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **51**, 639-651, (1955).
- [41] Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B., *Statistical Distributions*, (Wiley, New Jersey, 2011).
- [42] Santos M.C., *Modelo Geral de Busca Aleatória Markoviana: Soluções no Limite Determinístico*, 2012, Tese de Doutorado, UFPR , Curitiba-PR.
- [43] Reif F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [44] Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G., *Beyond Brownian Motion*, Physics Today, **49**, 2, 33, (1996).
- [45] Sato K., Barndorff-Nielsen O. E., Resnick S. I., Mikosch T. , *Lévy Processes - Theory and Applications* Birkhäuser Basel (2001).
- [46] Samorodnitsky G., Taqqu M. S., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, (Chapman and Hall, New York, 1994).
- [47] Lima T. A. G. S. B., *Estudos de eficiência em buscas aleatórias unidimensionais*, 2010, Dissertação de Mestrado. UFPE, Recife-PE.
- [48] Fogedby H. C., *Lévy flights in quenched random force fields* , Phys. Rev. E, **58**, 1690 (1998).
- [49] Randall G., *Levy Flights*, (March 18, 2003) Disponível em: <<http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-366-random-walks-and-diffusion-fall-2006/lecture-notes/lecture12.pdf>>. Acesso: em 23 jun. 2016.
- [50] Raposo E. P., Buldyrev S. V., et al, *Lévy flights and random search*, J. Phys. A: Math. Theor., **42**, 23, (2009).

- [51] Borak S., Hardle W., Weron R., *Stable Distributions*, SFB 649, (2005).
- [52] Buldyrev S. V., Viswanathan G. M., et al, *Average time spent by Levy flights and walks on an interval with absorbing boundaries*, Physical Review E, **64**, (2001).
- [53] Da Luz M.G.E., Kazakov A.Ya., et al *Properties of Lévy flights on an interval with absorbing boundaries*, Physica A, **302**, 148-161, (2001).
- [54] E. P. Raposo, F. Bartumeus, M. G. E. da Luz, P. J. Ribeiro-Neto, T. A. Souza, and G. M. Viswanathan, *How Landscape Heterogeneity Frames Diffusivity in Searching Processes* PLoS Comp. Biol. **7**, e1002233 (2011).
- [55] Mitzenmacher M., *A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions*, Internet Mathematics, **1**, 2, 226-251, (2003).
- [56] Bachelier L., *La Théorie de la Spéculation*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **17**, 21-86, (1900).
- [57] Hughes B. D., *Random Walks and Random Environments: Volume 1*, (Oxford University Press, 1995).
- [58] Shlesinger, M. F., Zaslavsky, G. M., Klafter, J., *Strange kinetics*, Nature. **363**, 31, (1993).
- [59] Mandelbrot B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, (Freeman, San Francisco, 1982).
- [60] Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Frisch U., *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, (Springer, Berlin, 1995).
- [61] Schulz, M., *Lévy flights in a quenched jump length field: A real space renormalization group approach*, Physics Letters A, **298**, 105-108, (2002).
- [62] Schulz M., Reineker, P., *Lévy flights in a quenched jump length field: A 1-loop renormalization group approach*, Chemical Physics, **284** , 331-340, (2002).
- [63] Stanley H. E., Amaral L. A. N., Canning D., et al., *Econophysics: Can physicists contribute to the science of economics?*, Physica A, **269**, 156-169, (1999).
- [64] Porto M., Roman H. E., *Autoregressive processes with exponentially decaying probability distribution functions: Applications to daily variations of a stock market index*, Physical Review E, **65**, 046149, (2002).
- [65] Mantegna R. N., Stanley H. E., *An Introduction to Econophysics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

- [66] Amaral L. A. N., Cizeau P., Gopikrishnan P., et al., *Econophysics: Can statistical physics contribute to the science of economics?*, Computer Physics Communications, **122**, 145-152, (1999).
- [67] Walther H., *Spectroscopy of single trapped ions and applications to frequency standards and cavity quantum electrodynamics*, Laser Physics, **9**, 225-233, (1999).
- [68] Tsonis A. A., Roebber P. J., Elsner, J. B. *A characteristic time scale in the global temperature record*, Geophysical Research Letters, **25**, 2821-2823, (1998).
- [69] Tsonis A. A., Hunt A. G., Elsner J. B., *On the relation between ENSO and global climate change*, Meteorology and Atmospheric Physics, **84**, 229-242, (2003).
- [70] Katori H., Schlipf S., Walther H., *Anomalous dynamics of a single ion in an optical lattice*, Physical Review Letters, **79**, 2221-2224, (1997).
- [71] Maass P., Scheffler F., *Lévy field distributions and anomalous spin relaxation in disordered magnetic systems*, Physica A, **314**, 200-207, (2002).
- [72] Alves-Pereira A. R., Nunes-Pereira E. J., Martinho J. M. G., Berberan-Santos M. N., *Photonic superdiffusive motion in resonance line radiation trapping: Partial frequency redistribution effects*, Journal of Chemical Physics, *126*, 154505, (2007).
- [73] Garoni T. M., Frankel N. E., *d-dimensional Lévy flights: Exact and asymptotic*, Journal of Mathematical Physics, **43**, 5090-5107, (2002).
- [74] Garoni T.M., Frankel N.E. *Lévy flights: Exact results and asymptotics beyond all orders*, Journal of Mathematical Physics, **43**, 2670-2689, (2002).
- [75] Brockmann D., Sokolov I.M., *Lévy flights in external force fields: From models to equations*, Chemical Physics, **284**, 409-421, (2002).
- [76] Chechkin A.V., Metzler R., Gonchar V.Y., Klafter J., Tanatarov L.V., *First passage and arrival time densities for Lévy flights and the failure of the method of images*, Journal of Physics A, **36**, L537-L544, (2003).
- [77] Chechkin A.V., Gonchar V.Y., Klafter J., Metzler R., Tanatarov L.V., *Lévy flights in a steep potential well*, Journal of Statistical Physics, **115**, 1505-1535, (2004).
- [78] Lomholt M. A., Ambjornsson T., Metzler R., *Optimal Target Search on a Fast-Folding Polymer Chain with Volume Exchange*, Physical Review Letters, **95**, 260603, (2005).

- [79] Brockmann D., Hufnagel L., Geisel T., *The scaling laws of human travel* Nature, **439**, 462-465 (2006).
- [80] Gonzalez M. C., Hidalgo C. A., Barabasi A.L., *Understanding Individual Human Mobility Patterns*, Nature **453**, 779-782 (2008).
- [81] van den Broek B., Lomholt M. A., Kalisch S.M. J., Metzler R., Wuite G. L. J., *How DNA coiling enhances target localization by proteins*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **105**, 15738-15742, (2008).
- [82] M. A. Lomholt, B. van den Broek, S.-M. J. Kalisch, G. L. J. Wuite, and R. Metzler, , , **106**, 8204, (2009).
- [83] Stephens D. W., Krebs J. R., *Foraging Theory* (Princeton University Press, Princeton, 1987).
- [84] Kamil A. C., Krebs J. R., Pulliam H. R., *Foraging Behavior* (Plenum Press, New York, 1987).
- [85] Boyer D., Walsh P. D., *Modelling the mobility of living organisms in heterogenous landscapes: does memory improve foraging success*, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 5645 (2010).
- [86] Tabone M., Ermentrout B., Doiron B., *Balancing organization and flexibility in foraging dynamics*, J. Theor. Biol., **266**, 391-400, (2010).
- [87] Moorter B. V., Visscher D., Benhamou S., Borger L., Boyce M. S., Gaillard J. M., *Memory keeps you at home: a mechanistic model for home range emergence*, Oikos **118**, 641-652, (2009).
- [88] Ferreira A. S., Raposo E. P., da Luz M. G. E., Viswanathan G. M., *The influence of environment on Lévy random search efficiency: Fractality and memory effects*, Physica A **391**, 3234, (2012).
- [89] Reynolds A. M., *In the intermittent behaviour of foraging animals*, Europhys. Lett. **75**, 517-520, (2006).
- [90] Reynolds A. M., Bartumeus F., *Optimising the success of random destructive searches: Lévy walks can outperform ballistic motions*, J. Theor. Biol. **260**, 98 (2009).
- [91] Lomholt M. A., Koren T., Metzler R., Klafter J., *Lévy strategies in intermittent search processes are advantageous*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **105**, 11055-11059 (2008).

- [92] Plank M. J., James A., *Optimal foraging, Lévy pattern or process*, J. R. Soc. Interface **5**, 1077-1086 (2008).
- [93] Benichou O., Loverdo C., Moreau M., Voituriez R., *Intermittent search strategies*, Rev. Mod. Phys. **83**, 81 (2011).
- [94] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, F. Bartumeus, Jordi Catalan, M. G. E. da Luz, *Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes* Phys. Rev. E, **72**, 011111, (2005).
- [95] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince, and H. E. Stanley, Nature, **381**, 413, (1996).
- [96] Kareiva P. M., Shigesada N., Oecologia **56**, 234, (1983)
- [97] Viswanathan G. M., Buldyrev S. V., Havlin S., da Luz M. G. E., Raposo E. P., Stanley H. E., *Optimizing the success of random searches*, Nature, **401**, 911 (1999).
- [98] Viswanathan G.M., Bartumeus F., Buldyrev S.V., Catalan J., Fulco U.L., Havlin S. et al. *Lévy flight random searches in biological phenomena*, Physica A, **314**, 208-213, (2002).
- [99] Bartumeus F., Fernandez P., da Luz M. G. E., Catalan J., Sole R. V., Levin S. A., *Superdiffusion and encounter rates in diluted, low dimensional wrlds*, Eur. Phys. J. Special Topics **157**, 157, (2008).
- [100] Raposo E. P, Buldyrev S. V., da Luz M. G. E., Santos M. C., Stanley H. E., Viswanathan G. M., *Dynamical Robustness of Lévy Search Strategies*, Phys. Rev. Lett. **91**, 240601, (2003).
- [101] Santos M. C., Raposo E. P., Viswanathan G. M., da Luz M. G. E., *Optimal random searches of revisitable targets: Crossover from superdiffusive to ballistic random walks*, Europhys. Lett. **67**, 734, (2004).
- [102] Faustino C. L., Lyra M. L., Raposo E. P., Viswanathan G. M., da Luz M. G. E., *ibid.* **97**, 50005, (2012).
- [103] Sotelo-Lopez S. A., Santos M. C., Raposo E. P., Viswanathan G. M., da Luz M. G. E., *Conditions under which a superdiffusive random-search strategy is necessary* Physical Review E **86**, 031133, (2012).
- [104] Santos M. C., Boyer D., Miramontes O., Viswanathan G. M., Raposo E. P., Mateos J. L. , da Luz M. G. E., *Origin of power-law distributions in deterministic walks: The influence of landscape geometry*, Phys. Rev. E **75**, 061114, (2007).

- [105] Buldyrev S. V., Havlin S., Kazakov A. Y., da Luz M. G. E., Raposo E. P., Stanley H. E., Viswanathan G. M., *Average time spent by Lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries*, Phys. Rev. E **64**, 041108, (2001).
- [106] Rayner A. D. M., *The challenge of the individualistic mycelium*, Mycologia **83**, 48-71, (1991).
- [107] Ben-Jacob E., Schochet O., Tenenbaum A., Cohen I., Czirok A., Vicsek T., *Generic Modeling of Cooperative Growth-Patterns in Bacterial Colonies*, Nature, **368**, 46-49, (1994).
- [108] Santos M. C., Raposo E. P., Viswanathan G. M., da Luz M. G. E., *Can collective searches profit from Lévy walk strategies?*, J. Phys. A **42**, 434017, (2009).
- [109] Pérez-Reche F. J., Ludlam J. J., Taraskin S. N., Gilligan C. A., *Synergy in Spreading Processes: From Exploitive to Explorative Foraging Strategies*, Phys. Rev. Lett. **106**, 218701, (2011).
- [110] Hays, G.C., Bastian, T., Doyle, T.K., Fossette, S., Gleiss, A.C., Gravenor, M.B. et al. *High activity and Levy searches: jellyfish can search the water column like fish*, Proceedings of the Royal Society. B, Biological Sciences, **279**, 465-473 (2012).
- [111] Sims, D.W., Humphries, N.E., Bradford, R.W. e Bruce, B.D. *Lévy flight and Brownian search patterns of a free-ranging predator reflect different prey field characteristics*, Journal of Animal Ecology, **81**, 432-442, (2012).
- [112] Bradshaw C.J.A., Sims D.W., Hays G.C. *Measurement error causes scale-dependent threshold erosion of biological signals in animal movement data*, Ecological Applications, **17**, 628-638, (2007).
- [113] Nevitt G.A., Losekoot M., Weimerskirch H. *Evidence for olfactory search in wandering albatross, Diomedea exulans*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **105**, 4576-4581, (2008).
- [114] da Luz M. G., Buldyrev S. V., Havlin S., Raposo E. P., Stanley H. E., Viswanathan G. M. *Lévy flights search patterns of biological organisms*, Physica A, **295**, 85-88, (2001).
- [115] Peliti L., Pietronero L., *Random Walk with Memory*, Riv. Nuovo Cimento **10**, 1-33, (1987).

- [116] Raposo E. P., de Oliveira S. M., Nemirovsky A. M., Coutinho-Filho M. D., *Random walks: A pedestrian approach to polymers, critical phenomena, and field theory*, Am. J. Phys. **59**, 633-645, (1991).
- [117] Nyquist H., *Certain Topics in Telegraph Transmission Theory*, Proc IEEE, **90**, 280-305, (2002).
- [118] Bartumeus F., Raposo E. P., Viswanathan G. M., da Luz M. G. E., *Stochastic Optimal Foraging: Tuning Intensive and Extensive Dynamics in Random Searches*, PLoS ONE, **9**, e106373, (2014).
- [119] Mantegna R. N., Stanley H. E. *Stochastic Process with Ultra-Slow Convergence to a Gaussian: The Truncated Levy Flight*, PRL, **73**, 2946-2949 , (1994).
- [120] Lévy P. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, (1937).
- [121] Bartumeus F., Levin S. A. *Fractal reorientation clocks: Linking animal behavior to statistical patterns of search*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **49**, 19072-19077, (2008).
- [122] Reynolds A. *Mussels realize Weierstrassian Lévy walks as composite correlated random walks.*, Sci. Rep., **4**, 4409 (2014).
- [123] Risken H., *The Fokker-Planck Equation - Method of Solution and Applications*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989).
- [124] Chung K. L., Walsh J. B., *Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry*, (Springer, New York, 2005).
- [125] Metzler R., *Generalized Chapman-Kolmogorov equation: A unifying approach to the description of anomalous transport in external fields*, Physical Review E, **62**, 6233, (2000).
- [126] MacArthur R.H., Pianka E.R., *On the optimal use of a patchy environment*, American Naturalist, **100**, 603-609, (1966).
- [127] Emlen J. M., *The role of time and energy in food preference*, American Naturalist, **100**, 611-617, (1966).

APÊNDICE A

Nesse apêndice estão definições matemáticas que utilizamos nesse trabalho.

7.3 TRANSFORMADA DE FOURIER

Quando uma função não é periódica, é impraticável a escrita desta como combinação linear de senos e cossenos. Todavia, é possível escrever tal função como a combinação linear de todos os senos e cossenos existentes, utilizando as frequências $\omega \in \mathbb{R}$ disponíveis:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.1)$$

que é conhecida como *equação de síntese*.

Para funções que satisfazem a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt < \infty, \quad (7.2)$$

entre outras, pode-se evidenciar que os valores de $F(\omega)$ que satisfazem a equação acima são dados por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} dt \quad (7.3)$$

que é conhecida como *equação de análise*

7.3.1 Transformada Inversa de Fourier

Se $F(\omega)$ de $f(t)$ estão relacionadas pelas equações de análise e síntese

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (7.4)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (7.5)$$

denotamos esta relação por

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad (7.6)$$

indicando que F é a Transformada de Fourier de f , e f é a Transformada Inversa de Fourier de F .

7.4 MOMENTOS ESTATÍSTICOS

Os momentos estatísticos fornecem diferentes informações, de acordo com a sua respectiva ordem, a cerca de uma distribuição. Os momentos de primeira e segunda ordem são, em geral, os mais utilizados.

7.4.1 1º Momento (μ)

O momento de primeira ordem, na sua forma discreta, é definido como:

$$\mu = E\{x\} = \sum x \cdot p(x) \quad (7.7)$$

x é a variável aleatória e $p(x)$ é a probabilidade associada a essa variável. Na forma contínua temos a expressão

$$\mu = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx. \quad (7.8)$$

7.4.2 2º Momento (σ^2)

A variância é o valor esperado do quadrado dos desvios, matematicamente, temos:

$$\sigma^2 = E\{(x - \mu)^2\} = E\{x^2\} - E\{x\}^2. \quad (7.9)$$

Podemos expressar a variância dessa outra forma:

$$\sigma^2 = \int_{x \in D} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (7.10)$$

O momento de ordem 3 pode ser expresso dessa forma:

$$\mu_3 = E\{(x - \mu)^3\} \quad (7.11)$$

Dois medidas importantes para caracterizar uma distribuição não-normal são os coeficientes de skewness e de kurtosis. No caso do skewness, coeficiente próximo de zero significa simetria, caso contrário, uma tendência à esquerda para números negativos e, à

direita para números positivos.

$$skewness = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} \quad (7.12)$$

A kurtosis, por sua vez, mede a concentração próxima a média (ou pico). No caso da normalidade, o valor é 3. Menos que 3, a distribuição é mais achatada chamada platykurtic. Maior que 3, o pico é mais acentuado e a distribuição é chamada leptokurtic, e expressado da seguinte forma:

$$kurtosis = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} - 3. \quad (7.13)$$

7.4.3 Covariância

Quando duas variáveis aleatórias x e y não são independentes, geralmente é de interesse avaliar quão fortemente estão relacionadas uma com a outra.

A covariância dá uma ideia da dispersão dos valores da variável bidimensional (x, y) em relação ao ponto (μ_x, μ_y) :

$$Cov(x, y) = E\{(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)\} = E\{x \cdot y\} - \mu_x \cdot \mu_y \quad (7.14)$$

Na forma contínua, temos:

$$Cov(x, y) = \int \int_{\Omega} (x - \mu_x)(y - \mu_y)p(x, y)dxdy \quad (7.15)$$

7.5 FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Para a definição de uma função densidade de probabilidade devemos lembrar que a variável utilizada nessa função é uma variável aleatória contínua, isto é, uma variável de um

determinado sistema que é contínuo.

Chama-se *função densidade de probabilidade* (fdp) de uma variável, a função $f(x)$ que atenda às seguintes condições

$$\begin{aligned} i) f(x) &\geq 0, && \text{para } a < x < b \\ ii) \int_a^b f(x) dx &= 1, \end{aligned}$$

onde a e b pode ser, respectivamente, $-\infty$ e $+\infty$.

A *fdp*, então, determina a distribuição de probabilidade da variável em questão.