



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E TECNOLOGIA  
BACHARELADO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO



# **Inversão de dados Gravimétricos usando Algoritmo de Otimização Local Levenberg-Marquardt**

**Gabriel Gonçalo da Costa**

Caicó - RN  
2025

**GABRIEL GONÇALO DA COSTA**

**INVERSÃO DE DADOS GRAVIMÉTRICOS USANDO ALGORITMO DE  
OTIMIZAÇÃO LOCAL LEVENBERG-MARQUARDT**

**Trabalho de Conclusão de Curso**, apresentado ao Curso de Bacharelado em Sistemas de Informação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Sistemas de Informação.

Orientador(a): Prof. Dr. Francisco Márcio Barboza.

Caicó - RN  
2025

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistema de Bibliotecas - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Costa, Gabriel Gonçalo da.

Inversão de dados Gravimétricos usando Algoritmo de  
Otimização Local Levenberg-Marquardt / Gabriel Gonçalo da Costa.  
- 2025.

26f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC (graduação) -  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, CERES, Sistemas de  
Informação, Caicó, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Márcio Barboza.

1. Gravimetria - TCC. 2. Inversão - TCC. 3. Levenberg-  
Marquardt - TCC. I. Barboza, Francisco Márcio. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 550.3

Elaborado por Jackeline dos Santos Pinheiro da Silva Maia  
Cavalcanti - CRB-15/317

Gabriel Gonçalo da Costa

# **Inversão de dados Gravimétricos usando Algoritmo de Otimização Local Levenberg-Marquardt**

**Trabalho de Conclusão de Curso**, apresentado ao Curso de Bacharelado em Sistemas de Informação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Sistemas de Informação.

**Caicó - RN**, 24 de janeiro de 2025

---

**Prof. Dr. Francisco Márcio Barboza**  
Orientador  
DCT/UFRN

---

**Prof. MSc. Jerbeson de Melo Santana**  
Examinador 1  
PETROBRAS

---

**MSc. Arthur Anthony da Cunha Romão e Silva**  
Examinador 2  
FACISA/UFRN

Caicó - RN  
2025

# Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a todos que me apoiaram nesta jornada.

Aos meus colegas, por estarem ao meu lado, oferecendo apoio e incentivo incondicionais. A colaboração e a amizade de vocês foram essenciais para o meu crescimento e sucesso.

Ao meu professor, Dr. Francisco Márcio Barboza, pela orientação, paciência e sabedoria compartilhadas. Sua dedicação ao ensino e ao desenvolvimento de seus alunos é verdadeiramente inspiradora.

À minha namorada, Kalthany Almeida, por seu amor, paciência e compreensão. Seu apoio constante foi uma fonte de força e motivação para mim.

Aos meus pais, Oliveiro Araújo da Costa e Maria das Graças Gonçalo da Silva, pelos sacrifícios que fizeram para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

A todos vocês, meu mais sincero obrigado.

## RESUMO

O método de mínimos quadrados de Levenberg-Marquardt é uma ferramenta amplamente utilizada para a solução iterativa de problemas não lineares. Neste trabalho, resolveremos um problema inverso gravimétrico simples empregando o método de Levenberg-Marquardt. O algoritmo será implementado e as inversões serão realizadas utilizando dados sintéticos com diferentes tipos de ruídos. Os resultados mostraram que o algoritmo de Levenberg-Marquardt foi eficaz em convergir para soluções estáveis, mesmo em cenários com níveis significativos de ruído. A análise final revelou que os resultados obtidos foram consistentes e confiáveis, demonstrando a robustez do método aplicado a problemas de gravimetria.

**Palavras-chave:** Gravimetria, Inversão, Otimização local, Levenberg-Marquardt, Ruído.

## **ABSTRACT**

The Levenberg-Marquardt least squares method is a widely used tool for the iterative solution of nonlinear problems. In this work, we will solve a simple gravimetric inverse problem using the Levenberg-Marquardt method. The algorithm will be implemented, and the inversions will be performed using synthetic data with different types of noise. The results showed that the Levenberg-Marquardt algorithm was effective in converging to stable solutions, even in scenarios with significant levels of noise. The final analysis revealed that the results obtained were consistent and reliable, demonstrating the robustness of the method applied to gravimetry problems.

**Keywords:** Gravimetry, Inversion, Local optimization, Levenberg-Marquardt, Noise.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Método gravimétrico. . . . .	12
Figura 2 – Gravímetro com sistema de mola e massa. . . . .	13
Figura 3 – Esfera em meio homogêneo. . . . .	15
Figura 4 – Valores de gravidade calculados usando a equação 1. . . . .	16
Figura 5 – Chute inicial A . . . . .	24

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Densidade das Rochas. . . . .	14
Tabela 2 – Resultados das inversões utilizando os chutes A, B, C e D. . . . .	23

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	11
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Organização do trabalho</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Gravimetria</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelagem gravimétrica</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>Inversão</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>2.4</b>	<b>Método Gauss-Newton</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.5</b>	<b>Método Levenberg-Marquardt</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>25</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>26</b>

# 1 Introdução

A subsuperfície é um dos focos de estudo da Geofísica, dedicada a investigar as propriedades da Terra abaixo da superfície. Existem diversos métodos geofísicos para explorar essa região, cada um com suas próprias vantagens e características.

A gravimetria é um método geofísico que mede as variações no campo gravitacional da Terra para investigar a subsuperfície. Segundo [Kearey \*et al.\* \(2002\)](#) um corpo causador é uma unidade de rocha que apresenta uma densidade diferente do seu entorno. Um corpo causador representa uma zona subterrânea de massa anômala e causa uma perturbação localizada no campo gravitacional, conhecida como anomalia gravitacional.

No entanto, mesmo com o uso de técnicas geofísicas, é desafiador obter informações detalhadas do subsolo. Problemas de inversão de dados são frequentemente mal-postos, significando que pequenas perturbações nos dados podem causar grandes variações nas soluções. Para enfrentar esses desafios, é essencial aplicar técnicas avançadas de processamento de dados e algoritmos robustos. Por isso, precisamos não apenas da aplicação precisa dessas técnicas, mas também da implementação de estratégias avançadas de processamento de dados.

A inversão de dados, um processo matemático iterativo, emerge como uma abordagem essencial para extrair interpretações robustas a partir das medidas gravimétricas. Este método busca ajustar um modelo matemático aos dados observados, minimizando as diferenças entre as observações reais e aquelas previstas pelo modelo.

O algoritmo de Gauss-Newton é um exemplo de algoritmo local, pois explora soluções vizinhas a uma estimativa atual para encontrar a solução ótima. O método é relativamente simples de implementar, especialmente quando comparado com algoritmos globais mais complexos. O algoritmo concentra-se na redução dos resíduos em torno da estimativa atual dos parâmetros. Isso significa que ele ajusta os parâmetros de forma que a diferença entre os valores preditos e os valores reais diminua de maneira eficaz, melhorando a qualidade do ajuste em uma região local do espaço de parâmetros ([Nocedal; Wright, 1999](#)).

Contudo, ele pode falhar ou ser ineficaz em diversas situações. A principal limitação ocorre quando a matriz Jacobiana do modelo é mal condicionada ou singular, o que acontece quando os dados são redundantes ou as variáveis de ajuste estão altamente correlacionadas. Para contornar essas limitações, o método de Levenberg-Marquardt (LM) foi desenvolvido como uma combinação do método de Gauss-Newton e do método de gradiente descendente. O LM ajusta dinamicamente um parâmetro de regularização  $\lambda$  que controla a mistura entre esses dois métodos ([Gavin, 2019](#)).

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a qualidade das soluções do método de Levenberg-Marquardt na resolução de problemas inversos gravimétricos simples.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver e implementar um algoritmo para a solução do problema inverso gravimétrico usando o método de Levenberg-Marquardt;
- Aplicar o algoritmo de inversão em dados sintéticos com diferentes tipos de ruído;
- Avaliar o desempenho do método em diferentes níveis de ruído nas inversões;

## 1.2 Organização do trabalho

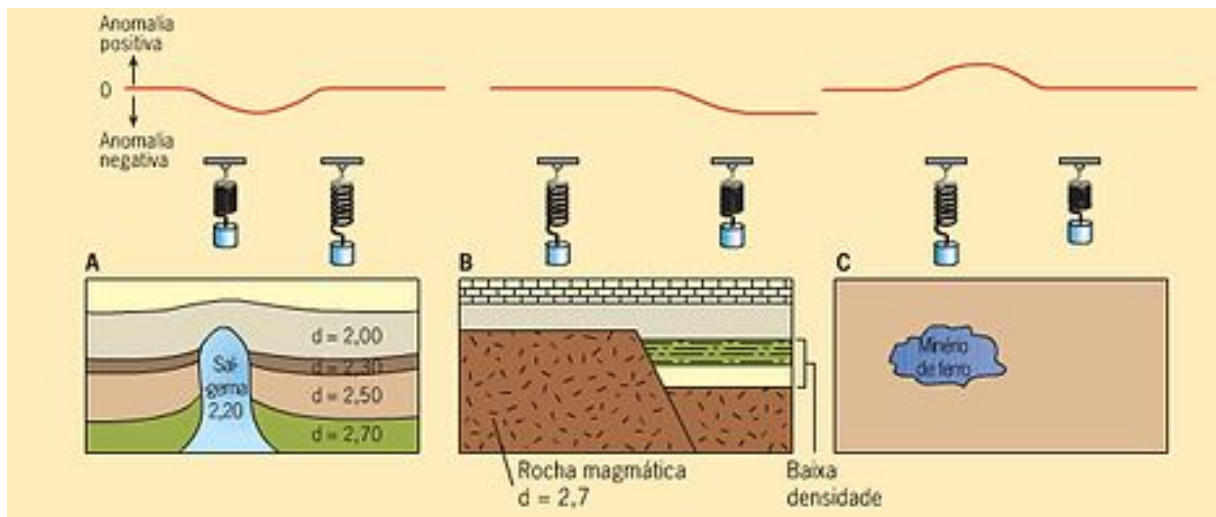
Neste trabalho, o capítulo 2 aborda a revisão da literatura, onde serão apresentados tópicos como gravimetria, inversão e os algoritmos de Gauss-Newton e Levenberg-Marquardt. Logo em seguida, no capítulo 3, temos os resultados e discussões, onde são expostos os resultados dos experimentos realizados. O capítulo 4 finaliza com as conclusões.

## 2 Revisão da literatura

### 2.1 Gravimetria

Segundo [Kearey et al. \(2002\)](#), a utilização do método geofísico da gravimetria baseia-se na medição da gravidade em diferentes pontos e localizações, fundamentando-se nas variações gravitacionais causadas pelas diferenças de densidade encontradas em vários tipos de rochas. Um corpo causador representa uma zona subsuperficial de massa anômala que provoca uma perturbação localizada no campo gravitacional, conhecida como anomalia gravitacional.

Figura 1 – Método gravimétrico.



Fonte: [Kearey et al. \(2002\)](#)

O avanço histórico da instrumentação de gravidade tem sido impulsionado por uma combinação de maior precisão, redução do tempo para cada medição, maior portabilidade e um desejo de automação e facilidade de uso. Centenas de diferentes designs de gravímetros foram propostos ou construídos desde que as primeiras medições de gravidade foram feitas. Dada a relativa dimensão e importância da exploração por gravidade. Gravímetros têm sido amplamente utilizados para exploração geofísica em diferentes momentos: o pêndulo, o gravímetro de queda livre, o gravímetro de mola e o gravímetro de corda vibrante. Esses instrumentos foram adaptados em várias ocasiões para levantamentos terrestres, de poços, marinhos, submarinos, no fundo do oceano, aéreos, espaciais e lunares ([Nabighian et al., 2005](#)).

Gravímetros funcionam como balanças de mola que sustentam uma massa constante. Variações no peso dessa massa, causadas por mudanças na gravidade, resultam em variações no comprimento da mola, fornecendo uma medida das alterações na gravidade. Quando a gravidade aumenta, o peso da massa suspensa também aumenta, fazendo com que a mola se estique. A

extensão da mola é proporcional à força de extensão. Dessa forma, a variação no comprimento da mola em um gravímetro serve como uma medida direta da mudança na gravidade. Ao calibrar o gravímetro com valores conhecidos, é possível medir as variações na gravidade com alta precisão, o que é essencial para estudos geofísicos.

Figura 2 – Gravímetro com sistema de mola e massa.



Fonte: Geofacao (2017)

A densidade de uma rocha é definida como sua massa por unidade de volume (geralmente expressa em gramas por centímetro cúbico,  $\text{g}/\text{cm}^3$ ). As diferentes densidades das rochas dependem da composição mineralógica, estrutura e porosidade. Rochas ígneas geralmente têm densidades mais altas do que rochas sedimentares, devido ao seu conteúdo mineral rico em ferro e magnésio. Exemplos incluem basalto e granito. Vulcões, particularmente lavas, tem uma alta porosidade, e conseqüentemente uma baixa densidade (Telford *et al.*, 1990).

Tabela 1 – Densidade das Rochas.

Rochas Sedimentares		Rochas Ígneas	
Rocha	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Rocha	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )
Arenito	2.20 - 2.80	Granito	2.63 - 2.75
Calcário	2.30 - 2.70	Basalto	2.80 - 3.00
Conglomerado	2.30 - 2.50	Andesito	2.60 - 2.80
Marga	2.50 - 2.70	Riolito	2.40 - 2.60
Xisto	2.60 - 2.75	Obsidiana	2.30 - 2.60

### Rochas Metamórficas

Rocha	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )
Mármore	2.60 - 2.90
Gnaisse	2.60 - 2.75
Xisto	2.70 - 3.00
Quartzito	2.60 - 2.75
Filito	2.60 - 2.80

Fonte: Adaptação [Telford et al. \(1990\)](#)

## 2.2 Modelagem gravimétrica

Segundo [Richter \(2021\)](#), a modelagem direta na gravimetria é um exemplo clássico de um problema bem posto. Esse processo envolve o cálculo de anomalias gravitacionais para modelos geológicos conhecidos, utilizando leis físicas fundamentais. A natureza bem posta desses problemas garante que as soluções sejam únicas e estáveis, tornando a modelagem direta uma ferramenta poderosa e confiável para a interpretação de dados gravimétricos e a exploração geofísica.

Neste contexto, baseado em [Pujol \(2007\)](#), consideramos uma esfera homogênea enterada com raio  $a$  e seu centro localizado em  $(y_0, z_0)$ , onde  $y_0$  é a coordenada horizontal ao longo do eixo  $y$  e  $z_0$  representa a profundidade (veja a Figura 3). A componente vertical da atração gravitacional causada por esta esfera em um ponto  $(y_i, 0)$  com profundidade zero é descrita pela equação:

$$g(y_i, z, a) = \frac{4\pi}{3} \frac{\Gamma D a^3 z}{[(y_i - y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (1)$$

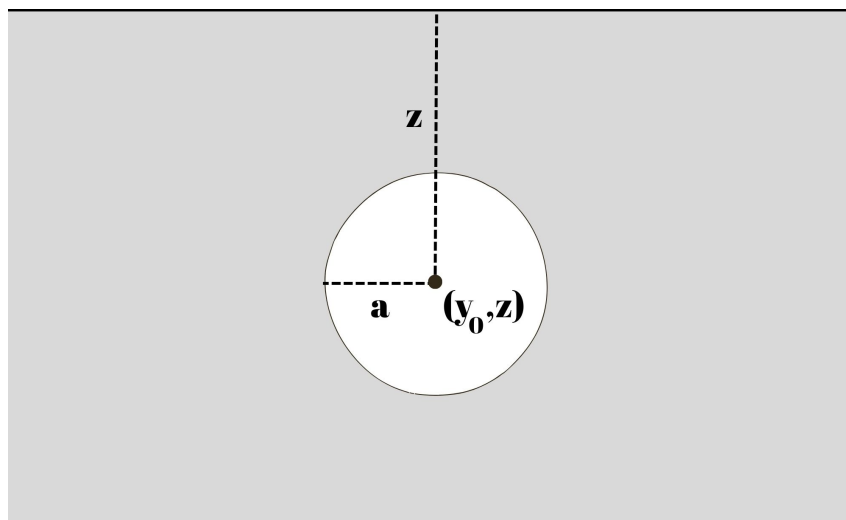
Esta equação modela a componente vertical da atração gravitacional gerada pela esfera. Vamos analisar os elementos da equação, onde:

- $g(y_i, z, a)$  é a atração gravitacional no ponto  $(y_i, 0)$ .
- $\frac{4\pi}{3}$  é uma constante relacionada à geometria tridimensional da esfera.

- $D$  é o contraste de densidade da esfera.
- $\Gamma$  é a constante gravitacional.
- $a$  é o raio da esfera.
- $(y_i - y_0)^2 + z^2$  representa a distância ao quadrado entre o ponto de observação  $(y_i, 0)$  e o centro da esfera  $(y_0, z_0)$ .

Esta equação é fundamental na modelagem direta da gravidade e é utilizada para calcular a atração gravitacional em pontos específicos acima de corpos enterrados, levando em consideração a densidade, o raio da esfera e a distância até o ponto de observação.

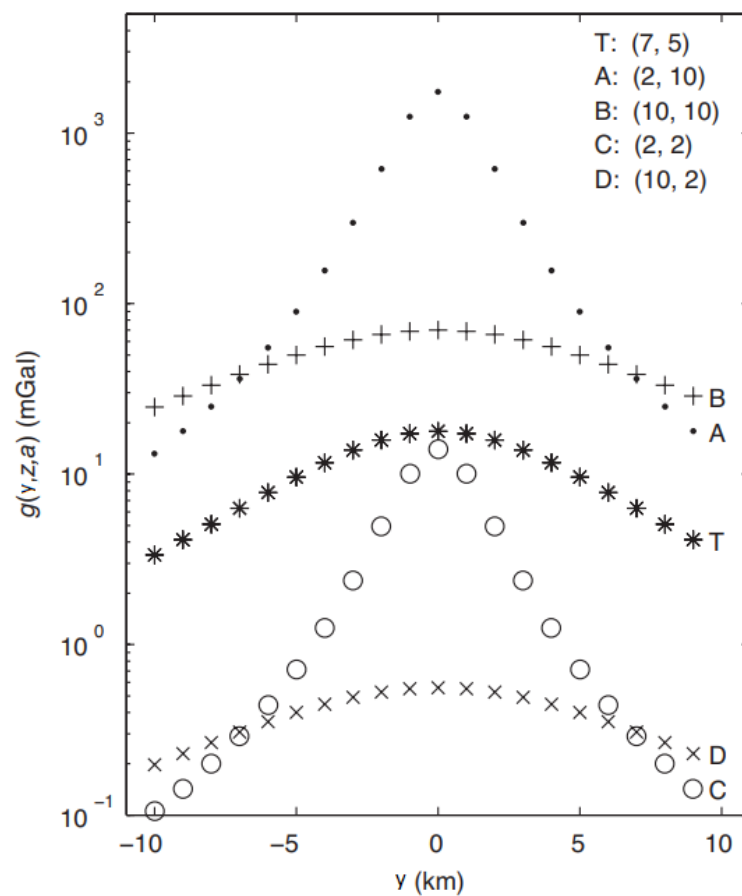
Figura 3 – Esfera em meio homogêneo.



Fonte: Adaptação Kearey *et al.* (2002)

Conforme descrito por Dobrin (1976),  $\Gamma$  é a constante gravitacional e  $D$  representa o contraste de densidade, que é a diferença entre a densidade da esfera e a densidade do meio circundante, ambos assumidos como homogêneos. Neste estudo, consideramos as distâncias em quilômetros ( $km$ ), as densidades em gramas por centímetro cúbico ( $g/cm^3$ ) e a gravidade em miligalileus ( $mGal$ ). O valor adotado para  $\Gamma$  é  $6,672 mGal$  e  $D$  é  $0,25 g/cm^3$ .

Figura 4 – Valores de gravidade calculados usando a equação 1.



Fonte: Próprio autor (2025)

Na figura 4 mostra os valores de gravidade (modelagem direta) correspondentes a alguns valores de profundidade e raios, que são calculados usando a equação 1 para diversos pares  $(z, a)$ , listados no canto superior direito da figura. Cada par é identificado por um símbolo diferente e por uma letra. Os valores de gravidade identificados por um T são os valores verdadeiros, enquanto os outros correspondem aos valores iniciais utilizados para a inversão dos valores verdadeiros. A escala de gravidade é logarítmica.

## 2.3 Inversão

Embora a modelagem direta seja uma ferramenta valiosa na gravimetria e em outras disciplinas geofísicas, é importante reconhecer esses desafios e limitações. Muitas vezes, os parâmetros do modelo geológico não são conhecidos com precisão. A inversão permite ajustar esses parâmetros para melhorar a correspondência entre os dados observados e os calculados na modelagem direta.

O principal objetivo da teoria de inversão é determinar os parâmetros de um modelo que reproduzam os dados reais (Parker, 1977). Na geofísica, essa técnica é utilizada para encontrar modelos geológicos que justifiquem os valores das medidas físicas adquiridas durante levantamentos feitos na superfície, como a eletrorresistividade.

Sen e Stoffa (2013) classificam os métodos de inversão em duas categorias: inversão direta e inversão dos parâmetros do modelo. Na inversão direta, um operador matemático é escolhido e aplicado ao dado observado para recuperar o modelo geológico, como é feito na migração sísmica. Já a inversão dos parâmetros do modelo envolve a geração de dados sintéticos a partir de um modelo suposto, que são então comparados com os dados reais observados. Se a comparação entre os dois for aceitável, o modelo é adotado como solução. Caso contrário, o modelo é ajustado, os cálculos são refeitos e comparados novamente com as observações. Esse processo é repetido automaticamente e de forma iterativa até que seja encontrado um modelo cujos dados gerados sinteticamente sejam compatíveis com os dados observados.

Na geofísica, essa técnica é utilizada para estimar modelos geológicos que justifiquem os valores das medidas físicas adquiridas durante levantamentos feitos na superfície, como na gravimetria. Em outras palavras, as observações de campo ou dados coletados fornecem um conjunto de vetores de dados  $g = [g_1, g_2, g_3, \dots, g_N]^T$ , que correspondem a um modelo de esfera de raio  $a$  e profundidade  $z$  (ou seja,  $\mathbf{x} = [z, a]^T$ ). Esses vetores são relacionados por meio do operador de modelagem, na seguinte equação:

$$d = g(\mathbf{x}) \quad (2)$$

No processo de inversão, estimamos um modelo  $m_{est}$  que minimiza a função objetivo, uma medida de discrepância entre os conjuntos de dados observados e calculados, conforme representado na equação:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \|d^o - g(\mathbf{x})\|^2 \quad (3)$$

onde  $d^o$  e  $g(\mathbf{x})$  são dados observados e dados calculados, respectivamente, e  $N$  é o número total de dados.

## 2.4 Método Gauss-Newton

Segundo Pujol (2007), seja  $f$  uma função das variáveis independentes  $v_k$  (para  $k = 1, 2, \dots$ ) e dos parâmetros  $x_j$  (para  $j = 1, 2, \dots, n$ ). Para simplificar, consideraremos essas variáveis e parâmetros como os componentes dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{x}$ , respectivamente. Denotamos um conjunto específico de valores das variáveis por  $v_i$ . Suponhamos que  $f$  seja um modelo matemático para observações de interesse, e que  $o_i$  seja a observação correspondente ao conjunto de variáveis  $v_i$ , de forma que

$$o_i \approx f(\mathbf{v}_i, \mathbf{x}) \equiv f_i(\mathbf{x}); \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Definimos o resíduo  $r_i(\mathbf{x})$  como

$$r_i(\mathbf{x}) = o_i - f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Estamos interessados em encontrar o conjunto de parâmetros  $\mathbf{x}$  que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, isto é,

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i^2(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Uma função que mede o desvio entre observações e valores do modelo, como  $S(\mathbf{x})$ , é conhecida como função de mérito. Outros termos usados na literatura de estimação e otimização de parâmetros são função objetivo, função de perda e função de risco. Se  $f_i(\mathbf{x})$  é uma função não linear dos parâmetros, a minimização da equação 6 geralmente requer o uso de métodos numéricos. Uma abordagem típica é expressar  $f_i(\mathbf{x})$  em termos da expansão linearizada de Taylor em torno de uma solução inicial  $\mathbf{x}_o = (x_{j_o})$ , onde  $S(\mathbf{x})$  não possui um ponto estacionário. Isso dá

$$f_i(\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}_o) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} (x_j - x_{j_o}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Usando esta expressão na equação 4, podemos introduzir um novo conjunto de resíduos.

$$r_i = o_i - f_i(\mathbf{x}_o) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_j, \quad (8)$$

onde

$$\delta_j = x_j - x_j^o \quad (9)$$

e

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o}. \quad (10)$$

Note que  $f_i(\mathbf{x}_o)$  e as derivadas  $a_{ij}$  têm valores numéricos específicos, enquanto  $\delta_j$  são desconhecidos. A equação 8 pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} - \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}, \quad (11)$$

$\mathbf{r}$  e  $\boldsymbol{\delta}$  são vetores cujas componentes são  $r_i$  e  $\delta_j$ , respectivamente,  $\mathbf{A}$  é a matriz das derivadas, e  $\mathbf{c}$  é o vetor com componentes  $c_i = o_i - f_i(\mathbf{x}_o)$ .

Queremos encontrar o vetor  $\delta$  que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos:

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{c} - \mathbf{A}\delta)^T (\mathbf{c} - \mathbf{A}\delta). \quad (12)$$

Expansão dessa expressão dá:

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{c} - 2\mathbf{c}^T \mathbf{A}\delta + \delta^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\delta. \quad (13)$$

O sobrescrito  $T$  denota transposição. Estritamente falando, a equação 13 é uma função de  $\delta$ , o valor de  $x$  que minimiza a equação 6 será determinado de forma iterativa, o foco será derivar resultados envolvendo  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \delta. \quad (14)$$

Para encontrar o mínimo de  $S$ , calculamos a derivada de  $S$  com relação a  $\delta$  e igualamos a zero:

$$\frac{\partial S}{\partial \delta} = -2\mathbf{A}^T \mathbf{c} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}\delta = 0. \quad (15)$$

Isso leva à equação dos mínimos quadrados ordinários:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\delta = \mathbf{A}^T \mathbf{c}. \quad (16)$$

Assumimos que  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é inversível, o que permite resolver a equação 16 para  $\delta$ . Se essa suposição não for válida, métodos alternativos, como os mínimos quadrados com amortecimento, devem ser usados.

Finalmente, para garantir que a solução minimiza  $S$ , examinamos a matriz Hessiana de  $S$ ,  $H_S$ , que é a matriz das segundas derivadas de  $S$  com relação a  $\delta$ . Como os termos quadráticos na equação 13 são da forma  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é simétrica, temos:

$$H_S = 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A}). \quad (17)$$

Uma condição para a existência de um mínimo para  $S$  é que  $H_S$  seja definido positivo, o que ocorre quando  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  é invertível (Pujol, 2007). Esses resultados permitem estabelecer, em princípio, o seguinte processo iterativo:

1. Resolva a equação

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{(p)} \delta^{(p)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{c})^{(p)}, \quad (18)$$

onde o superscrito  $p$  indica o número da iteração e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{c}$  têm componentes

$$a_{ij}^p = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p}, \quad c_i^p = o_i - f_i(\mathbf{x}^p). \quad (19)$$

2. Atualize a estimativa com

$$\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p + \boldsymbol{\delta}^p. \quad (20)$$

Podem ser introduzidas condições como

$$\delta_j^{(p)} \leq \delta_j^{\min}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

$$s^{(p+1)} \leq s^{\min}, \quad (22)$$

$$p > p^{\max}, \quad (23)$$

onde os valores no lado direito dessas equações são pré-estabelecidos.

O método iterativo de minimização 20 com  $\boldsymbol{\delta}$  calculado usando a equação 18 é conhecido como o método de Gauss-Newton. Esse método pode ser derivado por uma abordagem diferente (Gil *et al.*, 1981). No entanto, como mencionado na Introdução, um problema com esse método é que  $\mathbf{x}^0$  pode estar muito distante do valor ótimo, o que pode levar a um processo iterativo não convergente.

---

#### Algorithm 1 Método de Gauss-Newton

---

**Data:** Observações  $o_i$ , função  $f_i(\mathbf{x})$ , matriz  $\mathbf{A}$  e vetor  $\mathbf{c}$

**Result:** Solução  $\mathbf{x}$  que minimiza a função objetivo

**Entrada:** Estimativa inicial  $\mathbf{x}^0$ ,  $p \leftarrow 0$

**Saída:** Solução  $\mathbf{x}$

**while**  $p < p_{\max}$  **do**

/\* Calcule a matriz  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{c}$  para a iteração atual \*/

**for**  $i = 1$  **to**  $m$  **do**

Calcule  $a_{ij}^p = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p}$  Calcule  $c_i^p = o_i - f_i(\mathbf{x}^p)$

**end**

/\* Resolva a equação normal \*/

$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{(p)} \boldsymbol{\delta}^{(p)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{c})^{(p)}$

/\* Atualize a estimativa \*/

$\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p + \boldsymbol{\delta}$

$p \leftarrow p + 1$

**end**

---

## 2.5 Método Levenberg-Marquardt

A otimização de problemas não lineares de mínimos quadrados pode ser desafiadora, principalmente quando o comportamento da função de erro não é bem aproximado por um modelo linear. O método de Gauss-Newton resolve isso usando uma aproximação linear em torno de uma solução inicial. Contudo, em regiões onde a função de erro é altamente não linear, o método de Gauss-Newton pode falhar devido à sua dependência da inversão da matriz Hessiana, que pode se tornar mal-condicionada.

O método de Levenberg-Marquardt, também conhecido como algoritmo de Levenberg-Marquardt, oferece uma solução para esse problema, combinando o método de Gauss-Newton com uma modificação inspirada no gradiente descendente. O algoritmo ajusta dinamicamente a maneira como a aproximação linear é feita, melhorando a estabilidade e a convergência, especialmente em casos de comportamento não linear (Pujol, 2007).

Quando o modelo é bem comportado e o método de Gauss-Newton apresenta bom desempenho, o parâmetro de regularização  $\lambda$  é mantido pequeno, e o método se comporta de forma semelhante ao Gauss-Newton. No entanto, quando o Gauss-Newton falha ou quando o erro de aproximação aumenta, o método de Levenberg-Marquardt ajusta dinamicamente  $\lambda$ , fazendo com que o algoritmo se comporte de maneira mais semelhante ao gradiente descendente. Esse ajuste contribui para a estabilização do processo de otimização, tornando o LM mais robusto, especialmente em cenários de problemas mal condicionados ou com dados ruidosos. Assim, o método de Levenberg-Marquardt pode ser visto como uma combinação eficiente entre a rapidez do Gauss-Newton e a robustez do gradiente descendente, ajustando-se conforme as necessidades do problema durante o processo de otimização (Gavin, 2019).

Para ilustrar formalmente como o parâmetro de regularização é incorporado, consideremos a seguinte equação. Seja  $\lambda \geq 0$  arbitrário e suponha que  $\delta_o$  satisfaça:

$$(A^T A + \lambda I)\delta = A^T c.$$

Note que esta formulação é mais geral do que a fornecida por Marquardt, que assumiu a existência de  $(A^T A)^{-1}$ , uma suposição que não é válida em problemas mal condicionados.

**Algorithm 2** Método de Levenberg-Marquardt**Data:** Observações  $o_i$ , função  $f_i(\mathbf{x})$ **Result:** Solução  $\mathbf{x}$ **Entrada :** Estimativa inicial  $\mathbf{x}^0$ ,  $p \leftarrow 1$ **Saída** : Solução  $\mathbf{x}$ 

```

while  $p < p_{max}$  do
  /* Ajuste o parâmetro  $\lambda$  */
  Atualize  $\lambda$ 
  /* Calcule a matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  e o vetor de resíduos  $\mathbf{c}$  */
  for  $i = 1$  to  $m$  do
    Calcule  $a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^p}$    Calcule  $c_i = o_i - f_i(\mathbf{x}^p)$ 
  end
  /* Resolva o sistema linear */
   $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\delta} = \mathbf{A}^T \mathbf{c}$ 
  /* Atualize Delta */
   $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{c};$ 
  /* Atualize a solução */
   $\mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{x}^p + \boldsymbol{\delta}$ 
  /* Atualize o parâmetro  $p$  */
   $p \leftarrow p + 1$ 
end

```

### 3 Resultados e Discussão

Neste trabalho, foi abordada a aplicação do algoritmo de otimização local Levenberg-Marquardt na inversão de dados gravimétricos, uma ferramenta crucial para a modelagem e interpretação de dados geofísicos. O algoritmo foi escolhido devido à sua eficiência em resolver problemas não lineares e sua capacidade de ajustar parâmetros de forma iterativa, minimizando o erro entre os dados observados e os resultados simulados. Para executar o algoritmo de Levenberg-Marquardt foi utilizado a ferramenta Octave ([The Octave Project, 2023](#)).

Os resultados obtidos demonstram que o Levenberg-Marquardt é eficaz na obtenção de soluções precisas para a inversão gravimétrica, permitindo a recuperação de parâmetros geofísicos, como a densidade e a profundidade de fontes de anomalias. Além disso, a aplicação deste algoritmo possibilitou a redução significativa do erro residual entre os dados simulados e os dados observados, evidenciando sua robustez.

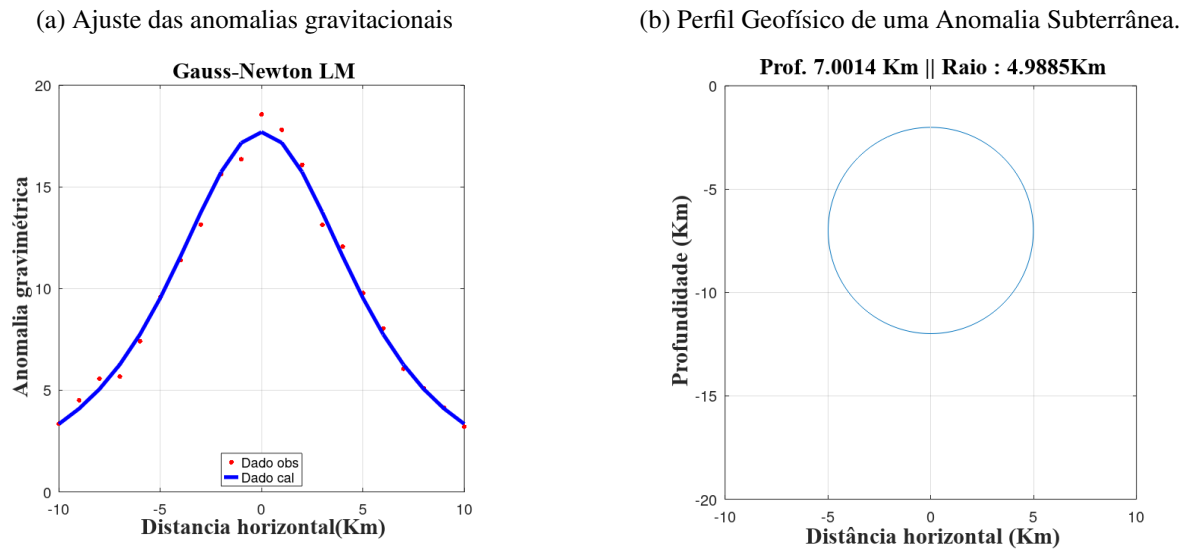
Para avaliar a eficácia do algoritmo de Levenberg-Marquardt, realizamos testes utilizando um modelo com profundidade de 7 Km e raio de 5 km. Alinhados com o enfoque da nossa pesquisa, os dados foram submetidos a níveis de ruído de 10% e 20%. O critério de parada do algoritmo foi definido como 100 iterações. Como o algoritmo funciona com chutes iniciais de profundidade e raio, a análise foi feita com 4 chutes iniciais(A, B, C, D). A tabela a seguir mostra os resultados com base nos parâmetros utilizados.

Tabela 2 – Resultados das inversões utilizando os chutes A, B, C e D.

<b>Chute inicial</b>	<b>Parâmetros</b>	<b>Ruído</b>	<b>Resultado(Prof./Raio)</b>
<b>A</b>	2, 10	10%	(7,0014),(4,9885)
		20%	(7,3012),(4,978)
<b>B</b>	10, 10	10%	(7,0014),(4,9885)
		20%	(7,3012),(4,978)
<b>C</b>	2, 2	10%	(7,0014),(4,9885)
		20%	(7,3012),(4,978)
<b>D</b>	10, 2	10%	(7,0014),(4,9885)
		20%	(7,3012),(4,978)

**Fonte:** Próprio autor (2025)

Figura 5 – Chute inicial A



Fonte: Próprio autor (2025)

A figura 5 (a) mostra uma curva azul representando as anomalias gravitacionais calculadas ao longo de uma distância horizontal, ajustadas com os dados observados, indicados pelos pontos vermelhos. Esta comparação visa avaliar a precisão do ajuste de Gauss-Newton LM. A parte (b) reflete a representação gráfica desse modelo, destacando sua profundidade e raio específicos.

## 4 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo avaliar a qualidade das soluções obtidas pelo método de Levenberg-Marquardt na resolução de problemas inversos gravimétricos simples. Ao analisar os experimentos, foi possível observar que o algoritmo de Levenberg-Marquardt apresenta bom desempenho, mesmo em condições desafiadoras, como cenários com dados ruidosos. Nos testes realizados com diferentes chutes iniciais, os resultados obtidos se mostraram próximos dos valores reais do modelo, que eram 7 e 5. Não foi observada diferença significativa nos resultados ao variar os chutes iniciais, sendo a única alteração perceptível quando o nível de ruído foi alterado.

Assim, pode-se concluir que o trabalho foi bem-sucedido, alcançando os objetivos estabelecidos e demonstrando a viabilidade do algoritmo para resolver problemas inversos gravimétricos simples.

# Referências

- DOBRIN, M. Introduction to geophysical prospecting mc graw-hill publ. Co., New York, 1976.
- GAVIN, H. P. The levenberg-marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems. *Department of Civil and Environmental Engineering Duke University August*, v. 3, 2019.
- Geofacao. *Gravimetria e Geofísica*. 2017. Disponível em: <<https://geofacao.wordpress.com/2017/12/20/gravimetria-e-geofisica/>>.
- GIL, D.; NEUMAN, S.; SMITH, R. A method for nonlinear least squares optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 33, n. 1, p. 45–60, 1981.
- KEAREY, P.; BROOKS, M.; HILL, I. *An introduction to geophysical exploration*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 4.
- NABIGHIAN, M. N.; ANDER, M.; GRAUCH, V.; HANSEN, R.; LAFEHR, T.; LI, Y.; PEARSON, W.; PEIRCE, J.; PHILLIPS, J.; RUDER, M. Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 70, n. 6, p. 63ND–89ND, 2005.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer, 1999.
- PARKER, R. L. Understanding inverse theory. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 5, n. 1, p. 35–64, 1977.
- PUJOL, J. *The solution of nonlinear inverse problems and the Levenberg-Marquardt method*. Berlin: Springer, 2007. ISBN 978-3-540-08534-0.
- RICHTER, M. *Inverse problems: Basics, theory and applications in geophysics*. [S.l.]: Springer Nature, 2021.
- SEN, M. K.; STOFFA, P. L. *Global optimization methods in geophysical inversion*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E.; KEYS, D. A. *Applied Geophysics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. ISBN 978-0521326931.
- The Octave Project. *GNU Octave*. [S.l.], 2023. Accessed: 2025-01-21. Disponível em: <<https://www.gnu.org/software/octave/>>.