



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E
DE COMPUTAÇÃO



Um Método de Sintonia de Controladores PID Multivariáveis Baseado em Otimização para Sistemas Lineares Sob Restrições

Fábio Henrique de Carvalho Ferraz

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Número de ordem PPgEEC: M651
Natal, RN, Outubro de 2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Ferraz, Fábio Henrique de Carvalho.

Um método de sintonia de controladores PID multivariáveis baseado em otimização para sistemas lineares sob restrições / Fábio Henrique de Carvalho Ferraz. - 2022.

76 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação. Natal, RN, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea.

1. Controlador PID - Dissertação. 2. Saturação nos Atuadores - Dissertação. 3. Sistemas Sob Restrições - Dissertação. 4. Conjuntos Invariantes - Dissertação. 5. Sistemas MIMO - Dissertação. 6. Otimização - Dissertação. I. Dórea, Carlos Eduardo Trabuco. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 62-55(043.3)

Um Método de Sintonia de Controladores PID Multivariáveis Baseado em Otimização para Sistemas Lineares Sob Restrições

Fábio Henrique de Carvalho Ferraz

Dissertação de Mestrado aprovada em 07 de Outubro de 2022 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea (orientador) DCA/UFRN

Prof. Dr. André Laurindo Maitelli DCA/UFRN

Prof. Dr. Tiago Alves de Almeida IC/UFAL

A Deus e a Virgem Maria por terem me amparado e me dado forças nos momentos mais difíceis. Sem a direção deles, a conclusão deste trabalho não seria possível.

*À minha digníssima esposa **Rafaela Ferraz** por todo amor, zelo e incentivo.*

*Aos meus **pais, parentes e amigos** pela compreensão e orações. Nada disso teria sentido se vocês não se fizessem presentes em minha vida.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea, pela excelente orientação, competência, profissionalismo, apoio e paciência. Obrigado por acreditar em mim, tenho certeza que não chegaria onde cheguei sem o seu apoio.

Aos membros da banca examinadora, professor Dr. André Laurindo Maitelli e professor Dr. Tiago Alves de Almeida, que tão gentilmente aceitaram participar e colaborar com esta dissertação.

Ao colega e futuro doutor José Kleiton Ewerton da Costa Martins pela disponibilidade em ajudar. Os conhecimentos repassados foram fundamentais para que as implementações no *AMPL* e *Matlab* tornassem possíveis.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é proposto um método de sintonia de controladores PID, baseado em otimização, para sistemas lineares multivariáveis de tempo discreto sujeitos a restrições nas variáveis de saída e saturação dos atuadores. A partir de uma modelagem politópica da saturação, são apresentadas condições para que um poliedro contido no conjunto de restrições, seja positivamente invariante em relação a um sistema em malha fechada com um controlador PID multivariável e filtro de primeira ordem para obtenção de poliedros maiores. Tais condições são usadas na formulação de um problema de otimização não-linear, cuja solução fornece os parâmetros dos controladores que satisfazem as restrições, garante estabilidade local e otimiza o desempenho do sistema em malha fechada. São analisados tanto um controlador centralizado quanto um descentralizado. A eficiência do método proposto é avaliada a partir de resultados de simulação numérica.

Palavras-chave: Controlador PID, Saturação nos Atuadores, Sistemas sob Restrições, Conjuntos Invariantes, Sistemas MIMO, Otimização.

Abstract

In this work we propose a method based on optimization for tuning PID controllers, for linear Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) discrete-time systems subject to constraints on the output variables and saturation of the actuators. From a polytopic modeling of saturation, conditions are presented for a polyhedron contained in the set of constraints to be positively invariant with respect to a closed-loop system with a MIMO PID controller and first order filter to obtain larger polyhedra. Such conditions are used in the formulation of a nonlinear optimization problem, whose solution provides the controller parameters that satisfy the constraints, guarantee local stability and optimize the performance of the closed loop system. Both a centralized and a decentralized controller are analyzed. The efficiency of the proposed method is evaluated from numerical simulation results.

Keywords: PID Controller, Actuator Saturation, Systems with Constraints, Invariant Sets, MIMO System, Optimization.

Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
Lista de Símbolos e Abreviaturas	vi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Organização do texto	3
2 Fundamentação Teórica	4
2.1 Controlador PID	4
2.1.1 Variações do controlador PID	6
2.2 O PID Digital	6
2.3 Representação de sistemas no espaço de estado	9
2.4 Relações espaço de estado e função de transferência	11
2.4.1 Transformação espaço de estado para função de transferência	11
2.4.2 Transformação função de transferência para espaço de estado	12
2.5 O <i>Windup</i>	14
2.6 Otimização em Sistemas	15
2.6.1 Métodos Determinísticos	15
2.7 Sistemas Lineares sob restrições	16
2.8 Invariância Positiva	17
2.9 Modelagem Politópica da Saturação	17
2.10 Considerações Finais	23
3 Metodologia	24
3.1 Caso monovariável	24
3.1.1 Modelo da Planta com Controlador PI-D	24
3.1.2 Invariância e Restrições	27
3.2 Projeto via Otimização (caso monovariável)	28
3.3 Caso multivariável	29
3.3.1 Modelo da Planta com dois Controladores PI-D	29
3.3.2 Invariância e Restrições	35

3.4	Projeto via Otimização (caso multivariável)	35
3.5	Considerações Finais	36
4	Exemplos Numéricos	37
4.1	Caso SISO - Modelo de um Motor CC	37
4.1.1	Resultados caso SISO (Motor CC)	39
4.2	Caso SISO - Modelo de primeira ordem instável	42
4.2.1	Resultados SISO caso B (Martins et al. 2020)	44
4.3	Caso MIMO 2x2	46
4.3.1	Resultados caso MIMO 2x2	49
4.3.2	Resultados com o termo <i>feedforward</i>	51
4.4	Considerações Finais	54
5	Conclusão	55
	Referências bibliográficas	57
A	Esquemáticos criados no simulink	60
A.1	Estrutura MIMO 2x2 com 2 controladores PID	60
A.2	Estrutura MIMO 2x2 com 4 controladores PID	61
A.3	Estrutura MIMO 2x2 com 4 controladores PID e termo <i>feedforward</i>	62

Lista de Figuras

2.1	Diagrama em blocos de um controle PID.	4
2.2	Estrutura do PID modificada com ação derivativa realimentada na saída.	6
2.3	Topologia com PID paralelo.	6
2.4	Topologia PI-D com elemento derivativo realimentado na saída.	7
2.5	Topologia PI-D em tempo discreto com elemento derivativo realimentado na saída.	8
2.6	Topologia MIMO 2x2 descentralizada com dois PI-D's em tempo discreto.	9
2.7	Diagrama de blocos do sistema representado no espaço de estado contínuo.	10
2.8	Diagrama de blocos do sistema representado no espaço de estado discreto.	10
2.9	Ilustração de um conjunto positivamente invariante.	17
2.10	Diagrama de controle de um sistema discreto com não linearidade do tipo saturação.	18
3.1	Sistema de malha fechada com controlador PI-D e saturação no atuador.	24
3.2	Sistema de malha fechada com controlador PI-D, saturação no atuador e termo <i>feedforward</i>	24
3.3	Sistema em malha fechada com dois controladores PI-D e saturação nos atuadores.	29
3.4	Sistema em malha fechada com dois controladores PI-D, saturação nos atuadores e termo <i>feedforward</i>	29
4.1	Motor CC com campo de enrolamento separado com corrente constante (i_f).	38
4.2	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.2.	40
4.3	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.3.	41
4.4	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.4.	41
4.5	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.5.	42
4.6	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com PI/PID para condições da Tabela 4.6.	44
4.7	Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x[k] \ p[k]]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso B com 1 PID.	45
4.8	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com PI/PID para condições da Tabela 4.7.	45

4.9	Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x[k] \ p[k]]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso B com 1 PID e termo <i>feedforward</i>	46
4.10	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 2 PID's para condições da Tabela 4.8.	50
4.11	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 4 PID's para condições da Tabela 4.8.	50
4.12	Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso com 4 PID's.	51
4.13	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 4 PID's e termo <i>feedforward</i> para condições da Tabela 4.9. . .	52
4.14	Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso 1 com 4 PID's e termo <i>feedforward</i>	52
4.15	Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 4 PID's e termo <i>feedforward</i> para condições da Tabela 4.10. .	53
4.16	Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso 2 com 4 PID's e termo <i>feedforward</i>	54
A.1	Esquemático 1	60
A.2	Esquemático 2	61
A.3	Esquemático 3	62

Lista de Tabelas

2.1	Efeitos das ações do controlador PID.	5
4.1	Parâmetros do Motor.	38
4.2	Variando os limites da integral do erro.	39
4.3	Variando os limites da derivada da saída.	40
4.4	Variando os limites da integral do erro com $-36V \leq u[k] \leq 36V$	41
4.5	Variando os limites da derivada da saída com $-36V \leq u[k] \leq 36V$	42
4.6	Simulação com PI e PID (sem termo <i>feedforward</i>).	44
4.7	Simulação com PI e PID (com termo <i>feedforward</i>).	45
4.8	Simulações com 2 e 4 PID's.	49
4.9	Simulação (para o caso 1) com 4 PID's e termo <i>feedforward</i>	51
4.10	Simulação (para o caso 2) com 4 PID's e termo <i>feedforward</i>	53

Lista de Símbolos e Abreviaturas

$\mathbf{0}$:	<i>matriz de escalares 0 de dimensão apropriada</i>
$\mathbf{1}$:	<i>Vetor coluna de escalares 1 com dimensão apropriada</i>
$Co(\cdot)$:	<i>Envelope convexo</i>
$K^{m \times p}$:	<i>matriz de ganho de dimensão $m \times p$</i>
K_d :	<i>Ganho derivativo</i>
K_i :	<i>Ganho integrativo</i>
K_p :	<i>Ganho proporcional</i>
T_d :	<i>Tempo derivativo</i>
T_i :	<i>Tempo integrativo</i>
T_s :	<i>Período de amostragem</i>
$\ M\ _\infty$:	<i>Norma infinita da matriz M</i>
\exists :	<i>Existe</i>
\forall :	<i>Para todo</i>
\in :	<i>Pertence</i>
\mathbb{N} :	<i>Conjunto dos números naturais</i>
\mathbb{R} :	<i>Conjunto dos números reais</i>
$\mathbb{R}^{m \times n}$:	<i>Espaço de matrizes reais de dimensão $m \times n$</i>
\mathbb{R}^n :	<i>Espaço dos vetores coluna reais de dimensão n (com n elementos)</i>
\mathcal{L} :	<i>Transformada de Laplace</i>
\mathcal{Z} :	<i>Transformada Z</i>
\subset :	<i>Está contido</i>
$e(t)$:	<i>Variável do erro no instante t de tempo contínuo</i>

$e[k]$: Variável do erro no instante k de tempo discreto

$r(t)$: Referência de processo ou set-point do sistema em tempo contínuo

$r[k]$: Referência de processo ou set-point do sistema em tempo discreto

$\text{sat}(\cdot)$: Função saturação

$u(t)$: Sinal de controle do sistema em tempo contínuo

$u[k]$: Sinal de controle do sistema em tempo discreto

u_{max} : Valor máximo do sinal do atuador

u_{min} : Valor mínimo do sinal do atuador

$y(t)$: Variável controlada do sistema em tempo contínuo

$y[k]$: Variável controlada do sistema em tempo discreto

Active Set algorithm: Algoritmo de conjunto ativo

F.O: Função objetivo

Interior/CG algorithm: Algoritmo de ponto interior do gradiente conjugado

Interior/Direct algorithm: Algoritmo de ponto interior

MIMO: Multiple Input and Multiple Output

PID: Proporcional-Integral-Derivativo

PI: Proporcional-Integral

SISO: Single Input and Single Output

SQP algorithm: Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial

k : Instante de amostragem

s : Variável complexa (Transformada de Laplace)

Capítulo 1

Introdução

Estima-se que mais de 90% das malhas de controle encontradas em processos industriais operavam com controladores do tipo PI/PID, atingindo uma larga faixa de aplicações: indústria automobilística, controladores de voo, pilotos automáticos, instrumentação, dentre outras (Åström e Hägglund 2001). Apesar de serem controladores que vêm sendo usados há mais de 70 anos, a sintonia do PID, ainda hoje, é uma tarefa desafiadora e responsável por parte dos problemas de controle encontrados na indústria.

Inúmeras técnicas de sintonia vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos. A pioneira dessas técnicas de sintonia foi desenvolvida por Ziegler et al. (1942) que ainda surpreende por ser amplamente utilizada devido a sua simplicidade e eficiência. A partir dela, outras técnicas de sintonia de controladores PID foram sendo desenvolvidas, dentre elas: Cohen e Coon, Método da Integral do Erro, Método do Modelo Interno, etc. Mesmo com algumas variações, praticamente, nenhum desses métodos lida com uma necessidade natural dos processos industriais, que são as restrições (Tchamna e Lee 2018).

O estudo de sistemas de controle com restrições tem sido impulsionado nos últimos anos visto que restrições estão sempre presentes em sistemas reais, seja por limitações físicas do sistema, limitações de energia para sua regulação, limites de segurança ou por causa do domínio no qual a linearização de um sistema não-linear é válida (Blanchini e Miani 2015a, Bak 2000). Não tratar de forma adequada as restrições em problemas de controle pode trazer consequências indesejáveis. A saturação dos atuadores, por exemplo, é uma dessas consequências que pode levar o sistema em malha fechada até mesmo a instabilidade. Todo atuador é sujeito à saturação, fazendo com que o sinal de controle, que é efetivamente aplicado na planta, seja limitado entre valores máximos e mínimos. A modelagem do fenômeno de saturação permite considerá-la explicitamente no projeto do controlador e na análise de propriedades tais como estabilidade, desempenho e robustez do sistema em malha fechada (Tarbouriech et al. 2011).

Problemas de controle sujeitos a restrições, seja nas variáveis de estado, entrada ou saída têm sido resolvidos a partir da abordagem de invariância de conjuntos (Blanchini e Miani 2015a). A violação de restrições pode ser evitada se o estado inicial do sistema pertencer a um conjunto *positivamente invariante* do sistema em malha fechada. Com isso, a invariância positiva tem sido reconhecida como uma ferramenta teórica bem explorada para tratar vários problemas de controle onde é necessário lidar com restrições. Em particular, a determinação de conjuntos invariantes garante propriedades de estabilidade local

para sistemas sujeitos a restrições e funções de Lyapunov poliédricas associadas.

Entre os trabalhos dedicados, cita-se o trabalho de Martins et al. (2020) dedicado a sintonia de controladores PI para sistemas monovariáveis sujeitos a restrições utilizando otimização bilinear e considerando a saturação nos atuadores. Nesta mesma linha, dentro das abordagens que trata de projeto de controladores da família PID para sistemas sob restrições, podem ser citados os trabalhos de Dantas et al. (2018), que usa otimização multiparamétrica para obter um controlador PID com ganho escalonado, mas apenas para sistemas de segunda ordem, e o de dos Santos et al. (2021), que propõe o projeto de controladores PI com um termo *feedforward* usando otimização bilinear, mas evitando a saturação dos atuadores.

Considerando uma extensão do caso PI (Martins et al. 2020), este trabalho propõe um método de sintonia de controladores PID para sistemas MIMO (do inglês, *Multiple Input Multiple Output*) de tempo discreto sujeitos a restrições nas variáveis de saída e saturação dos atuadores. Usando a chamada *modelagem politópica* da saturação (Tarbouriech et al. 2011), um modelo de estado em tempo discreto do sistema controlado por um controlador PID, aumentado com a inclusão no estado das variáveis correspondentes a integral do erro e derivada da saída, é obtido, incluindo filtros de referência usados para regular a velocidade de mudança do *set-point* em função das restrições nas variáveis do sistema. Restrições nas variáveis correspondentes à integral do erro e à derivada da saída são incluídas para facilitar a busca por um poliedro invariante. Condições são então estabelecidas para que um poliedro definido no espaço de estado aumentado seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada com os controladores PID, na forma de relações algébricas entre variáveis matriciais. Em seguida, usando a abordagem proposta em (Brião et al. 2018, Brião et al. 2021), tais condições são traduzidas em um problema de otimização não-linear, cuja solução fornece os ganhos dos controladores PID, juntamente com um poliedro invariante associado que garante o respeito às restrições. Por questões de facilidade, a eficácia do método proposto é então avaliada por meio de simulações numéricas e análises comparativas usando um sistema MIMO 2x2 com controladores centralizados e descentralizados. Além disso, será avaliada também a importância da inserção do termo *feedforward* para a melhoria da resposta do sistema.

1.1 Objetivos

A partir das propriedades que regem a teoria da invariância positiva de conjuntos poliédricos, junto a escolha de um modelo politópico da saturação, propõe-se estruturar um sistema de controle com PID para sistemas lineares e invariantes de tempo discreto, sujeitos à restrições na variável de saída e saturação do atuador. Além disso, pretende-se:

- Viabilizar a estratégia de controle proposta, utilizando otimização, para a sintonia do controlador PID com aplicação em sistemas MIMO sob restrições;
- Avaliar, por meio de simulações, a relação entre os parâmetros do problema de otimização e o desempenho dos controladores projetados, fazendo possíveis ajustes

para possibilitar uma sintonia que respeite às restrições do problema de otimização;

- Avaliar o desempenho dos controladores a partir da resposta temporal em malha fechada e se com a inserção do termo *feedforward* é possível melhorar tal desempenho.

1.2 Organização do texto

Os próximos capítulos terão por objetivo trabalhar a base dos assuntos pertinentes para o entendimento da proposta deste trabalho. Com isso, o texto será organizado da seguinte forma:

- O Capítulo 2 abordará a fundamentação teórica deste trabalho, onde será feita uma breve introdução sobre o controlador PID e suas variações quanto à implementação da lei de controle. Além disso, será apresentado o PID digital e suas configurações, visando sua aplicação. Logo em seguida, será abordada a representação de sistemas no espaço de estado e como converter espaço de estado em função de transferência e vice-versa. Posteriormente, será comentado um pouco sobre o fenômeno *Windup* e o seu efeito nos sistemas, além do processo de otimização em sistemas. Já em virtude de uma abordagem voltada à restrição, será comentado sobre os sistemas com restrição e o uso dos conjuntos invariantes como ferramenta para o tratamento de tais restrições. Numa perspectiva do modelo de saturação que será utilizado neste trabalho, será abordada a modelagem politópica da saturação.
- O Capítulo 3 abordará a metodologia de trabalho, onde serão apresentados os passos utilizados para alcançar o objetivo estratégico da proposta em questão.
- O Capítulo 4 apresentará o processo de implementação, em cada exemplo numérico, a partir da técnica de otimização proposta, bem como os resultados obtidos, além das discussões que serão levantadas em cada caso. Inicialmente será abordado o caso SISO e posteriormente o caso MIMO.
- Ao final, o Capítulo 5 apresentará as devidas conclusões, bem como propostas de trabalhos futuros.

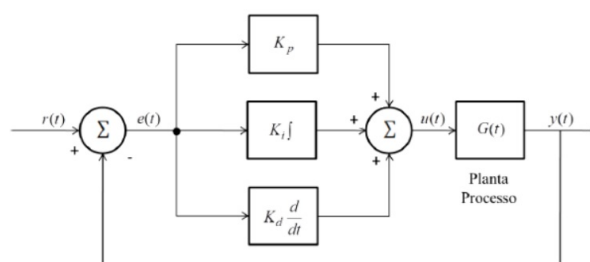
Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Controlador PID

Os controladores são dispositivos utilizados em inúmeros processos a nível industrial e têm, entre outras funções, a de prevenir condições instáveis que podem pôr em risco pessoas e equipamentos. Dentre os principais controladores, temos o controlador PID que ainda é um dos mais utilizados em sistemas de controle realimentados. Isto se justifica pela sua fácil implementação, além de serem de baixo custo, robustos e versáteis, com a capacidade de fornecer comportamentos transitórios e de regime permanente satisfatórios, o que consequentemente diversifica sua aplicação. Cerca de 90 a 95% dos problemas de controle do campo industrial podem ser resolvidos por este controlador (Levine 1996). Sua estrutura apresenta três ações de controle (Proporcional, Integral e Derivativa), ilustradas de acordo com a Figura 2.1.

Figura 2.1: Diagrama em blocos de um controle PID.



Fonte: (Ogata 2010).

O controlador PID possui como importantes funções a eliminação do erro em regime permanente através da ação integrativa, a capacidade de rejeitar perturbações e também antecipar o futuro, com a extrapolação por uma reta tangente, com a ação derivativa (Silva et al. 2005). A Equação (2.1) apresenta a forma tradicional do controlador PID, onde K_p , $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ e $K_d = K_p T_d$, são, respectivamente, os ganhos proporcional, integrativo e derivativo; T_i é a constante de tempo integral e T_d é a constante de tempo derivativa.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.1)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (2.1), com as condições iniciais nulas, obtêm-se a função de transferência do controlador dada por:

$$G_{PID} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.2)$$

O termo derivativo no domínio de Laplace apresentado na Equação (2.2) não é realizável de forma física. Esse fato se dá pois a função de transferência possui o grau no numerador maior do que o do denominador. Assim, uma solução utilizada na prática seria a utilização da função de transferência na ação derivativa conforme consta na Equação (2.3).

$$D(s) = \frac{sT_d}{1 + \gamma sT_d} \quad (2.3)$$

Onde $\gamma = \frac{1}{NT_d}$ ($0, 1 \leq \gamma \leq 0, 3$), sendo N corresponde ao coeficiente do filtro derivativo. Quanto mais longe o pólo da origem no plano complexo, menor o seu efeito. A Tabela 2.1 apresenta os efeitos de cada ação do controlador PID sobre um processo (planta).

Tabela 2.1: Efeitos das ações do controlador PID.

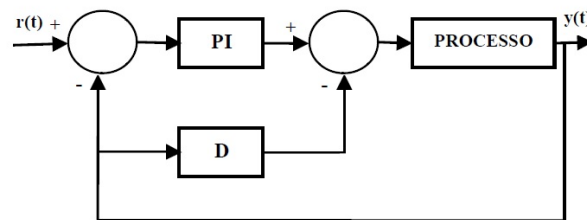
Ação	Função da ação
Proporcional	<ul style="list-style-type: none"> - Ação de controle imediata e proporcional ao valor do erro corrente; - Aumenta a velocidade da resposta do sistema; - Não corrige o erro em regime permanente; - Torna a resposta mais oscilatória à medida que o ganho aumenta.
Integral	<ul style="list-style-type: none"> - Ação de controle gradual, proporcional a integral do erro; - Responde ao passado do erro enquanto este for diferente de zero; - Elimina o erro de regime permanente (<i>off-set</i>); - Reduz o tempo de subida.
Derivativo	<ul style="list-style-type: none"> - Ação antecipatória, resposta proporcional a derivada do erro; - Provoca amortecimento e permite o aumento do ganho proporcional; - Não corrige o erro de regime permanente; - Melhora o desempenho do processo durante os transitórios.

Fonte: Adaptado (Andrade 2010).

2.1.1 Variações do controlador PID

Existem variações na implementação prática da lei de controle obtidas através de mudanças na estrutura do controlador PID. Tais variações se processam segundo a forma com que o sinal de erro $e(t)$ é introduzido nos módulos do controlador. Não é o objetivo aqui discutir as várias estruturas possíveis para o controlador PID, mas sim trabalhar na estrutura PI-D que será objeto da proposta deste trabalho. O controlador PID na sua forma mais convencional (vista anteriormente) apresenta alguns inconvenientes associados à possibilidade de saturação de componentes da malha de controle. Em especial, o termo associado à derivada no controlador PID produz um ganho que tende ao infinito em altas frequências (Castrucci 2011). Esta situação pode ser evitada aplicando-se a ação derivativa apenas na saída $y(t)$ do processo, como mostra a Figura 2.2. Essa estrutura é bastante utilizada na literatura (Åström & Hägglund 2005)

Figura 2.2: Estrutura do PID modificada com ação derivativa realimentada na saída.

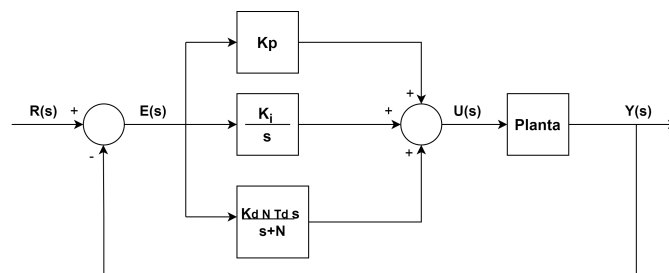


Fonte: Próprio autor.

2.2 O PID Digital

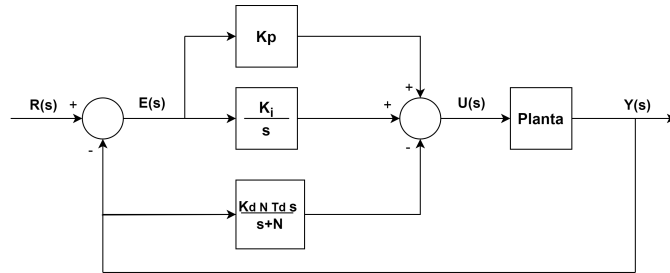
Após trabalhado o controlador PID na sua forma contínua (analógica), para a aplicação discreta (digital) nos diversos sistemas, torna-se necessário fazer a conversão do controlador, onde uma nova ação de controle é executada após um intervalo regular de tempo denominado período de amostragem (T_s). A partir disso, considere as topologias das Figuras 2.3 e 2.4.

Figura 2.3: Topologia com PID paralelo.



Fonte: adaptado (Felipe Conceição 2019).

Figura 2.4: Topologia PI-D com elemento derivativo realimentado na saída.



Fonte: adaptado (Felipe Conceição 2019).

Na conversão, as ações integral e derivativa precisam ser aproximadas por operações discretas equivalentes ao seu modelo contínuo. Durante a discretização, cada tipo de aproximação possui suas vantagens e desvantagens. Além disso, devemos lembrar da presença de ruídos em aplicações reais, e, com isso, o surgimento da saturação dos elementos finais de controle. Esse problema pode ser contornado ao variar a função de transferência do controlador PID, acrescentando-se um filtro passa-baixas de primeira ordem no termo associado à derivada, conforme visto na Equação (2.3). Contudo, uma outra forma equivalente de representar o termo derivativo seria conforme já ilustrado nas Figuras 2.3 e 2.4 e apresentado na Equação (2.4):

$$\bar{D}(s) = \frac{NT_d s}{s + N} \quad (2.4)$$

Com isso, algumas formas de discretizar o PID, tanto a parte integral, quanto a derivativa, estão representadas pelas Equações (2.5) à (2.10). As Equações (2.5), (2.6) e (2.7) representam variações para o termo integrativo, enquanto que as Equações (2.8), (2.9) e (2.10) representam variações no termo derivativo com filtro.

$$\text{Retangular para frente} : \frac{K_i T_s}{z - 1} \quad (2.5)$$

$$\text{Retangular para trás} : \frac{K_i T_s z}{z - 1} \quad (2.6)$$

$$\text{Tustin} : \frac{K_i T_s}{2} \frac{z + 1}{z - 1} \quad (2.7)$$

$$\text{Retangular para frente} : \frac{NK_d(z - 1)}{z - 1 + NT_s} \quad (2.8)$$

$$\text{Retangular para trás} : \frac{NK_d(z - 1)}{(1 + NT_s)z - 1} \quad (2.9)$$

$$\text{Tustin} : \frac{NK_d(z - 1)}{(1 + \frac{NT_s}{2})z + \frac{NT_s}{2} - 1} \quad (2.10)$$

Assim, substituindo o diagrama de blocos do modelo contínuo, representado na figura 2.3, pelo modelo discreto dos termos integral e derivativo de cada método (retangular para frente, retangular para trás e Tustin), teremos as seguintes equações para o controlador:

$$\text{Retangular para frente : } G_{PID}(z) = K_p + \frac{K_i T_s}{z-1} + \frac{K_d N(z-1)}{z-1+NT_s} \quad (2.11)$$

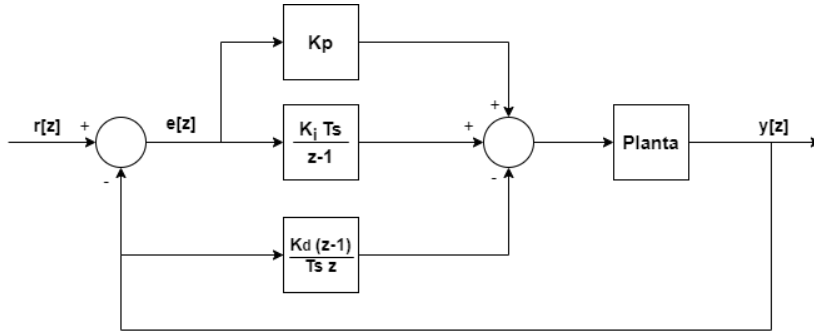
$$\text{Retangular para trás : } G_{PID}(z) = K_p + \frac{K_i T_s z}{z-1} + \frac{NK_d(z-1)}{(1+NT_s)z-1} \quad (2.12)$$

$$\text{Tustin : } G_{PID}(z) = K_p + \frac{K_i T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{K_d N(z-1)}{(1+\frac{NT_s}{2})z + \frac{K_i NT_s}{2} - 1} \quad (2.13)$$

O mesmo procedimento segue ao substituir as equações de cada método no modelo contínuo representado na Figura 2.4. Contudo, para fins de uso prático, a proposta deste trabalho utilizar-se-á de um modelo mais simples, sendo a saída do controlador PI-D representado pela Equação (2.14) e ilustrado na Figura 2.5.

$$f[z] = K_p e[z] + \frac{K_i T_s}{(z-1)} e[z] - \frac{K_d}{T_s} \frac{(z-1)}{z} y[z] \quad (2.14)$$

Figura 2.5: Topologia PI-D em tempo discreto com elemento derivativo realimentado na saída.



Fonte: Próprio autor.

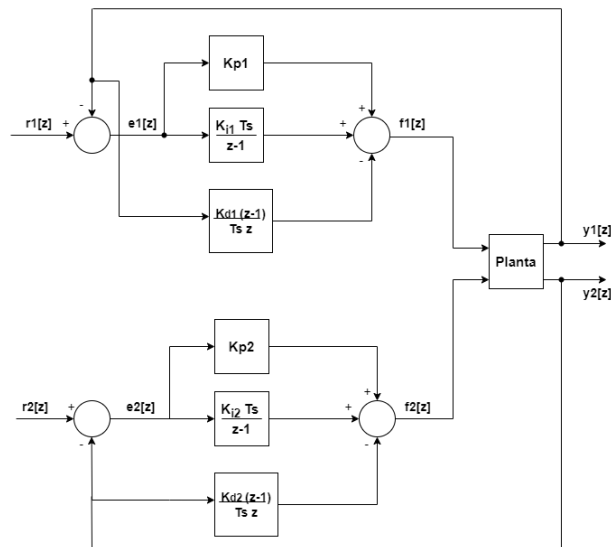
Observação 1 Foi utilizada a aproximação retangular para frente nas partes Proporcional e Integrativa.

Estendendo a ideia para um modelo MIMO 2x2 descentralizado, obtemos as Equações (2.15) e (2.16), com topologia ilustrada pela figura 2.6.

$$f_1[z] = K_{p1} e_1[z] + \frac{K_{i1} T_s}{(z-1)} e_1[z] - \frac{K_{d1}}{T_s} \frac{(z-1)}{z} y_1[z] \quad (2.15)$$

$$f_2[z] = K_{p2} e_2[z] + \frac{K_{i2} T_s}{(z-1)} e_2[z] - \frac{K_{d2}}{T_s} \frac{(z-1)}{z} y_2[z] \quad (2.16)$$

Figura 2.6: Topologia MIMO 2x2 descentralizada com dois PI-D's em tempo discreto.



Fonte: Próprio autor.

2.3 Representação de sistemas no espaço de estado

A ideia de trabalharmos um sistema no espaço de estado tem o intuito de desenvolver uma representação que preserve a relação entrada-saída (tal como ocorre também na função de transferência), e que expresse um sistema de ordem n através de n equações diferenciais de primeira ordem. Assim, é possível citarmos algumas razões pelas quais é útil trabalharmos com o modelo de estado:

- Para sistemas de ordem elevada, a análise e o projeto auxiliados por computador de modelos de estado são facilmente executados, enquanto a abordagem pela função de transferência tende a falhar para sistemas desse porte, devido a problemas numéricos;
- No projeto por variáveis de estado, são disponibilizadas mais informações sobre a planta (variáveis internas). Assim, é possível executar o controle mais completo do sistema do que é possível com a abordagem por função de transferência;
- Procedimentos de projeto que resultam em um controle melhor do sistema são quase sempre baseados nos modelos por variáveis de estado.

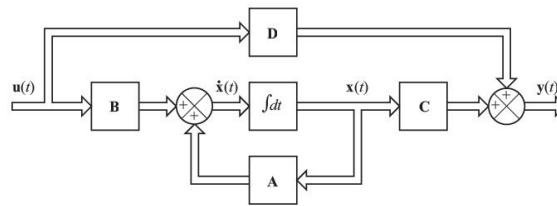
Assim, a descrição de estado de um sistema linear e invariante no tempo (contínuo), formada por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estado), $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de estado), $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (matriz de entrada), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ (vetor de entrada), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ (vetor de saída), $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ (matriz de saída), e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ (matriz que representa ligações diretas entre entradas e saídas). A Equação 2.17 é chamada de equação de estado, ou seja, uma equação diferencial de primeira ordem cuja solução é o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$. A Equação 2.18 é chamada de equação de saída, ou seja, uma equação algébrica que relaciona a entrada, o estado e a saída. Note que, a presença da matriz \mathbf{D} na Equação 2.18 significa que pode haver uma conexão direta entre a entrada $\mathbf{u}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$, sem a intervenção do estado $\mathbf{x}(t)$.

Figura 2.7: Diagrama de blocos do sistema representado no espaço de estado contínuo.



Fonte: Adaptado (Ogata 2010).

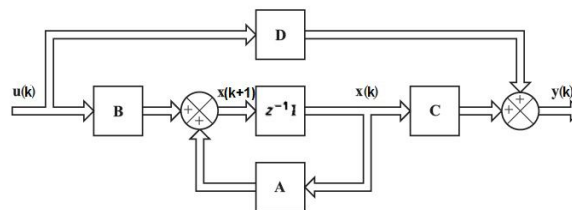
No caso da descrição de estado de um sistema discreto, linear e invariante no tempo, podemos dizer que tais equações surgem tanto da discretização (com período de amostragem (T_s)) de equações dinâmicas de sistemas contínuos, quanto da descrição de sistemas que são na sua forma natural de tempo discreto. Com isso, sua equação de estado, formada por um conjunto de equações de diferença de primeira ordem, pode ser definida como:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad (2.19)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k] \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estado), $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^p$ (vetor de entrada), $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^q$ (vetor de saída), e as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são como no caso contínuo.

Figura 2.8: Diagrama de blocos do sistema representado no espaço de estado discreto.



Fonte: Adaptado (Ogata 2010).

2.4 Relações espaço de estado e função de transferência

Existem basicamente duas formas de representar a dinâmica de um sistema: Espaço dos Estados e Função de Transferência. O uso das duas formas é muito comum, contudo, há a necessidade de passar a representação do sistema de uma forma para outra dependendo do que é fornecido e do que se deseja fazer.

2.4.1 Transformação espaço de estado para função de transferência

Considere um sistema linear, contínuo e invariante no tempo descrito pelas Equações (2.17) e (2.18). Aplicando a transformada de Laplace em (2.17), obtemos:

$$\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{x}}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\} \quad (2.21)$$

Assumindo que as condições iniciais são nulas, tem-se:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2.22)$$

Rearranjando e isolando $\mathbf{X}(s)$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (2.23)$$

Aplicando a Transformada de Laplace em (2.18), tem-se:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{y}(t)\} = \mathcal{L}\{\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (2.25)$$

Fazendo as devidas substituições e rearranjando na forma de matriz de transferência, obtemos:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \text{ com } \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.26)$$

onde,

- $\mathbf{G}(s)$ é uma matriz de funções de transferência com dimensão $q \times p$ (q é o número de saídas e p o número de entradas);
- Cada elemento $G_{ij}(s)$ da matriz $\mathbf{G}(s)$ descreve a dinâmica da saída i em função da entrada j do sistema. Por exemplo, o elemento $G_{21}(s)$ descreve a relação dinâmica entre a saída 2 e a entrada 1 do sistema;
- Se o sistema tiver somente uma entrada e uma saída, $\mathbf{G}(s)$ é um escalar.

Observação 2 É importante lembrar que, para calcular a função de transferência para sistemas de qualquer ordem com intuito de evitar cálculo de inversa de matriz, existe uma

fórmula que usa somente determinante de matrizes para gerar os elementos da matriz $\mathbf{G}(s)$ (Cabral 2016):

$$G_{ij}(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B}_j \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_{ij} \end{bmatrix}}{\det [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \quad (2.27)$$

onde \mathbf{C}_i é a i -ésima linha da matriz \mathbf{C} , \mathbf{B}_j é a j -ésima coluna da matriz \mathbf{B} e \mathbf{D}_{ij} é o elemento i, j da matriz \mathbf{D} .

Observação 3 Se o sistema for SISO, \mathbf{C} é uma matriz linha e \mathbf{B} é uma matriz coluna (Cabral 2016).

Observação 4 Os denominadores de todos os elementos da matriz $\mathbf{G}(s)$, são iguais, o que corresponde a equação característica do sistema (Cabral 2016).

Para o caso de um sistema linear, discreto e invariante no tempo considere as Equações (2.19) e (2.20). Aplicando a transformada Z em (2.19), obtemos:

$$\mathcal{Z} \{ \mathbf{x}[k+1] \} = \mathcal{Z} \{ \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \} \quad (2.28)$$

Assumindo também as condições iniciais nulas, tem-se:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (2.29)$$

Rearranjando e isolando $\mathbf{X}(z)$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (2.30)$$

Aplicando a Transformada Z em (2.20), tem-se:

$$\mathcal{Z} \{ \mathbf{y}[k] \} = \mathcal{Z} \{ \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k] \} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \quad (2.32)$$

Fazendo as devidas substituições e rearranjando na forma de matriz de transferência, obtemos:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z), \text{ com } \mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.33)$$

onde, $\mathbf{G}(z)$ e seus elementos G_{ij} seguem conforme o caso contínuo, bem como as observações feitas.

2.4.2 Transformação função de transferência para espaço de estado

Existem muitas formas de realizar a transformação de um sistema representado por uma função de transferência para a forma de espaço de estado. Isso significa dizer que o vetor de estados não é único para um dado sistema dinâmico, ou seja, existem muitas

possibilidades de definir o vetor de estado para um mesmo sistema. Além disso, cada vetor de estado vai gerar uma forma diferente de realização no espaço de estado para uma mesma função de transferência. Por ser um assunto já conhecido, vamos nos limitar a mostrar aqui apenas a realização na forma canônica observável (Ogata 2010). Lembrando que tal representação só é possível para sistemas SISO.

Com isso, considere um sistema definido por:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_nu \quad (2.34)$$

onde u é a entrada e y a saída. Aplicando a transformada de Laplace (com condições iniciais nulas) e rearranjando os termos, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.35)$$

Segundo Ogata (2010), a seguinte representação no espaço de estados é denominada forma canônica observável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_nb_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} u \quad (2.36)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0u \quad (2.37)$$

Mais a frente, ao discutirmos um caso de projeto de controladores PID para sistemas lineares SISO, baseados em otimização, que utiliza a abordagem dos conjuntos invariantes na sua estruturação, será visto o uso prático da forma canônica observável como realização do sistema de modelo contínuo sendo uma forma bastante útil devido a uma questão de ordem prática.

Explicando melhor essa questão, suponha que tenhamos apenas o modelo da função de transferência de um dado sistema. Isso significa que só medimos e só controlamos a saída. Contudo, a técnica de conjuntos invariantes requer a imposição de restrições nos estados. Com a forma canônica observável, a saída é uma das variáveis de estados (o primeiro ou o último a depender da versão utilizada) e isso facilita impor restrições à saída. Em outra forma canônica, a saída é uma combinação de variáveis de estados, o que dificulta impor restrições na saída a partir deles.

No caso de sistemas a tempo discreto, todas as realizações seguem o mesmo procedimento visto para sistemas contínuos, diferenciando apenas pelo fato de estarmos trabalhando com variáveis de estado, entrada e saída discretas oriundos de equações diferença. Assim, considere a equação diferença de ordem n dada por:

$$\begin{aligned} & y[k] + a_{n-1}y[k-1] + \dots + a_1y[k-n+1] + a_0y[k-n] \\ & = b_nu[k] + b_{n-1}u[k-1] + \dots + b_1u[k-n+1] + b_0u[k-n] \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $k = -n, -n+1, \dots, 0, 1, 2, \dots$ $u[k]$ é a entrada e $y[k]$ a saída. Aplicando a transformada Z (com condições iniciais nulas) e rearranjando os termos, a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_{n-1}z + b_n}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n} \quad (2.39)$$

Com a seguinte realização na forma canônica observável:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_nb_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} u[k] \\ & \quad (2.40) \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + b_0u[k] \end{aligned}$$

2.5 O Windup

Responsável por tornar a resposta transitória do sistema lenta e oscilatória, trata-se de um fenômeno relevante e prejudicial para o desempenho do sistema de controle como um todo. Ele aparece quando a variável de controle do sistema atinge o limite (máximo ou mínimo) do atuador ocorrendo a saturação do sinal de controle. Isto faz com que a malha de realimentação seja de certa forma desfeita, pois o atuador permanecerá no seu limite independentemente da saída do processo. Quando isso ocorre, e o controlador possui uma ação integral, o sinal de erro continuará a ser integrado e o termo integral tende a se tornar muito grande. Para evitar este efeito indesejado, deve-se inibir a ação integral logo que o sinal de controle entre na região de saturação, e liberando sua ação tão logo o sinal de controle entre na região linear de controle (Johnson e Moradi 2005). Sendo assim, técnicas anti-*Windup* (lineares e não lineares) para controladores PID foram desenvolvidas para minimizar o seu efeito, sendo encontradas na literatura. Não é o objetivo deste trabalho usar tais técnicas, porém, é importante deixar registrado o fenômeno em si pois trata-se da ocorrência de saturação no sinal de controle, que envolve diretamente o funcionamento dos atuadores.

2.6 Otimização em Sistemas

Os problemas de otimização tratam basicamente de soluções de maximização ou minimização de funções de uma ou mais variáveis num determinado domínio, sendo que, geralmente, existe um conjunto de restrições nas variáveis. Os algoritmos usados são, em geral, determinísticos ou probabilísticos. Aqui, vamos nos ater aos métodos determinísticos, mas antes de falarmos sobre tal algoritmo, lista-se alguns termos usualmente relacionados a um problema de otimização qualquer:

- **Variáveis de projeto:** São aquelas que se alteram durante o processo de otimização, podendo ser contínuas ou discretas;
- **Restrições:** São, basicamente, relações de igualdade ou desigualdade sobre as variáveis de projeto;
- **Espaço de busca:** É o conjunto, espaço ou região que compreende as soluções possíveis ou viáveis sobre as variáveis do projeto do problema a ser otimizado;
- **Função Objetivo (F.O):** É a função de uma ou mais variáveis de projeto que se quer otimizar, minimizando-a ou maximizando-a;
- **Ponto Ótimo:** É o ponto formado pelas variáveis de projeto que extremizam a função objetivo e satisfazem as restrições;
- **Valor Ótimo:** É o valor da função objetivo no ponto ótimo.

2.6.1 Métodos Determinísticos

Tais métodos de otimização geram uma seqüência determinística de possíveis soluções requerendo, na maioria das vezes, o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Nestes métodos, a função objetivo e as restrições são dadas como funções matemáticas e relações funcionais, que podem ser representadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar/Minimizar : } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 & \text{Satisfazendo :} \\
 & g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq = \geq \} b_1 \\
 & \quad \vdots \\
 & g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq = \geq \} b_m \\
 & \text{em que :} \\
 & x_1, x_2, \dots, x_n \text{ (variáveis de projeto)} \\
 & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ (função objetivo)} \\
 & g_1, g_2, \dots, g_m \text{ (restrições)}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Em problemas com variáveis discretas, considera-se um espaço de busca com variáveis contínuas que, após a otimização, fornecerão uma aproximação das variáveis de projeto para as disponíveis no espaço discreto.

Vale lembrar que os métodos determinísticos apresentam teoremas que lhes garantem a convergência para uma solução ótima que não é necessariamente a solução ótima global.

Por depender de um ponto de partida fornecido, pode-se convergir para um ótimo local, por isso não possuem bom desempenho em otimizar funções multimodais, isto é, funções que possuem vários ótimos locais. Basicamente, duas classes de métodos prevalecem, conforme as características da função objetivo e das restrições:

1. **Programação Linear:** Função objetivo e restrições são funções lineares das variáveis de projeto. O Método Simplex é o método mais comum (Hadley 1982);
2. **Programação Não-Linear:** Função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, é uma função não-linear das variáveis de projeto. Os métodos de maior destaque são: Método de Programação Linear Seqüencial, Método de Programação Quadrática Seqüencial, Método das Direções Viáveis e Método do Gradiente Reduzido, entre outros.

2.7 Sistemas Lineares sob restrições

Apesar dos métodos e técnicas de controle desenvolvidos serem utilizados em muitos trabalhos e processos industriais, no geral, são poucos os que lidam com uma necessidade natural do processo, que são as restrições (Tchamna e Lee 2018). Diante disso, estudos realizados em sistemas com restrições têm sido bastante disseminados na teoria de sistemas de controle, já que problemas reais possuem restrições em suas variáveis. Tratar as restrições do sistema de forma negligente pode causar consequências no que diz respeito a saturação dos atuadores, levando a comportamentos indesejados dos sistemas em malha fechada. Com isso, para se ter um bom desempenho do sistema como um todo, é necessário tratar adequadamente as restrições (Bak 2000, Tarbouriech et al. 2007).

Tratando-se especificamente das restrições, elas basicamente podem ser definidas a partir de um conjunto poliédrico no espaço de estados, onde observa-se a região na qual a trajetória do vetor de estado do sistema deve permanecer.

Definição 2.7.1 (Blanchini e Miani 2015b) *Um conjunto poliédrico convexo pode ser representado na forma:*

$$R[F, g] = \{x : Fx \leq g\} = \{x : F_i x \leq g_i, i = 1, 2, \dots, s\} \quad (2.42)$$

em que F_i denota a i -ésima linha da matriz F e g_i é o i -ésimo componente do vetor g . Um conjunto poliédrico inclui a origem em seu interior se, e somente se, $g_i > 0, \forall i$.

Assim, sem perda de generalidade, um conjunto poliédrico contendo a origem em seu interior pode ser representado da seguinte forma:

$$R[F, \bar{1}] = \{x : Fx \leq \bar{1}\} = \{x : F_i x \leq 1, i = 1, 2, \dots, s\} \quad (2.43)$$

e $\bar{1}$ um vetor de dimensões adequadas com todos os elementos iguais a 1. O objetivo é trazer todos os estados iniciais do conjunto de restrições à origem sem violação, mas, em geral, nem todos são trazidos.

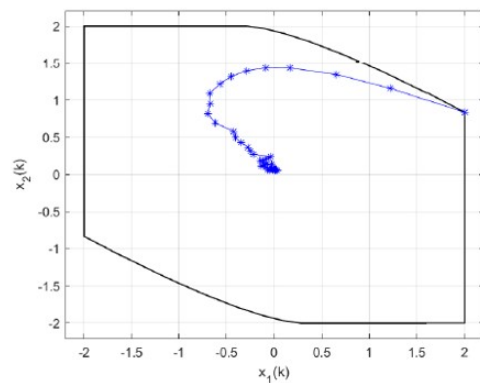
2.8 Invariância Positiva

Tratada na teoria de Lyapunov sobre a energia de um sistema (Blanchini 1999), um conjunto no espaço de estados é positivamente invariante se qualquer trajetória que se origina em seu interior não deixa o conjunto (Dorea e Hennet 1999). Com isso, uma definição importante é apresentada a seguir:

Definição 2.8.1 (Blanchini 1999) *Um conjunto não vazio e fechado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, contendo a origem, é um conjunto positivamente invariante λ -contrativo em relação ao sistema $x[k+1] = f(x[k])$ se, para um dado escalar $\lambda \in [0, 1)$, $x[k+1] \in \lambda\Omega$, $\forall x[k] \in \Omega$.*

Observação 5 *Se $\lambda = 1$, Ω é dito simplesmente positivamente invariante.*

Figura 2.9: Ilustração de um conjunto positivamente invariante.



Trajétória do vetor de estados de um sistema

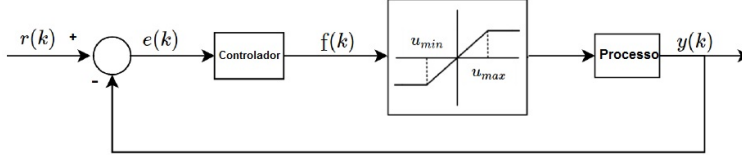
Fonte: Mancini (2021).

2.9 Modelagem Politépica da Saturação

Partindo do princípio da não-linearidade presente na maioria dos processos, é comum aproximá-los para dinâmicas lineares, devido a uma grande gama de ferramentas para analisar estes sistemas e a facilidade de projetar o controlador que será aplicado. Contudo, na prática, todos os processos possuem também limitações físicas de operação que podem gerar não-linearidades no sistema. Uma dessas não-linearidades é a chamada saturação do atuador, conforme pode ser vista na Figura (2.10), com $u_{min} = -u_{max}$.

Quando há saturação do atuador, o sinal de erro pode permanecer em um valor elevado por um tempo maior do que o previsto pelo modelo linear e, caso o controlador possua ação integral, o termo integrador do erro acumula também um valor muito elevado (Castrucci 2011). É exatamente o efeito do *windup* visto anteriormente. A fim de se evitar o efeito da saturação do atuador, é muito importante considerar a saturação desde a fase de projeto do controlador. Com esse objetivo, diversos modelos matemáticos vêm sendo

Figura 2.10: Diagrama de controle de um sistema discreto com não linearidade do tipo saturação.



Fonte: Próprio autor.

propostos para representar a saturação de modo a possibilitar o uso de ferramentas conhecidas de projeto de controladores (Tarbouriech et al. 2011). Assim, considere o seguinte sistema de tempo discreto, linear e invariante no tempo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] + \mathbf{E}\mathbf{d}[k] \\ \mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k], \end{cases} \quad (2.44)$$

sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de estado), $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz de entrada), $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ (matriz de saída), $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (matriz de perturbação), $k \in \mathbb{N}$ (instante de tempo), $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (vetor de estado), $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (vetor de entrada de controle), $\mathbf{d}[k] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (vetor perturbação) e $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ (vetor de saída do sistema). A perturbação $\mathbf{d}[k]$ é desconhecida, porém, limitada ao seguinte conjunto poliédrico:

$$\mathbf{d}[k] \in \Phi = \{ \mathbf{d} : |\mathbf{W}\mathbf{d}[k]| \leq \bar{\mathbf{1}} \}, \quad (2.45)$$

sendo $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ uma matriz que define as restrições em $\mathbf{d}[k]$. O sistema é também sujeito a saturação do atuador, sendo $\text{sat}(\cdot)$ a função de saturação definida por:

$$\text{sat}(f) = \begin{cases} f, & \text{se } -u_{max} \leq f \leq u_{max} \\ u_{max}, & \text{se } f > u_{max} \\ -u_{max}, & \text{se } f < -u_{max}. \end{cases} \quad (2.46)$$

e,

$$\mathbf{u}[k] \in \Omega_u = \{ \mathbf{u} : |u_1[k]| \leq u_{max_1}, |u_2[k]| \leq u_{max_2}, \dots, |u_i[k]| \leq u_{max_i} \}, i = 1, \dots, m \quad (2.47)$$

de modo que, considerando a realimentação estática de saída ($\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}\mathbf{y}[k]$), tem-se que:

$$\mathbf{u}[k] = \text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{y}[k]) = \text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}[k]), \quad (2.48)$$

sendo $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ o ganho do controlador. Com isso, tem-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\text{sat}(\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}[k]) + \mathbf{E}\mathbf{d}[k]. \quad (2.49)$$

Deseja-se projetar controladores para o sistema acima de modo que a trajetória das variáveis controladas $\mathbf{y}[k]$ respeite as seguintes restrições lineares:

$$\mathbf{y}[k] \in \Omega_y = \{\mathbf{y} : |\mathbf{Q}\mathbf{y}[k]| \leq \bar{1}\} \quad (2.50)$$

sendo $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ uma matriz que define as restrições sobre $\mathbf{y}[k]$. A partir do modelo dado pela Equação (2.44), estas restrições em $\mathbf{y}[k]$ podem ser traduzidas nas seguintes restrições em $\mathbf{x}[k]$:

$$\mathbf{x}[k] \in \Omega_x = \{\mathbf{x} : |\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{x}[k]| \leq \bar{1}\}, \quad (2.51)$$

Tais restrições podem ser satisfeitas se o estado inicial $\mathbf{x}[0]$ pertencer a um conjunto positivamente invariante contido em Ω_x .

Observação 6 Restrições lineares resultam em conjuntos de restrições poliédricos. Este é o caso dos conjuntos Φ (Equação (2.45)), Ω_u (Equação (2.47)) e Ω_x (Equação (2.51)).

Observação 7 Neste trabalho trataremos apenas de conjuntos poliédricos simétricos e contendo a origem em seu interior, como é também o caso dos conjuntos Φ (Equação (2.45)), Ω_u (Equação (2.47)) e Ω_x (Equação (2.51)). No entanto, a técnica proposta pode facilmente ser estendida a poliedros não simétricos.

Devido ao efeito da saturação nos atuadores, o sistema de Equação (2.49) torna-se não-linear (como já relatado), podendo apresentar fenômenos indesejáveis tais como ciclos limite e até instabilidade. Neste trabalho será usado o modelo politópico II de Tarbouriech et al. (2011), no qual se escreve a saída da função de saturação (Equação (2.46)) como uma combinação convexa do sinal de controle atual com uma variável auxiliar vetorial \mathbf{h}_{sat} . A fim de apresentar intuitivamente a abordagem, consideremos primeiro o caso monovariável, ou seja, quando $m = 1$. Neste caso, temos f e h_{sat} escalares.

Lema 2.9.1 (Tarbouriech et al. 2011) Sejam dois escalares $f \in \mathbb{R}$ e $h_{sat} \in \mathbb{R}$. Se $-u_{max} \leq h_{sat} \leq u_{max}$, então $sat(f) \in Co\{f, h_{sat}\} = \{p : p = \lambda_1 f + \lambda_2 h_{sat}\}$ com $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Em razão da Equação (2.48) (caso monovariável), define-se o poliedro:

$$S(H_{sat}, u_{max}) = \{x \in \mathbb{R}^n ; -u_{max} \leq H_{sat}x[k] \leq u_{max}\}, \quad (2.52)$$

em que $H_{sat} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é uma matriz auxiliar que compõe o modelo de saturação. A partir do Lema 2.9.1, visto que $f = K\mathbf{y}[k] = K\mathbf{C}\mathbf{x}[k]$, então, $\forall x[k] \in S(H_{sat}, u_{max})$, tem-se que:

$$sat(K\mathbf{C}\mathbf{x}[k]) \in Co\left\{\Gamma_j^+ K\mathbf{C}\mathbf{x}[k], \Gamma_j^- H_{sat}x[k]\right\}, \text{ com } j = 1, 2 \quad (2.53)$$

no qual Γ_j^+ recebe valores de 0 ou 1 $\Gamma_j^- = 1 - \Gamma_j^+$. O sistema em malha fechada pode, então, ser representado pelo seguinte modelo politópico:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \sum_{j=1}^2 \lambda_j(x[k]) A_j x[k] + E d[k] \\ \text{com } \sum_{j=1}^2 \lambda_j(x[k]) &= 1, \quad 0 \leq \lambda_j(x[k]) \leq 1, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

e

$$A_j = A + B(\Gamma_j^+ K\mathbf{C} + \Gamma_j^- H_{sat}) \quad (2.55)$$

expandindo a Equação (2.54), temos que:

$$x[k+1] = [\lambda_1(x[k]) \underbrace{(A+BKC)}_{A_1} + \lambda_2(x[k]) \underbrace{(A+BH_{sat})}_{A_2}]x[k] + Ed[k] \quad (2.56)$$

Assim, a Equação (2.56) pode ser reescrita como:

$$x[k+1] = \lambda_1(x[k])A_1x[k] + \lambda_2(x[k])A_2x[k] + Ed[k] \quad (2.57)$$

onde

$$\lambda_1(x[k]) + \lambda_2(x[k]) = 1 \text{ sendo } 0 \leq \lambda_1(x[k]), \lambda_2(x[k]) \leq 1$$

$$e$$

$$A_1 = A + BKC, \quad A_2 = A + BH_{sat}$$

Por meio desse modelo, é possível usar técnicas conhecidas de análise e projeto de sistemas de controle para modelos politópicos. Em particular, é possível estabelecer condições para a invariância positiva de um poliedro $\Omega = \{x : Lx \leq \bar{1}\}$, conforme consta na Proposição 1.

Proposição 1 *O poliedro $\Omega = \{x : Lx \leq \bar{1}\}$ é positivamente invariante com taxa de contração λ ($0 \leq \lambda < 1$), em relação ao sistema (2.56), se houver matrizes Z , H_k , H_h , H_{sat} e J tais que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_k L = L(A + BKC) \\ ZW = LE \\ \|[H_k \ Z]\|_\infty \leq \lambda \\ H_h L = L(A + BH_{sat}) \\ \|[H_h \ Z]\|_\infty \leq \lambda \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} JL = H_{sat} \\ \|J\|_\infty \leq u_{max} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

em que, para uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\|M\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |M_{ij}|$. Essa proposição pode ser

demonstrada a partir dos resultados de (Milani e Carvalho 1995) que trata de invariância de poliedros de um modelo politópico em tempo discreto sem perturbações, e de (Milani e Dórea 1996) que trata de sistemas de tempo contínuo sujeitos a perturbações limitadas. O conjunto de equações à esquerda na Equação (2.58) implica a invariância positiva de Ω em relação ao modelo politópico da Equação (2.56). No entanto, esse modelo só é válido para representar o sistema (2.49) (caso monovariável) se a condição (2.52) for satisfeita, ou seja, se $\Omega \subset S(H_{sat}, u_{max})$. Trata-se de uma condição de inclusão entre poliedros, que pode ser verificada por meio do chamado *Lema de Farkas estendido* (Castelan e Henet 1992), cuja aplicação resulta nas condições à direita da Equação (2.58).

Para o caso com duas entradas ($m = 2$), definem-se os vetores $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ e $h_{sat} = \begin{bmatrix} h_{sat_1} \\ h_{sat_2} \end{bmatrix}$, tais que:

$$-u_{max_1} \leq h_{sat_1} \leq u_{max_1}$$

$$-u_{max_2} \leq h_{sat_2} \leq u_{max_2}$$

Definem-se agora matrizes diagonais Γ_j^+ e Γ_j^- como se segue:

- Γ_j^+ são matrizes diagonais cujos elementos diagonais tomam o valor 1 ou 0, $j = 1, \dots, 2^m$.
- $\Gamma_j^- = I_m - \Gamma_j^+, j = 1, \dots, 2^m$.

Assim, com $m = 2$, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & \Gamma_2^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & \Gamma_3^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & \Gamma_4^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \Gamma_1^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & \Gamma_2^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; & \Gamma_3^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & \Gamma_4^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

A partir disso, é possível generalizar o Lema 2.9.1 para o caso vetorial:

Lema 2.9.2 (Tarbouriech et al. 2011) *Considere dois vetores $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h}_{sat} \in \mathbb{R}^m$. Se $-u_{max(i)} \leq h_{sat(i)} \leq u_{max(i)}$, para $i = 1, \dots, m$, então $sat(\mathbf{f}) \in Co\{\mathbf{f}, \mathbf{h}_{sat}\} = \{\mathbf{p} : \mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{f} + \lambda_2 \mathbf{h}_{sat}\}$ com $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.*

Em razão da Equação (2.48) (caso multivariável), define-se o poliedro:

$$S(\mathbf{H}_{sat}, u_{max_1}, u_{max_2}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{max_1} \leq \mathbf{H}_{sat} \mathbf{x}[k] \leq u_{max_1}, -u_{max_2} \leq \mathbf{H}_{sat} \mathbf{x}[k] \leq u_{max_2}\}, \quad (2.59)$$

em que, agora, $\mathbf{H}_{sat} \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ sendo a mesma matriz auxiliar do caso monovariável que compõe o modelo de saturação. Contudo, percebe-se que teremos um caso com dois valores para u_{max} (um para cada entrada). Isso significa que a matriz J nas condições $JL = H_{sat}$ e $\|J\|_\infty \leq u_{max}$ tem duas linhas agora, o que implica em não poder usar a condição $\|H_{sat}\|_\infty \leq u_{max}$ por não satisfazer as duas entradas. No caso monovariável podíamos usar a norma infinita porque todos os poliedros tinham o lado direito igual a 1 e aquele que não tinha (justamente o da restrição u_{max}) correspondia a uma linha apenas na matriz.

Para lidarmos melhor com isso, reescrevemos as restrições sobre \mathbf{H}_{sat} (Equação (2.59)) na forma:

$$S(\mathbf{H}_{sat}, u_{max_1}, u_{max_2}) = \{x \in \mathbb{R}^n; |\mathbf{F} \mathbf{H}_{sat} \mathbf{x}[k]| \leq 1\}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_{max_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_{max_2}} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Assim, a partir do Lema 2.9.2, sendo $\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{y}[k] = \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{x}[k], \forall \mathbf{x}[k] \in S(\mathbf{H}_{sat}, u_{max_1}, u_{max_2})$, tem-se que:

$$sat(\mathbf{KCx}[k]) \in Co\left\{\Gamma_j^+ \mathbf{KCx}[k], \Gamma_j^- \mathbf{H}_{sat}\mathbf{x}[k]\right\}, \text{ com } j = 1, \dots, 4 \quad (2.61)$$

O sistema em malha fechada é, então, representado pelo seguinte modelo politópico:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x[k]) A_j x[k] + Ed[k] \\ \text{com } \sum_{j=1}^4 \lambda_j(x[k]) &= 1, \quad 0 \leq \lambda_j(x[k]) \leq 1, \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (2.62)$$

e

$$A_j = A + B(\Gamma_j^+ KC + \Gamma_j^- H_{sat}) \quad (2.63)$$

A partir da expressão (2.63), obtemos:

$$A_1 = A + B(\Gamma_1^+ KC + \Gamma_1^- H_{sat}); \quad A_2 = A + B(\Gamma_2^+ KC + \Gamma_2^- H_{sat})$$

$$A_3 = A + B(\Gamma_3^+ KC + \Gamma_3^- H_{sat}); \quad A_4 = A + B(\Gamma_4^+ KC + \Gamma_4^- H_{sat})$$

ou seja,

$$A_1 = A + B\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} KC + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_{sat}\right)$$

$$A_2 = A + B\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} KC + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} H_{sat}\right)$$

$$A_3 = A + B\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} KC + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_{sat}\right)$$

$$A_4 = A + B\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} KC + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} H_{sat}\right)$$

Assim, expandindo a Equação (2.62), temos que:

$$x[k+1] = \{\lambda_1(x[k])A_1 + \lambda_2(x[k])A_2 + \lambda_3(x[k])A_3 + \lambda_4(x[k])A_4\} x[k] + Ed[k] \quad (2.64)$$

onde,

$$\lambda_1(x[k]) + \lambda_2(x[k]) + \lambda_3(x[k]) + \lambda_4(x[k]) = 1$$

$$0 \leq \lambda_1(x[k]), \lambda_2(x[k]), \lambda_3(x[k]), \lambda_4(x[k]) \leq 1$$

Como no caso monovariável, estendemos o uso das técnicas que já conhecemos para estabelecer condições para a invariância positiva de um poliedro $\Omega_m = \{x : L_m x \leq \bar{1}\}$, conforme consta na Proposição 2.

Proposição 2 O poliedro $\Omega_m = \{x : L_m x \leq \bar{1}\}$ é positivamente invariante com taxa de contração λ ($0 \leq \lambda < 1$), em relação ao sistema (2.64), se houver matrizes Z , H_k , H_{kh_1} , H_{kh_2} , H_h , H_{sat} e J tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_k L_m = L_m A_1 \\ ZW = L_m E \\ \|[H_k \ Z]\|_\infty \leq \lambda \\ H_{kh_1} L_m = L_m A_2 \\ \|[H_{kh_1} \ Z]\|_\infty \leq \lambda \\ H_{kh_2} L_m = L_m A_3 \\ \|[H_{kh_2} \ Z]\|_\infty \leq \lambda \\ H_h L_m = L_m A_4 \\ \|[H_h \ Z]\|_\infty \leq \lambda \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} JL_m = FH_{sat} \\ \|J\|_\infty \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.65)$$

2.10 Considerações Finais

O capítulo 2 teve por objetivo apresentar a fundamentação teórica sobre as ferramentas a serem utilizadas ao longo deste trabalho. Inicialmente foi apresentada uma breve introdução sobre o controlador PID e suas variações quanto à implementação da lei de controle. Neste mesmo caminho, foi apresentado o PID digital e suas configurações, visando sua aplicação nos problemas posteriormente apresentados. Mesmo sendo um assunto já conhecido, foi comentado um pouco sobre a representação de sistemas no espaço de estado e como converter espaço de estado em função de transferência e vice-versa, uma vez que tais conversões foram bastante utilizadas neste trabalho. Posteriormente, trabalhou-se um pouco sobre o fenômeno *Windup* e o seu efeito nos sistemas, além do processo de otimização em sistemas e sua importância.

Adentrando na parte de sistemas lineares sob restrições, foi introduzida a teoria dos conjuntos invariantes e invariância positiva no auxílio do tratamento de tais restrições. Além disso, estes serão objetos de uso neste trabalho para a formulação de problemas de programação não-linear/bilinear para achar as soluções factíveis dentro de um conjunto invariante. Por fim, com o objetivo de trazer uma perspectiva para o modelo de saturação a ser utilizado neste trabalho, foi trabalhado sobre a modelagem politópica da saturação. O capítulo 3 trará o passo a passo da estratégia de controle a ser utilizada com a realimentação estática de saída, bem como a apresentação do problema de otimização.

Capítulo 3

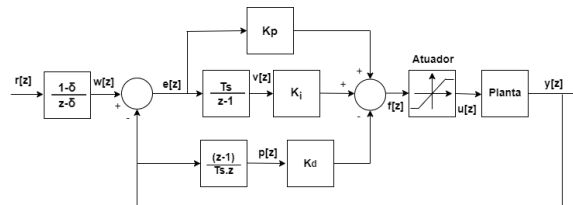
Metodologia

Aqui será detalhado o passo a passo de como estabelecer todas as condições de implementação. Inicialmente, será trabalhado o caso de apenas um único controlador PI-D (caso monovariável), bem como sua aplicação. Posteriormente, será apresentada a extensão para o caso MIMO 2x2 (caso multivariável) utilizando dois controladores PI-D. Em ambos, será apresentado o problema de otimização a ser resolvido.

3.1 Caso monovariável

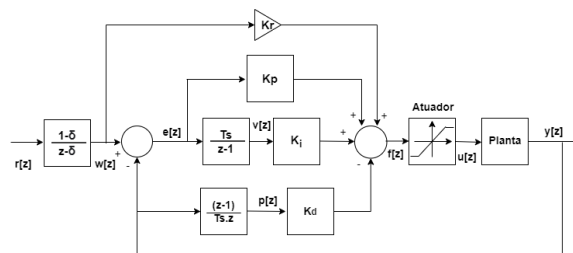
3.1.1 Modelo da Planta com Controlador PI-D

Figura 3.1: Sistema de malha fechada com controlador PI-D e saturação no atuador.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.2: Sistema de malha fechada com controlador PI-D, saturação no atuador e termo *feedforward*.



Fonte: Próprio autor.

Inspirado no modelo do controlador utilizado no trabalho de Martins et al. (2020), considere um controlador PI-D com sinal de referência passando por um filtro de primeira ordem, conforme a Figura 3.1, sendo T_s o período de amostragem, δ o parâmetro do filtro ($0 \leq \delta \leq 1$), K_p o ganho proporcional, K_i o ganho integral e K_d o ganho derivativo do controlador. Considere também as seguintes transformadas Z: $r[z]$ da referência, $w[z]$ da referência filtrada, $e[z]$ da variável relativa ao erro de rastreamento, $v[z]$ da variável relativa a integral do erro, $p[z]$ da variável relativa a derivada da saída, $f[z]$ da saída do controlador, $u[z]$ do sinal de controle e $y[z]$ da saída do sistema.

A técnica descrita a seguir pode ser estendida sem dificuldades à estrutura clássica do controlador PID, que usa a derivada do erro de rastreamento em lugar da derivada da saída. O filtro de primeira ordem na referência tem o objetivo de suavizar o sinal de referência para facilitar a obtenção de poliedros invariantes que forcem o respeito às restrições na variável controlada. Com isso, considere agora a planta do sistema dada pela Equação (2.44) (caso monovariável), com $E = 0$, mais o controlador PI-D com a referência. Analisando o diagrama de blocos correspondente à dinâmica do controlador PI-D, podemos extrair as seguintes equações:

$$f[z] = K_p e[z] + K_i v[z] - K_d p[z] \quad (3.1)$$

$$v[z] = \left(\frac{T_s}{z-1} \right) e[z] \quad (3.2)$$

$$p[z] = \frac{1}{T_s} \left(\frac{z-1}{z} \right) y[z] \quad (3.3)$$

Analisando agora o bloco relativo ao filtro de referência, temos que:

$$w[z] = \left(\frac{1-\delta}{z-\delta} \right) r[z] \quad (3.4)$$

Com isso, aplicando a transformada Z inversa em cada equação e fazendo as devidas substituições e manipulações, obtemos:

$$f[k] = K_p e[k] + K_i v[k] - K_d p[k] \quad (3.5)$$

$$v[k+1] = v[k] + T_s e[k] = v[k] + T_s (w[k] - y[k]) = -T_s Cx[k] + v[k] + T_s w[k] \quad (3.6)$$

$$w[k+1] = \delta w[k] + (1-\delta)r[k] \quad (3.7)$$

Observação 8 Note que, a partir da Equação (3.7), se o sistema for estável em malha fechada e a referência $r[k]$ tender a um valor constante r , então $w[k] \rightarrow r[k] = r$ em regime permanente.

De forma separada, detalhando a parte derivativa, temos que:

$$p[k+1] = \frac{1}{T_s} (y[k+1] - y[k]) = \frac{1}{T_s} (Cx[k+1] - Cx[k]) = \frac{1}{T_s} (C(Ax[k] + Bu[k]) - Cx[k]) \quad (3.8)$$

Finalmente:

$$p[k+1] = \frac{1}{T_s} (CA - C)x[k] + \frac{1}{T_s} CBu[k] \quad (3.9)$$

Além disso, como $y[k] = w[k] - e[k]$, tem-se que:

$$e[k] = w[k] - Cx[k] \quad (3.10)$$

Com isso, podemos representar o sistema (referência + controlador PI-D + planta) em espaço de estado aumentado, conforme as Equações (3.11) e (3.12) abaixo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ v[k+1] \\ p[k+1] \\ w[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -CT_s & 1 & 0 & T_s \\ \frac{1}{T_s}(CA - C) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \frac{1}{T_s}CB \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ (1 - \delta) \end{bmatrix}}_{\bar{E}} r[k] \quad (3.11)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}[k]} \quad (3.12)$$

Com a inserção do termo *feedforward*, a equação (3.12) fica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}[k]} \quad (3.13)$$

Reescrevendo, temos que:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}[k+1] = \bar{A}\bar{\mathbf{x}}[k] + \bar{B}u[k] + \bar{E}r[k] \\ \bar{\mathbf{y}}[k] = \bar{C}\bar{\mathbf{x}}[k] \end{cases} \quad (3.14)$$

com a lei de controle dada por:

$$u[k] = \text{sat}(f[k]) = \text{sat}(K_p e[k] + K_i v[k] - K_d p[k]) = \text{sat}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix}\right) \quad (3.15)$$

Observação 9 Vale ressaltar que o modelo (3.14) tem a mesma forma que o modelo genérico não-barrado (2.44). Portanto, os resultados de invariância positiva com saturação

vistos no capítulo 2, podem ser usados aqui no capítulo 3.

Para o termo *feedforward*, a lei de controle é dada por:

$$u[k] = \text{sat}(f[k]) = \text{sat}(K_p e[k] + K_i v[k] - K_d p[k] + K_r w[k]) = \text{sat} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d & K_r \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \\ w[k] \end{bmatrix} \right) \quad (3.16)$$

e o modelo politópico:

$$\bar{x}[k+1] = \lambda_1 (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C}) \bar{x}[k] + \lambda_2 (\bar{A} + \bar{B}\bar{H}_{sat}) \bar{x}[k] + \bar{E}r[k] \quad (3.17)$$

Nota-se que, na formulação proposta, por comparação ao modelo da Equação (2.44) (caso monovariável), o sinal de referência $r[k]$ assume artificialmente o papel de uma perturbação. Para obter condições de invariância ao sistema aumentado, é necessário impor restrições à $r[k]$, conforme consta na Equação (3.18), com $\bar{W} \in \mathbb{R}$ (escalar que define a restrição na referência):

$$r[k] \in \bar{\Phi} = \{r : |\bar{W}r[k]| \leq \bar{1}\} \quad (3.18)$$

3.1.2 Invariância e Restrições

A partir da formulação acima, é possível aplicar a Proposição 1 para obter condições para a invariância positiva de um poliedro $\bar{\Omega}_s = \{\bar{x} : L\bar{x} \leq \bar{1}\}$ definido no espaço de estado aumentado, chegando assim na Proposição 3.

Proposição 3 *O poliedro $\bar{\Omega}_s = \{\bar{x} : L\bar{x} \leq \bar{1}\}$ é positivamente invariante com taxa de contração λ ($0 \leq \lambda < 1$), em relação ao sistema (3.17), se houver matrizes \bar{Z} , \bar{H}_k , \bar{H}_h , \bar{H}_{sat} e \bar{J} tais que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}_k \bar{L} = \bar{L} (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C}) \\ \bar{Z}\bar{W} = \bar{L}\bar{E} \\ \|\bar{H}_k \bar{Z}\|_\infty \leq \lambda \\ \bar{H}_h \bar{L} = \bar{L} (\bar{A} + \bar{B}\bar{H}_{sat}) \\ \|\bar{H}_h \bar{Z}\|_\infty \leq \lambda \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}\bar{L} = \bar{H}_{sat} \\ \|\bar{J}\|_\infty \leq u_{max} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Tais condições garantem a invariância positiva de $\bar{\Omega}_s$, ou seja, que $\bar{x}[k] \in \bar{\Omega}_s \forall k = 0, 1, \dots$ se $\bar{x}[0] \in \bar{\Omega}_s$. Consideremos agora as restrições na saída controlada representada pela Eq. (2.51) (caso monovariável). O primeiro passo é estendê-la ao sistema aumentado da Equação (3.14), na qual elas são representadas pelo seguinte poliedro, consistente com a Equação (2.51):

$$\Omega_{\bar{x}} = \{\bar{x} : |\bar{Q}\bar{x}| \leq \bar{1}\} \quad (3.20)$$

com $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de restrição de estado). Essas restrições são respeitadas se o poliedro invariante $\bar{\Omega}_s$ estiver contido em $\Omega_{\bar{x}}$. De acordo com o lema de Farkas estendido,

$\bar{\Omega}_s \subset \Omega_{\bar{x}}$ se, e somente se, existe uma matriz \bar{H}_s tal que:

$$\begin{cases} \bar{H}_s \bar{L} = \bar{Q} \\ \|\bar{H}_s\|_{\infty} \leq 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

3.2 Projeto via Otimização (caso monovariável)

Como exposto anteriormente, se existirem ganhos do controlador PI-D, e um poliedro positivamente invariante $\bar{\Omega}_s$ que satisfaçam às condições (3.19) e (3.21) (caso monovariável), então o controlador garante o respeito às restrições na variável controlada, mesmo com a saturação no atuador. As condições (3.19) e (3.21) têm a forma de relações algébricas entre matrizes que são lineares ou *bilineares* (envolvendo o produto entre duas variáveis matriciais), que podem ser inseridas como restrições em um problema de otimização.

Neste trabalho, é usada a abordagem de otimização bilinear (Brião et al. 2018, Brião et al. 2021), na qual poliedros positivamente invariantes e controladores por realimentação de estado e de saída são calculados para resolver problemas de regulação sob restrições nos estados e no controle, mas evitando a saturação dos atuadores. O modelo politópico de saturação aqui adotado foi usado para analisar a invariância positiva dos conjuntos poliédricos em tempo discreto no contexto do operador delta (Pedrosa 2018). Estas abordagens foram adaptadas à estrutura proposta para o controlador PI-D.

A estratégia de otimização visa garantir que a resposta do sistema seja a mais rápida possível. O parâmetro δ do filtro de referência regula a velocidade de mudança do *set-point*, podendo variar dentro do intervalo $[0, 1]$, sendo a mudança mais rápida com δ próximo de 0 e mais lenta com δ próximo de 1, além de modificar o tamanho do poliedro. Por outro lado, o aumento do ganho K_i da ação integral do controlador tende a diminuir o erro em problemas de rejeição de perturbações (Åström e Hägglund 1995). Dessa forma, a função objetivo do problema de otimização pode ser escolhida de modo a ponderar a velocidade de resposta do sistema em malha fechada tanto para o problema de regulação, quanto para o problema de seguimento de referência. Assim, para o caso monovariável, é proposto o seguinte problema de programação não-linear para o cálculo dos ganhos do controlador PI-D:

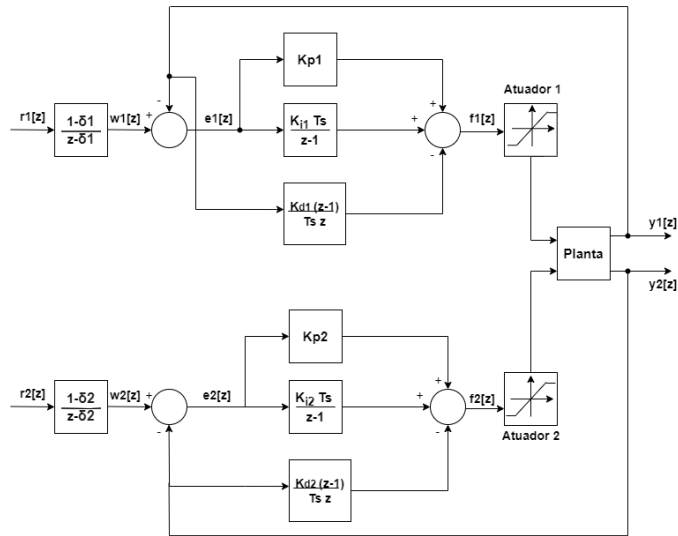
$$\min_{\Gamma} \left(w_1 \delta + w_2 \frac{1}{K_i} \right), \quad \text{sujeito a: } \begin{cases} (3.19), (3.21) \\ f_l(\Gamma) \leq \varphi_l, \quad l = 1, \dots, \bar{l}, \end{cases} \quad (3.22)$$

sendo $\Gamma = \{\bar{H}_k, \bar{H}_h, \bar{H}_s, \bar{H}_{sat}, \bar{J}, \bar{Z}, \bar{L}, \bar{K}\}$ o conjunto de variáveis do problema de otimização e w_1 e w_2 fatores de ponderação escolhidos pelo projetista. As restrições adicionais $f_l(\cdot) \leq \varphi_l$ correspondem aos limites superiores e inferiores das variáveis do problema de otimização (Brião et al. 2021).

3.3 Caso multivariável

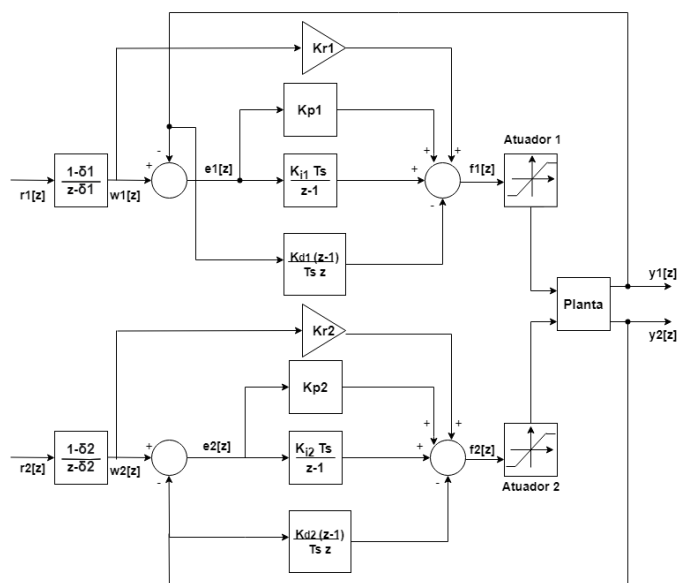
3.3.1 Modelo da Planta com dois Controladores PI-D

Figura 3.3: Sistema em malha fechada com dois controladores PI-D e saturação nos atuadores.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.4: Sistema em malha fechada com dois controladores PI-D, saturação nos atuadores e termo *feedforward*.



Fonte: Próprio autor.

Por questões de simplicidade e sabendo que a técnica proposta neste trabalho pode ser aplicada a sistemas MIMO de qualquer dimensão $m \times m$, considere um sistema de controle MIMO 2×2 com dois controladores PI-D, conforme a Figura 3.3, sendo T_s o período de amostragem, δ_1 e δ_2 os parâmetros dos filtros ($0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$), K_{p_1} e K_{p_2} os ganhos proporcionais, K_{i_1} e K_{i_2} os ganhos integrais, e K_{d_1} e K_{d_2} os ganhos derivativos dos controladores. Considere também as seguintes transformadas Z: $r_1[z]$ e $r_2[z]$ das referências, $w_1[z]$ e $w_2[z]$ das referências filtradas, $e_1[z]$ e $e_2[z]$ das variáveis relativa ao erro de rastreamento, $v_1[z]$ e $v_2[z]$ das variáveis relativa a integral do erro, $p_1[z]$ e $p_2[z]$ das variáveis relativa a derivada da saída, $f_1[z]$ e $f_2[z]$ das saídas de cada controlador, $u_1[z]$ e $u_2[z]$ dos sinais de controle e $y_1[z]$ e $y_2[z]$ das saídas do sistema.

Agora, considere novamente a planta do sistema dada pela Equação (2.44), com $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, mais os dois controladores PI-D com as duas referências. Analisando o diagrama de blocos correspondente à dinâmica do controlador que está mais acima na figura, podemos extrair as seguintes equações:

$$f_1[z] = K_{p_1}e_1[z] + K_{i_1}v_1[z] - K_{d_1}p_1[z] \quad (3.23)$$

$$v_1[z] = \left(\frac{T_s}{z-1} \right) e_1[z] \quad (3.24)$$

$$p_1[z] = \frac{1}{T_s} \left(\frac{z-1}{z} \right) y_1[z] \quad (3.25)$$

Analisando agora o bloco relativo ao filtro da referência $r_1[z]$, temos que:

$$w_1[z] = \left(\frac{1-\delta_1}{z-\delta_1} \right) r_1[z] \quad (3.26)$$

Analisando agora o diagrama de blocos correspondente à dinâmica do controlador que está mais abaixo, extraímos as seguintes equações:

$$f_2[z] = K_{p_2}e_2[z] + K_{i_2}v_2[z] - K_{d_2}p_2[z] \quad (3.27)$$

$$v_2[z] = \left(\frac{T_s}{z-1} \right) e_2[z] \quad (3.28)$$

$$p_2[z] = \frac{1}{T_s} \left(\frac{z-1}{z} \right) y_2[z] \quad (3.29)$$

Analisando agora o bloco relativo ao filtro da referência $r_2[z]$, temos que:

$$w_2[z] = \left(\frac{1-\delta_2}{z-\delta_2} \right) r_2[z] \quad (3.30)$$

Com isso, aplicando a transformada Z inversa em cada equação e fazendo algumas manipulações, obtemos:

$$f_1[k] = K_{p_1}e_1[k] + K_{i_1}v_1[k] - K_{d_1}p_1[k] \quad (3.31)$$

$$v_1[k+1] = v_1[k] + T_s e_1[k] = v_1[k] + T_s w_1[k] - T_s y_1[k] \quad (3.32)$$

$$w_1[k+1] = \delta_1 w_1[k] + (1 - \delta_1) r_1[k] \quad (3.33)$$

$$f_2[k] = K_{p_2} e_2[k] + K_{i_2} v_2[k] - K_{d_2} p_2[k] \quad (3.34)$$

$$v_2[k+1] = v_2[k] + T_s e_2[k] = v_2[k] + T_s w_2[k] - T_s y_2[k] \quad (3.35)$$

$$w_2[k+1] = \delta_2 w_2[k] + (1 - \delta_2) r_2[k] \quad (3.36)$$

Seguindo os mesmos passos do caso monovariável, detalha-se a parte derivativa de ambos os controladores:

$$p_1[k+1] = \frac{1}{T_s} (y_1[k+1] - y_1[k]) = \frac{1}{T_s} y_1[k+1] - \frac{1}{T_s} y_1[k] \quad (3.37)$$

$$p_2[k+1] = \frac{1}{T_s} (y_2[k+1] - y_2[k]) = \frac{1}{T_s} y_2[k+1] - \frac{1}{T_s} y_2[k] \quad (3.38)$$

Para fazer corretamente as manipulações necessárias, devemos levar em consideração o seguinte formato do modelo do sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2] \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] \end{cases} \quad (3.39)$$

Onde \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 são as colunas da matriz \mathbf{B} , e \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 são as linhas da matriz \mathbf{C} . Com isso, é possível trabalhar com as seguintes equações:

$$y_1[k] = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}[k] \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} y_1[k+1] &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{C}_1 \{ \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1 u_1[k] + \mathbf{B}_2 u_2[k] \} \\ &= \mathbf{C}_1 \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 u_1[k] + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 u_2[k] \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$y_2[k] = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}[k] \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} y_2[k+1] &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{C}_2 \{ \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1 u_1[k] + \mathbf{B}_2 u_2[k] \} \\ &= \mathbf{C}_2 \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 u_1[k] + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 u_2[k] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Substituindo a Equação (3.40) em $v_1[k+1]$ e $p_1[k+1]$, a Equação (3.41) em $p_1[k+1]$, a Equação (3.42) em $v_2[k+1]$ e $p_2[k+1]$ e a Equação (3.43) em $p_2[k+1]$, obtemos:

$$v_1[k+1] = v_1[k] + T_s w_1[k] - T_s \mathbf{C}_1 \mathbf{x}[k] \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} p_1[k+1] &= \frac{1}{T_s} \{ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 u_1[k] + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 u_2[k] \} - \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}[k] \\ &= \frac{1}{T_s} \{ \mathbf{C}_1 \mathbf{A} - \mathbf{C}_1 \} \mathbf{x}[k] + \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 u_1[k] + \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 u_2[k] \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$v_2[k+1] = v_2[k] + T_s w_2[k] - T_s \mathbf{C}_2 \mathbf{x}[k] \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
p_2[k+1] &= \frac{1}{T_s} \{ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 u_1[k] + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 u_2[k] \} - \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_2 \mathbf{x}[k] \\
&= \frac{1}{T_s} \{ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} - \mathbf{C}_2 \} \mathbf{x}[k] + \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 u_1[k] + \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 u_2[k]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Além disso, como $y_1[k] = w_1[k] - e_1[k]$ e $y_2[k] = w_2[k] - e_2[k]$, tem-se que:

$$e_1[k] = w_1[k] - \mathbf{C}_1 \mathbf{x}[k] \tag{3.48}$$

$$e_2[k] = w_2[k] - \mathbf{C}_2 \mathbf{x}[k] \tag{3.49}$$

Com isso, podemos representar o sistema (referências + controladores PI-D + planta) em espaço de estado aumentado, conforme as Equações (3.50) e (3.51):

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ v_1[k+1] \\ v_2[k+1] \\ p_1[k+1] \\ p_2[k+1] \\ w_1[k+1] \\ w_2[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_m[k+1]} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_1 T_s & 1 & 0 & 0 & 0 & T_s & 0 \\ -\mathbf{C}_2 T_s & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_s \\ \frac{1}{T_s} (\mathbf{C}_1 \mathbf{A} - \mathbf{C}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_s} (\mathbf{C}_2 \mathbf{A} - \mathbf{C}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ p_1[k] \\ p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_m[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 & \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 \\ \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1 & \frac{1}{T_s} \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}_m[k]} \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (1 - \delta_1) & 0 \\ 0 & (1 - \delta_2) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{E}}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1[k] \\ r_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}_m[k]}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} e_1[k] \\ e_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ -p_1[k] \\ -p_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{y}}_m[k]} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ p_1[k] \\ p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_m[k]}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Com a inserção do termo *feedforward*, a Equação (3.51) fica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_1[k] \\ e_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ -p_1[k] \\ -p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}_m[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ p_1[k] \\ p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}_m[k]} \quad (3.52)$$

Observação 10 *O termo feedforward, visto anteriormente e proposto em dos Santos et al. (2021), é uma ligação direta (através de um ganho K_r) com a referência filtrada. A ideia é que esse termo extra atenua as dificuldades que se tenha de achar solução quando aumentamos os limites de $w[k]$.*

Reescrevendo as equações anteriores, obtemos a forma:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_m[k+1] = \bar{\mathbf{A}}_m \bar{\mathbf{x}}_m[k] + \bar{\mathbf{B}}_m \bar{\mathbf{u}}_m[k] + \bar{\mathbf{E}}_m \bar{\mathbf{r}}_m[k] \\ \bar{\mathbf{y}}_m[k] = \bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{x}}_m[k] \end{cases} \quad (3.53)$$

de modo que, considerando a realimentação estática de saída ($\bar{\mathbf{u}}_m[k] = \bar{\mathbf{K}}_m \bar{\mathbf{y}}_m[k] = \bar{\mathbf{K}}_m \bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{x}}_m[k]$), tem-se a lei de controle dada por:

$$u_1[k] = \text{sat}(f_1[k]) = \text{sat}(K_{p_1} e_1[k] + K_{i_1} v_1[k] - K_{d_1} p_1[k]) = \text{sat} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_{p_1} & K_{i_1} & K_{d_1} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{K}}_1} \begin{bmatrix} e_1[k] \\ v_1[k] \\ -p_1[k] \end{bmatrix} \right) \quad (3.54)$$

$$u_2[k] = \text{sat}(f_2[k]) = \text{sat}(K_{p_2} e_2[k] + K_{i_2} v_2[k] - K_{d_2} p_2[k]) = \text{sat} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_{p_2} & K_{i_2} & K_{d_2} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{K}}_2} \begin{bmatrix} e_2[k] \\ v_2[k] \\ -p_2[k] \end{bmatrix} \right) \quad (3.55)$$

com $\bar{\mathbf{K}}_m$ dado por:

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \begin{bmatrix} K_{p_1} & 0 & K_{i_1} & 0 & K_{d_1} & 0 \\ 0 & K_{p_2} & 0 & K_{i_2} & 0 & K_{d_2} \end{bmatrix} \text{ (descentralizado)} \quad (3.56)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \begin{bmatrix} K_{p_{11}} & K_{p_{12}} & K_{i_{11}} & K_{i_{12}} & K_{d_{11}} & K_{d_{12}} \\ K_{p_{21}} & K_{p_{22}} & K_{i_{21}} & K_{i_{22}} & K_{d_{21}} & K_{d_{22}} \end{bmatrix} \text{ (centralizado)} \quad (3.57)$$

Para o termo *feedforward*, a lei de controle é dada por:

$$\begin{aligned}
u_1[k] &= \text{sat}(f_1[k]) = \text{sat}(K_{p_1}e_1[k] + K_{i_1}v_1[k] - K_{d_1}p_1[k] + K_{r_1}w_1[k]) \\
&= \text{sat}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_{p_1} & K_{i_1} & K_{d_1} & K_{r_1} \end{bmatrix}}_{\bar{K}_1} \begin{bmatrix} e_1[k] \\ v_1[k] \\ -p_1[k] \\ w_1[k] \end{bmatrix}\right) \tag{3.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2[k] &= \text{sat}(f_2[k]) = \text{sat}(K_{p_2}e_2[k] + K_{i_2}v_2[k] - K_{d_2}p_2[k] + K_{r_2}w_2[k]) \\
&= \text{sat}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_{p_2} & K_{i_2} & K_{d_2} & K_{r_2} \end{bmatrix}}_{\bar{K}_2} \begin{bmatrix} e_2[k] \\ v_2[k] \\ -p_2[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}\right) \tag{3.59}
\end{aligned}$$

com $\bar{\mathbf{K}}_{mf}$ dado por:

$$\bar{\mathbf{K}}_{mf} = \begin{bmatrix} K_{p_1} & 0 & K_{i_1} & 0 & K_{d_1} & 0 & K_{r_1} & 0 \\ 0 & K_{p_2} & 0 & K_{i_2} & 0 & K_{d_2} & 0 & K_{r_2} \end{bmatrix} \text{ (descentralizado feedforward)} \tag{3.60}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mf} = \begin{bmatrix} K_{p_{11}} & K_{p_{12}} & K_{i_{11}} & K_{i_{12}} & K_{d_{11}} & K_{d_{12}} & K_{r_{11}} & K_{r_{12}} \\ K_{p_{21}} & K_{p_{22}} & K_{i_{21}} & K_{i_{22}} & K_{d_{21}} & K_{d_{22}} & K_{r_{21}} & K_{r_{22}} \end{bmatrix} \text{ (centralizado feedforward)} \tag{3.61}$$

e o modelo politópico:

$$\bar{x}_m[k+1] = \{\lambda_1\bar{A}_1 + \lambda_2\bar{A}_2 + \lambda_3\bar{A}_3 + \lambda_4\bar{A}_4\} \bar{x}_m[k] + \bar{E}_m\bar{r}_m[k] \tag{3.62}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_m + \bar{\mathbf{B}}_m \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_m \bar{\mathbf{C}}_m + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{\text{sat}} \right) \\
\bar{A}_2 &= \bar{\mathbf{A}}_m + \bar{\mathbf{B}}_m \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_m \bar{\mathbf{C}}_m + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{\text{sat}} \right) \\
\bar{A}_3 &= \bar{\mathbf{A}}_m + \bar{\mathbf{B}}_m \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_m \bar{\mathbf{C}}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{\text{sat}} \right) \\
\bar{A}_4 &= \bar{\mathbf{A}}_m + \bar{\mathbf{B}}_m \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_m \bar{\mathbf{C}}_m + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_{\text{sat}} \right)
\end{aligned}$$

Observação 11 Nas matrizes \bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \bar{A}_3 e \bar{A}_4 , a variável ganho $\bar{\mathbf{K}}_m$ pode ser substituída por $\bar{\mathbf{K}}_{mf}$ para o caso feedforward.

Assim, para obter condições de invariância ao sistema aumentado do caso MIMO 2x2, impõe-se restrições em $\bar{\mathbf{r}}_m[k]$, conforme consta na Equação (3.63), com $\bar{\mathbf{W}}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (matriz que define a restrição nas referências):

$$\bar{\mathbf{r}}_m[k] \in \bar{\Phi} = \{\bar{\mathbf{r}}_m : |\bar{\mathbf{W}}_m \bar{\mathbf{r}}_m[k]| \leq \bar{1}\} \quad (3.63)$$

3.3.2 Invariância e Restrições

Considerando o descrito acima, é possível aplicar agora a Proposição 2 para obter condições para a invariância positiva de um poliedro $\bar{\Omega}_m = \{\bar{x} : L_m \bar{x}_m \leq \bar{1}\}$ definido no espaço de estado aumentado no caso MIMO 2x2, chegando assim na Proposição 4.

Proposição 4 *O poliedro $\bar{\Omega}_m = \{\bar{x} : L_m \bar{x}_m \leq \bar{1}\}$ é positivamente invariante com taxa de contração λ ($0 \leq \lambda < 1$), em relação ao sistema (3.62), se houver matrizes \bar{Z} , \bar{H}_k , \bar{H}_{kh_1} , \bar{H}_{kh_2} , \bar{H}_h , \bar{H}_{sat} e \bar{J} tais que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}_k \bar{L}_m = \bar{L}_m \bar{A}_1 \\ \bar{Z} \bar{W}_m = \bar{L}_m \bar{E}_m \\ \|\bar{H}_k \bar{Z}\|_\infty \leq \lambda \\ \bar{H}_{kh_1} \bar{L}_m = \bar{L}_m \bar{A}_2 \\ \|\bar{H}_{kh_1} \bar{Z}\|_\infty \leq \lambda \\ \bar{H}_{kh_2} \bar{L}_m = \bar{L}_m \bar{A}_3 \\ \|\bar{H}_{kh_2} \bar{Z}\|_\infty \leq \lambda \\ \bar{H}_h \bar{L}_m = \bar{L}_m \bar{A}_4 \\ \|\bar{H}_h \bar{Z}\|_\infty \leq \lambda \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J} \bar{L}_m = \bar{F} \bar{H}_{sat} \\ \|\bar{J}\|_\infty \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Com $\bar{F} = F$. Em relação as restrições na saída, elas podem ser representadas pelo seguinte poliedro, também consistente com a Equação (2.51):

$$\Omega_{\bar{x}_m} = \{\bar{x}_m : |\bar{Q}_m \bar{x}_m| \leq \bar{1}\} \quad (3.65)$$

com $\bar{Q}_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de restrição de estado). Tais restrições são respeitadas se o poliedro invariante $\bar{\Omega}_m$ estiver contido em $\Omega_{\bar{x}_m}$. De acordo com o lema de Farkas estendido, $\bar{\Omega}_m \subset \Omega_{\bar{x}_m}$ se, e somente se, existe uma matriz \bar{H}_s tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}_s \bar{L}_m = \bar{Q}_m \\ \|\bar{H}_s\|_\infty \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.66)$$

3.4 Projeto via Otimização (caso multivariável)

Na mesma linha do caso monovariável, para o caso multivariável, se existirem ganhos dos controladores PI-D, e um poliedro positivamente invariante $\bar{\Omega}_m$ que satisfaçam às condições (3.64) e (3.66), então os controladores garantem o respeito às restrições na variável controlada, mesmo com a saturação no atuador. As condições (3.64) e (3.66)

também têm a forma de relações algébricas entre matrizes que são lineares ou *bilineares* podendo ser inseridas como restrições no problema de otimização.

Observação 12 *É importante destacar também que é possível impor a complexidade do poliedro no problema de otimização através do número de linhas a ser utilizado no problema de otimização. A medida que aumentamos o número de linhas do poliedro no problema, o solver tende a demorar na busca por uma solução factível, sendo muitas vezes solução não factível.*

Assim, são propostas duas formas para o problema de programação não-linear para o cálculo dos ganhos dos controladores PI-D do caso MIMO 2x2 (caso descentralizado e centralizado, respectivamente):

$$\min_{\Gamma_m} \left(w_1 \delta_1 + w_2 \delta_2 + w_3 \frac{1}{K_{i_1}} + w_4 \frac{1}{K_{i_2}} \right) \quad (3.67)$$

$$\min_{\Gamma_m} \left(w_1 \delta_1 + w_2 \delta_2 + w_3 \frac{1}{K_{i_{11}}} + w_4 \frac{1}{K_{i_{12}}} + w_5 \frac{1}{K_{i_{21}}} + w_6 \frac{1}{K_{i_{22}}} \right), \quad (3.68)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} (3.64), (3.66) \\ f_l(\Gamma_m) \leq \varphi_l, \quad l = 1, \dots, \bar{l}, \end{cases}$$

sendo $\Gamma_m = \{\bar{H}_k, \bar{H}_{kh_1}, \bar{H}_{kh_2}, \bar{H}_h, \bar{H}_s, \bar{H}_{sat}, \bar{J}, \bar{Z}, \bar{L}_m, \bar{K}_m\}$ o conjunto de variáveis do problema de otimização e w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 e w_6 os fatores de ponderação.

3.5 Considerações Finais

O capítulo 3 teve como principal objetivo apresentar o passo a passo de como estabelecer todas as condições de implementação do controle sob restrições utilizando a realimentação estática de saída junto à teoria de conjuntos invariantes. Com isso, foi possível estabelecermos todas as condições para o surgimento do problema de otimização a ser resolvido. No próximo capítulo, será apresentada a aplicação da estratégia para os casos monovariável e multivariável (MIMO 2x2) utilizando um solucionador de problemas de otimização numérica. Tal solucionador fornece um conjunto de maneiras diferentes para resolver o problema.

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentamos inicialmente a aplicação da técnica de otimização proposta para o caso monovariável (SISO) a partir de alguns testes aplicados a um motor CC e um caso particular do trabalho de Martins et al. (2020). Posteriormente, será mostrada a aplicação para o caso multivariável (MIMO 2x2) tendo por base o sistema utilizado em Bemporad et al. (2002). Para a resolução do problema de otimização descrito no capítulo anterior, a exemplo de (Brião et al. 2021), foi usado o solucionador gratuito de problemas de otimização numérica KNITRO, disponível *online* no servidor NEOS (Gropp e Moré 1997), com sua configuração padrão juntamente com a opção multi-algoritmo, ou seja, o KNITRO irá executar simultaneamente quatro métodos de otimização para resolver o problema. Cada um deles foi criado para máxima eficiência e robustez. Juntos, os quatro métodos fornecem um conjunto de maneiras diferentes de atacar o problema buscando uma resposta factível. São eles: *Interior/Direct algorithm* (algoritmo ponto interior), *Interior/CG algorithm* (algoritmo de ponto interior do gradiente conjugado), *Active Set algorithm* (algoritmo de conjunto ativo) e *Sequential Quadratic Programming (SQP) algorithm* (Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial).

4.1 Caso SISO - Modelo de um Motor CC

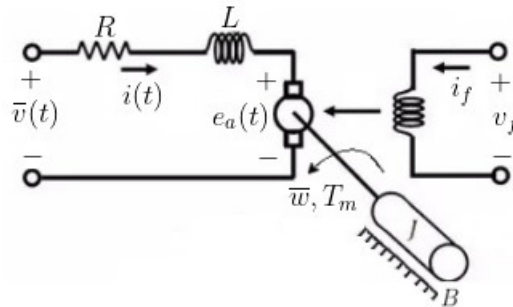
Consideramos o modelo de um motor CC controlado por corrente de armadura com campo independente, conforme ilustrado na Figura 4.1, utilizado no trabalho de (Dantas et al. 2018).

Sua função de transferência é dada por:

$$\frac{\bar{\Omega}(s)}{\bar{V}(s)} = \frac{K_a}{(Js + B)(Ls + R) + K_a K_b} \quad (4.1)$$

em que:

- $\bar{\Omega}(s)$ é a transformada de Laplace da velocidade angular do motor $\bar{\omega}(t)$;
- $\bar{V}(s)$ é a transformada de Laplace da tensão $\bar{v}(t)$ aplicada na armadura;
- K_a é a constante de torque;
- K_b é a constante de velocidade;

Figura 4.1: Motor CC com campo de enrolamento separado com corrente constante (i_f).

Fonte: Adaptado (Dantas et al. 2018).

- J é o momento de inércia do rotor;
- B é o coeficiente de atrito do rotor com seu mancal;
- L é a indutância da armadura;
- R é a resistência da armadura.

Tabela 4.1: Parâmetros do Motor.

R	L	K_b	K_a	J	B
0,1 Ω	0,005 H	0,004 V.s/rad	0,0036 N.m/A	0,1 N.m ²	0,05 N.m.s/rad

Fonte: (Dantas et al. 2018).

Os parâmetros de um motor adequado para uso em carros elétricos são apresentados na Tabela 4.1 (Dantas et al. 2018), o que resulta na seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{\Omega}(s)}{\bar{V}(s)} = G(s) = \frac{7,2}{s^2 + 20,5s + 10} \quad (4.2)$$

A velocidade angular do motor (saída do sistema) deve variar no intervalo $\pm 34,56$ (rad/s) e a tensão de armadura (sinal de controle do sistema) no intervalo de ± 48 V. Com isso, tem-se um motor que permite o movimento em dois sentidos, com tensões e velocidades positivas e negativas consideradas nas restrições. Os testes foram executados adotando-se para os fatores de ponderação os valores $w_1 = w_2 = 1$, $W = 20$ (restrição na referência) e $n_l = 10$ (número de linhas do poliedro invariante). O sistema foi discretizado com período de amostragem $T_s = 0,2s$ e um modelo de estado na forma canônica observável foi obtido para compor o problema de otimização. Com isso, obtemos a seguinte representação no espaço de estado aumentado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ v[k+1] \\ p[k+1] \\ w[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0,0166 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,9233 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 1 & 0 & 0,2 \\ 5 & -0,3836 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,0151 \\ 0,0522 \\ 0 \\ 0,2608 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (1-\delta) \end{bmatrix}}_{\bar{E}} r[k] \quad (4.3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} \quad (4.4)$$

Ao longo dos testes, analisam-se variações nos limites das restrições dos parâmetros integral do erro ($v[z]$) e da derivada da saída ($p[z]$) conforme realizado por (Dantas et al. 2018). Também houve variações nos limites das restrições em $x_1[k]$, $x_2[k]$ e $w[k]$ para cada teste, contudo, tal informação foi suprimida. Note que, do ponto de vista do problema de controle, não é necessário, em princípio, impor restrições na integral do erro e na derivada da saída. No entanto, como já notado por (Dantas et al. 2018), a imposição dessas restrições tem implicações nos resultados do problema de otimização e, consequentemente, na sintonia do controlador, como será mostrado a seguir.

4.1.1 Resultados caso SISO (Motor CC)

Teste 1: Efeito da alteração dos limites de $v[k]$

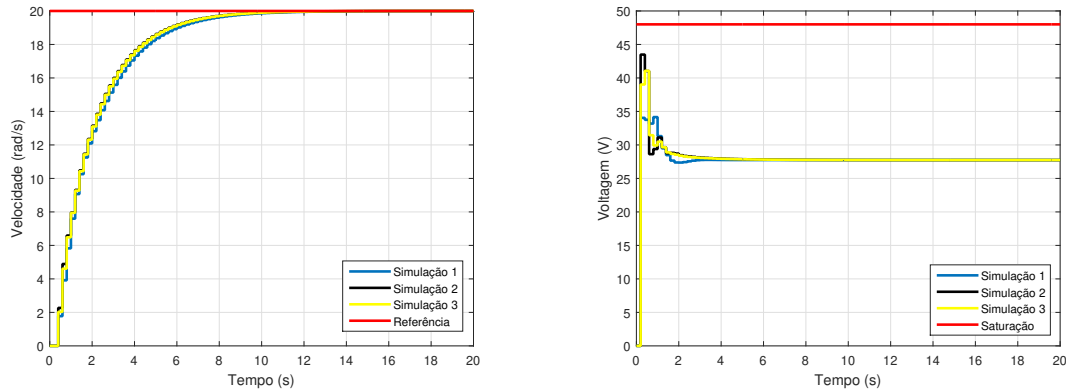
Tabela 4.2: Variando os limites da integral do erro.

Simulações	λ	Limites de ($v[k]$)	Limites de ($p[k]$)	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 34,56$	$\pm 172,80$	0,9049	17,8964	33,2020	1,3469
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,8987	21,4599	30,2540	0,4524
3	0,999	± 1728	$\pm 172,80$	0,8995	19,4126	28,3637	0,4863

Fonte: Próprio autor.

Os resultados obtidos nesse teste, mostrados na Tabela 4.2 e na Figura 4.2, indicam um discreto efeito benéfico na resposta do sistema ao se restringir menos fortemente a integral do erro. Isso fez com que o sinal de controle pudesse assumir valores mais altos no transitório, levando a uma resposta mais rápida (menores valores do parâmetro δ do filtro de referência).

Figura 4.2: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.2.



Fonte: Próprio autor.

Teste 2: Efeito da alteração dos limites de $p[k]$

Tabela 4.3: Variando os limites da derivada da saída.

Simulações	λ	Limites de $(v[k])$	Limites de $(p[k])$	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 17,28$	0,9440	21,9600	54,1626	1,6718
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,8987	21,4599	30,2540	0,4524
3	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 1728,0$	0,8985	21,1580	29,9743	0,4352

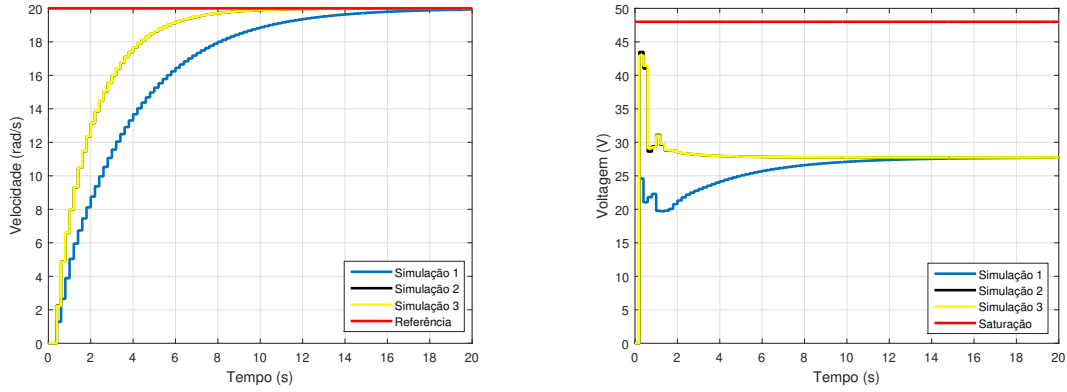
Fonte: Próprio autor.

A partir dos resultados expostos na Tabela 4.3 e nos gráficos da Figura 4.3, verifica-se que limites mais folgados na derivada da saída levaram também a uma resposta mais rápida, refletida pela diminuição do valor de δ entre a Simulação 1 e as seguintes. Verifica-se também que o filtro de referência tem o efeito de suavizar a resposta, impedindo que o sinal de controle atinja a saturação. Percebe-se também que o sistema não apresenta resposta inversa, característica de sistemas de fase não mínima, como ocorreu em Dantas et al. (2018).

Teste 3: Efeito da alteração dos limites de $v[k]$ com $-36V \leq u[k] \leq 36V$

Nesse teste, os limites da saturação são reduzidos. Verifica-se na Tabela 4.4 e na Figura 4.4 que com restrições mais folgadas em $v[z]$ o sinal de controle saturou, mas sem alterar significativamente a resposta do sistema.

Figura 4.3: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.3.



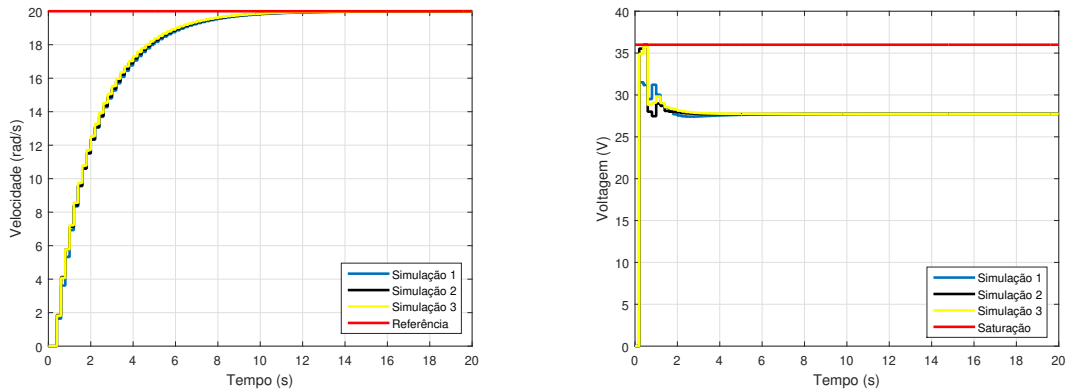
Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.4: Variando os limites da integral do erro com $-36V \leq u[k] \leq 36V$.

Simulações	λ	Limites de $(v[k])$	Limites de $(p[k])$	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 34,56$	$\pm 172,80$	0,9093	17,3689	23,0154	1,0701
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,9066	19,0280	18,3082	0,3121
3	0,999	± 1728	$\pm 172,80$	0,9049	18,3544	19,1523	0,5009

Fonte: Próprio autor.

Figura 4.4: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.4.



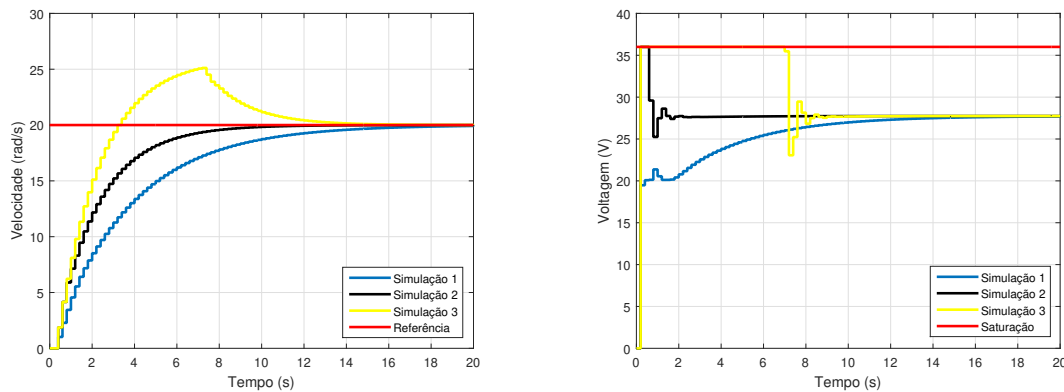
Fonte: Próprio autor.

Teste 4: Efeito da alteração dos limites de $p[k]$ com $-36V \leq u[k] \leq 36V$ Tabela 4.5: Variando os limites da derivada da saída com $-36V \leq u[k] \leq 36V$.

Simulações	λ	Limites de ($v[k]$)	Limites de ($p[k]$)	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 17,28$	0,9461	18,0669	32,4118	1,2720
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,9080	21,3823	17,4071	0,1074
3	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 1728,0$	0,0000	22,3779	10,9965	-0,0269

Fonte: Próprio autor.

Figura 4.5: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.5.



Fonte: Próprio autor.

Neste caso, pode ser visto na Tabela 4.5 e nos gráficos da Figura 4.5 que o limite excessivamente folgado para a ação derivativa resultou em um sinal de controle saturado por um tempo excessivo, provocando o fenômeno conhecido como *windup* e um *overshoot* muito grande na resposta. Mesmo assim, as restrições impostas para a variável controlada não foram violadas.

Conclui-se, portanto, que a definição das restrições nas ações integral e derivativa é fundamental para a obtenção de uma sintonia adequada. Ressalte-se, no entanto, que mesmo nas situações em que a resposta não se mostrou adequada (com *overshoot* alto ou tempo de assentamento excessivo), as restrições na variável controlada foram sempre respeitadas mesmo com a ocorrência de saturação no atuador, o que é garantido pela teoria que suporta a técnica proposta.

4.2 Caso SISO - Modelo de primeira ordem instável

Considere o seguinte sistema de 1ª ordem instável representado pela função de transferência a seguir, conforme consta no caso B do trabalho de Martins et al. (2020):

$$H(s) = \frac{10}{10s - 1} \quad (4.5)$$

Considere agora a representação em espaço de estado desse sistema, com período de amostragem $T_s = 0,3s$:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= 1,0304x[k] + 0,3045u[k] \\ y[k] &= 1x[k] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Reescrevendo as equações anteriores na forma das Equações (3.11) e (3.12), obtemos:

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ v[k+1] \\ p[k+1] \\ w[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0304 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & 1 & 0 & 0,3 \\ 0,1013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3045 \\ 0 \\ 1,0150 \\ 0 \end{bmatrix} u[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - \delta \end{bmatrix} r[k] \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}$$

Com o termo *feedforward*, a equação de saída (4.7) fica:

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \\ w[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Sujeito às seguintes restrições de estado (sem e com termo *feedforward*):

$$\begin{aligned} -1,2 &\leq x[k] \leq 1,2 \\ -10 &\leq v[k] \leq 10 \\ -2 &\leq p[k] \leq 2 \\ -1,2 &\leq w[k] \leq 1,2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Com limitação no sinal de referência e restrição no sinal de controle dados por:

$$\begin{aligned} -1 &\leq r[k] \leq 1 \\ -0,5 &\leq u[k] \leq 0,5 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Na execução dos testes, foi adotada uma referência máxima constante com valor 1 (conforme consta no trabalho de Martins et al. (2020)) implicando num valor de $W = 1$, além dos valores de ponderação da função objetivo dados por:

- sem termo *feedforward*: $w_1 = w_2 = 1$ com $nl = 6$ (número de linhas do Poliedro).
- com termo *feedforward*: $w_1 = 2,5$ e $w_2 = 10$ com $nl = 6$.

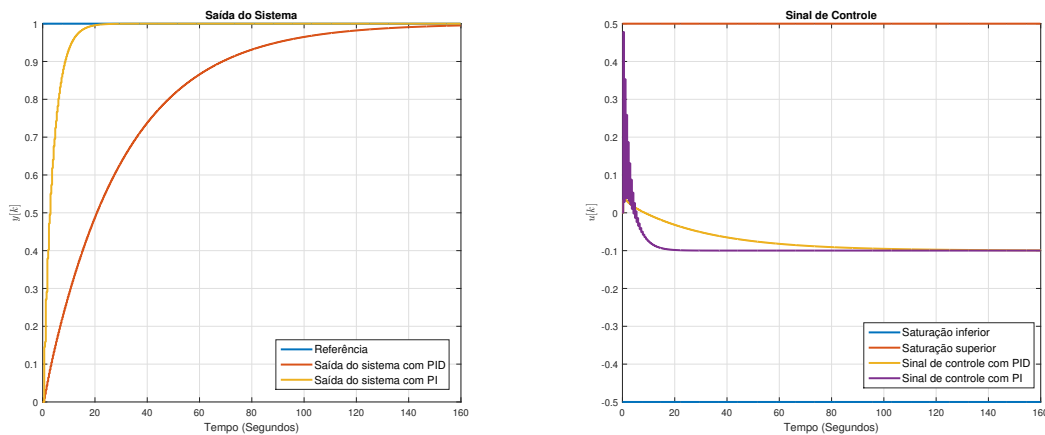
4.2.1 Resultados SISO caso B (Martins et al. 2020)

Tabela 4.6: Simulação com PI e PID (sem termo *feedforward*).

Tabela de parâmetros						
	λ	δ	K_p	K_i	K_d	F.O
PID	0,9999	0,9900	3,3388	1,4902	0,0883	1,6611
PI	0,9999	-	6,3705	1,5935	-	1,5935

Fonte: Próprio autor.

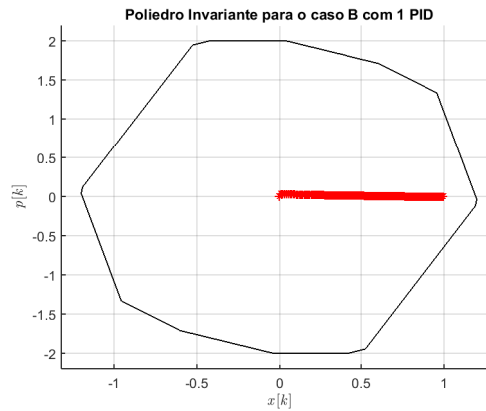
Figura 4.6: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com PI/PID para condições da Tabela 4.6.



Fonte: Próprio autor.

Comparando os resultados obtidos no teste do PID com o PI, de acordo com a Tabela 4.6 e Figura 4.6, nota-se que o sinal de controle gerado pelo PID possui amplitude menor (longe da saturação) comparado ao PI (refletido através da maximização de K_i e pelo filtro de referência que suaviza a resposta do PID), levando-o a ter uma resposta muito mais lenta com um tempo de assentamento excessivo. Tal efeito se dá devido à estrutura utilizada no modelo do trabalho de Martins, que utiliza uma realimentação de saída com a variável erro, sem a utilização de um termo derivativo na realimentação. Na Figura 4.7 é possível verificar a trajetória do vetor de estado no interior do Poliedro Invariante formado.

Figura 4.7: Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x[k] \ p[k]]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso B com 1 PID.



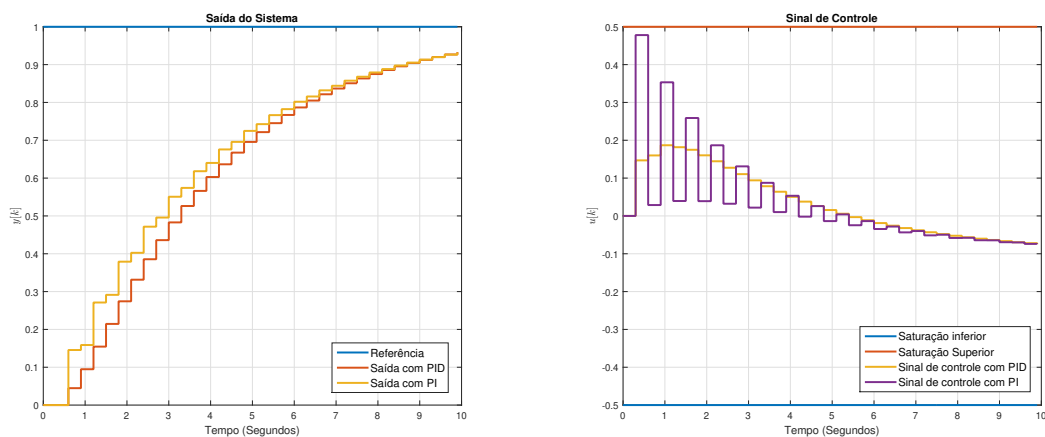
Fonte: Próprio autor.

Tabela 4.7: Simulação com PI e PID (com termo *feedforward*).

Tabela de parâmetros							
	λ	δ	K_p	K_i	K_d	K_r	F.O
PID	0,9999	0,6326	9,6389	2,6646	-0,3857	-9,2392	5,3349
PI	0,9999	-	6,3705	1,5935	-	-	1,5935

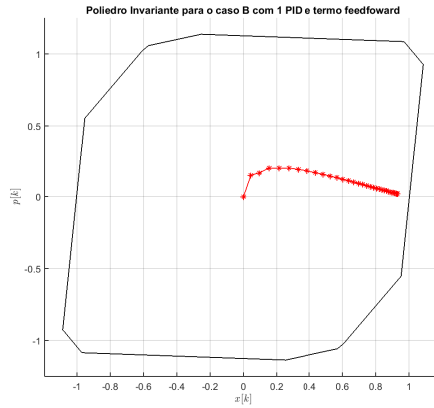
Fonte: Próprio autor.

Figura 4.8: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com PI/PID para condições da Tabela 4.7.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.9: Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x[k] \ p[k]]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso B com 1 PID e termo *feedforward*.



Fonte: Próprio autor.

Com a inserção do termo *feedforward* e analisando os gráficos da Figura 4.8 juntamente com os valores da Tabela 4.7, percebe-se uma melhoria significativa na resposta do PID. Apesar do sinal de controle ter aumentado um pouco mais sua amplitude, os parâmetros do controlador e do filtro de primeira ordem contribuíram para que o tempo de subida do PID fosse menor igualando com o tempo de assentamento do PI. Conclui-se, portanto, que a inserção de um termo *feedforward* reduziu as dificuldades de se achar uma boa sintonia para o controlador PID. A Figura 4.9 ilustra a trajetória do vetor de estado no interior do Poliedro Invariante formado considerando o termo *feedforward*.

4.3 Caso MIMO 2x2

O objeto de uso para a implementação do caso MIMO 2x2 será um sistema sujeito a restrições de estado e de entrada (Bemporad et al. 2002). Assim, considere a planta:

$$y(t) = \frac{10}{100s + 1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.11)$$

A entrada $u(t)$ está sujeita a restrição de saturação:

$$-1 \leq u_i(t) \leq 1, i = 1, 2. \quad (4.12)$$

E os valores de referência serão:

$$r = [r_1 \ r_2]^T = [0, 63 \ 0, 79]^T \quad (4.13)$$

O sistema representado pela Equação (4.11) foi discretizado com período de amostragem $T_s = 2s$ (Bemporad et al. 2002) obtendo-se a seguinte representação em espaço de estado:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9802 & 0 \\ 0 & 0,9802 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7921 & -0,9901 \\ -0,5940 & 0,7921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.14)$$

Tomando por base as Equações (3.50) e (3.51), chegamos no seguinte modelo de espaço de estado aumentado (sem e com termo *feedforward*, respectivamente):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ v_1[k+1] \\ v_2[k+1] \\ p_1[k+1] \\ p_2[k+1] \\ w_1[k+1] \\ w_2[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{x}_m[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,9802 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9802 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5842 & 1,9802 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1,1880 & -1,5842 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -0,0078 & 0,0098 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0059 & -0,0078 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ p_1[k] \\ p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}_m[k]} + \quad (4.15)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,3961 & -0,4950 \\ -0,2970 & 0,3961 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{u}_m[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (1-\delta_1) & 0 \\ 0 & (1-\delta_2) \end{bmatrix}}_{\tilde{E}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} r_1[k] \\ r_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{r}_m[k]}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_1[k] \\ e_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ -p_1[k] \\ -p_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}_m[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,7921 & 0,9901 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5940 & -0,7921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ p_1[k] \\ p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}_m[k]} \quad (4.16)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_1[k] \\ e_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ -p_1[k] \\ -p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}_m[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,7921 & 0,9901 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5940 & -0,7921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{C}_m} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v_1[k] \\ v_2[k] \\ p_1[k] \\ p_2[k] \\ w_1[k] \\ w_2[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}_m[k]} \quad (4.17)$$

Sujeito às seguintes restrições de estado nos seguintes casos:

- Para o caso com 2 PID's:

$$\begin{aligned} -1 \leq y_1[k] \leq 1 & \quad -700 \leq v_1[k] \leq 700 & \quad -700 \leq p_1[k] \leq 700 & \quad -1 \leq w_1[k] \leq 1 \\ -1 \leq y_2[k] \leq 1 & \quad -700 \leq v_2[k] \leq 700 & \quad -700 \leq p_2[k] \leq 700 & \quad -1 \leq w_2[k] \leq 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

- Para o caso com 4 PID's:

$$\begin{aligned} -1 \leq y_1[k] \leq 1 & \quad -90 \leq v_1[k] \leq 90 & \quad -90 \leq p_1[k] \leq 90 & \quad -1 \leq w_1[k] \leq 1 \\ -1 \leq y_2[k] \leq 1 & \quad -90 \leq v_2[k] \leq 90 & \quad -90 \leq p_2[k] \leq 90 & \quad -1 \leq w_2[k] \leq 1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

- Para o caso 1 ($-1 \leq u_1[k] \leq 1$; $-0,75 \leq u_2[k] \leq 0,75$) com 4 PID's e termo *feed-forward*:

$$\begin{aligned} -1 \leq y_1[k] \leq 1 & \quad -70 \leq v_1[k] \leq 70 & \quad -70 \leq p_1[k] \leq 70 & \quad -1 \leq w_1[k] \leq 1 \\ -1 \leq y_2[k] \leq 1 & \quad -70 \leq v_2[k] \leq 70 & \quad -70 \leq p_2[k] \leq 70 & \quad -1 \leq w_2[k] \leq 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

- Para o caso 2 ($-1 \leq u_1[k] \leq 1$; $-1 \leq u_2[k] \leq 1$) com 4 PID's e termo *feedforward*:

$$\begin{aligned} -1 \leq y_1[k] \leq 1 & \quad -80 \leq v_1[k] \leq 80 & \quad -80 \leq p_1[k] \leq 80 & \quad -1 \leq w_1[k] \leq 1 \\ -1 \leq y_2[k] \leq 1 & \quad -80 \leq v_2[k] \leq 80 & \quad -80 \leq p_2[k] \leq 80 & \quad -1 \leq w_2[k] \leq 1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Na execução de cada teste foram adotados também os seguintes valores:

- Para o caso com 2 PID's: $W_1 = W_2 = 0,8$ e os pesos da função objetivo dados por $w_1 = w_2 = 8$ e $w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$ com $nl = 10$ (número de linhas do Poliedro).
- Para o caso com 4 PID's: $W_1 = W_2 = 0,8$ e os pesos da função objetivo dados por $w_1 = w_2 = 2$ e $w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$ com $nl = 10$.
- Para o caso 1 ($-1 \leq u_1[k] \leq 1$; $-0,75 \leq u_2[k] \leq 0,75$) com 4 PID's e termo *feed-forward*: $W_1 = W_2 = 0,8$ e os pesos da função objetivo dados por $w_1 = w_2 = 0,5$ e $w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$ com $nl = 10$.

- Para o caso 2 ($-1 \leq u_1[k] \leq 1$; $-1 \leq u_2[k] \leq 1$) com 4 PID's e termo *feedforward*: $W_1 = W_2 = 0,8$ e os pesos da função objetivo dados por $w_1 = w_2 = 1$ e $w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$ com $nl = 10$.

Com isso, avalia-se a sintonia em relação aos ganhos dos controladores quando eles estão centralizados (matriz de ganho \bar{K}_m completa) e descentralizados (matriz de ganho \bar{K}_m incompleta). O caso centralizado é quando todas as interações entrada-saída são levadas em consideração. Já o caso descentralizado, considera-se que os pares entrada-saída são desacoplados.

4.3.1 Resultados caso MIMO 2x2

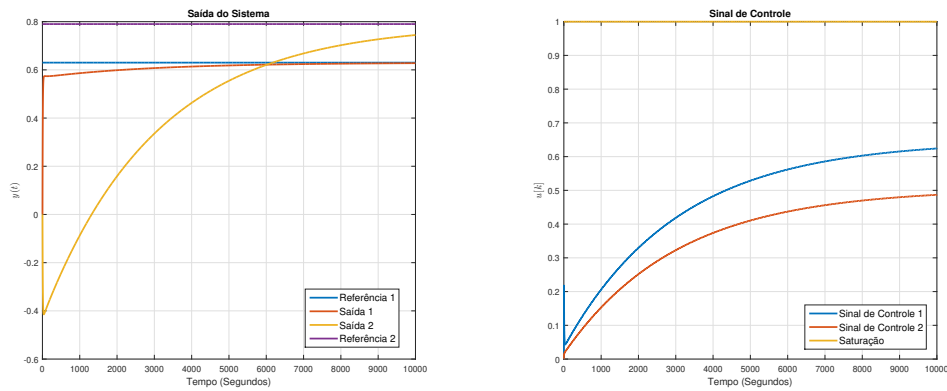
Tabela 4.8: Simulações com 2 e 4 PID's.

TABELA DE PARÂMETROS				
	λ	δ_1	δ_2	F.O
2 PID's	0,9999	0,0000015	0,0000016	$2,4531 \cdot 10^{-5}$
4 PID's	0,9999	0,9695041	0,0000006	1,9390
	K_{p11}	K_{p12}	K_{p21}	K_{p22}
2 PID's	0,3465	0,0000	0,0000	0,0138
4 PID's	0,9997	0,5463	0,0793	0,4371
	K_{i11}	K_{i12}	K_{i21}	K_{i22}
2 PID's	0,0034	0,0000	0,0000	0,0001
4 PID's	1,0042	0,0054	0,7355	0,0043
	K_{d11}	K_{d12}	K_{d21}	K_{d22}
2 PID's	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4 PID's	-0,0819	-0,0910	-0,0654	-0,0727

Fonte: Próprio autor.

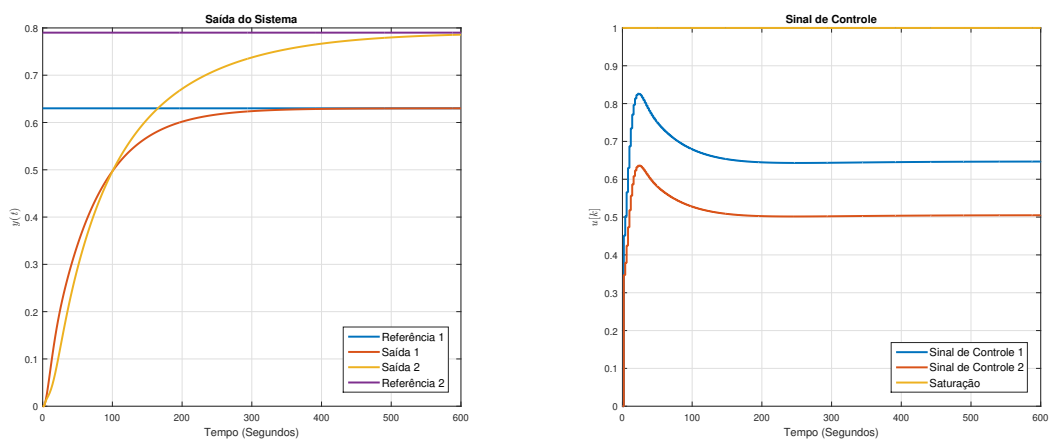
A partir dos resultados expostos na Tabela 4.8 e dos gráficos das Figuras 4.10 e 4.11, verifica-se que, no caso descentralizado (com 2 PID's), assim como visto no caso SISO com 1 PID (sem termo *feedforward*), temos uma resposta com tempo de assentamento muito grande com um sinal de controle de amplitude pequena. Por outro lado, no caso centralizado (com 4 PID's), percebe-se uma melhora significativa na resposta, uma vez que temos um sinal de controle maior no transitório, refletindo diretamente no tempo de assentamento. É possível verificar também, no caso com 2 PID's, que uma das respostas inicia de forma inversa, caracterizando sistemas de fase não mínima. Além disso, pode-se dizer também que, com 4 PID's, foi possível folgar mais os parâmetros de $v[k]$ e $p[k]$ com o objetivo de melhorar o máximo possível a dinâmica do sistema. No trabalho de Bemporad et al. (2002) utilizou-se a técnica MPC (Controle por Modelo Preditivo) para encontrar a sintonia dos controladores. Assim, a técnica proposta neste trabalho forneceu uma resposta bem próxima da técnica MPC utilizada por Bemporad et al. (2002). Na Figura 4.12 é possível notar a trajetória do vetor de estado no interior do Poliedro Invariante para 4 PID's.

Figura 4.10: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 2 PID's para condições da Tabela 4.8.



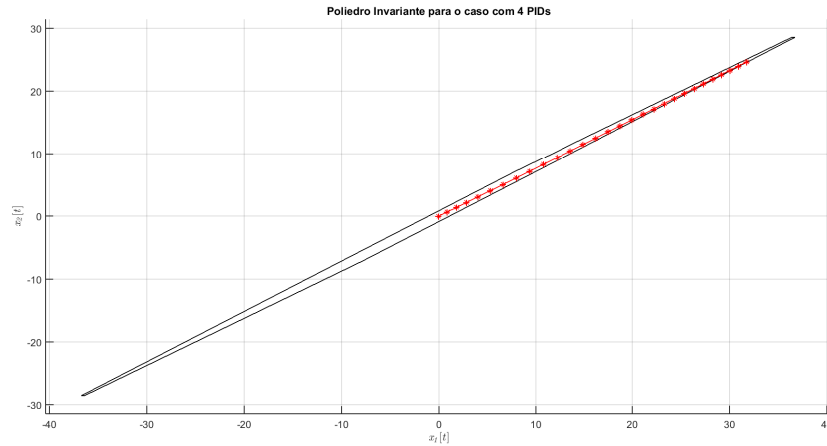
Fonte: Próprio autor.

Figura 4.11: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 4 PID's para condições da Tabela 4.8.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.12: Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso com 4 PID's.



Fonte: Próprio autor.

4.3.2 Resultados com o termo *feedforward*

Caso 1 ($-1 \leq u_1[k] \leq 1$; $-0,75 \leq u_2[k] \leq 0,75$)

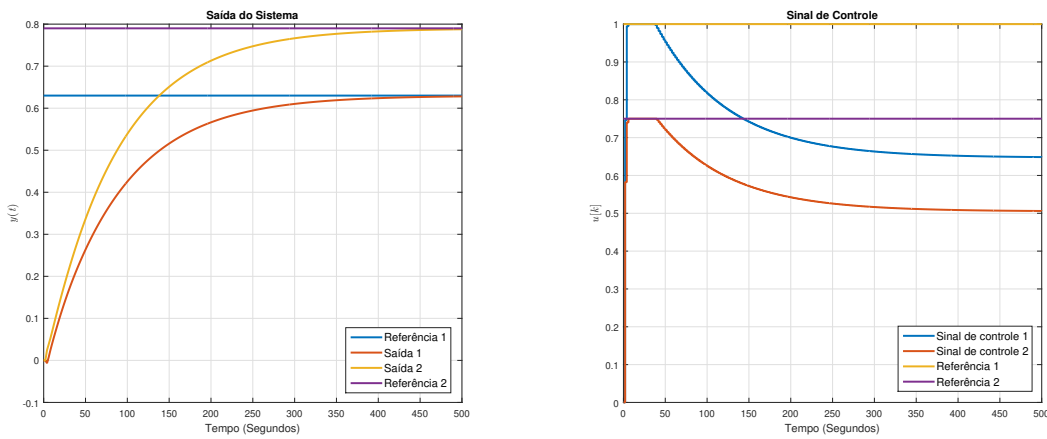
Tabela 4.9: Simulação (para o caso 1) com 4 PID's e termo *feedforward*.

TABELA DE PARÂMETROS			
λ	δ_1	δ_2	F.O
0,9999	0,0000000	0,0000000	$6,1453 \cdot 10^{-16}$
K_{p11}	K_{p12}	K_{p21}	K_{p22}
19,0458	23,6481	12,6832	16,9098
K_{i11}	K_{i12}	K_{i21}	K_{i22}
0,2398	0,2519	0,1595	0,1812
K_{d11}	K_{d12}	K_{d21}	K_{d22}
-0,0002	-0,0021	-0,0003	-0,0042
K_{r11}	K_{r12}	K_{r21}	K_{r22}
-18,5351	-23,1106	-12,3009	-16,4775

Fonte: Próprio autor.

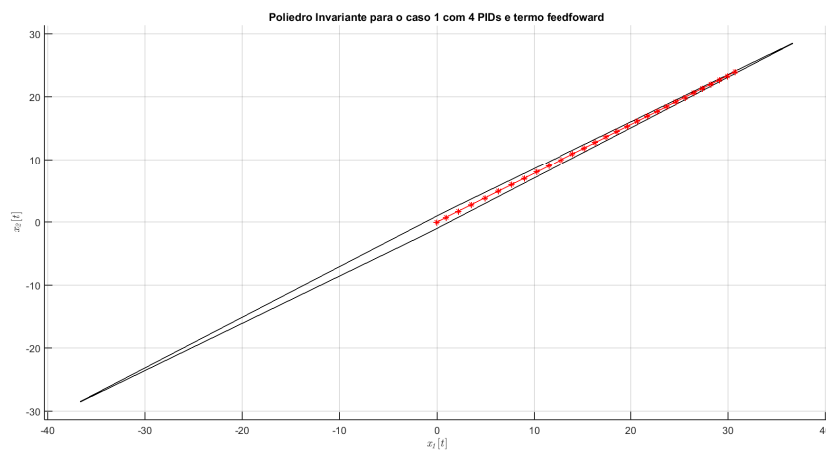
Neste primeiro teste com termo *feedforward* para 4 PID's, analisando a Tabela 4.9 e os gráficos da Figura 4.13 percebe-se uma discreta inversão de uma das respostas caracterizando, novamente, sistemas de fase não mínima. Além disso, verifica-se também que, restringindo os limites de $v[k]$ e $p[k]$, resulta-se num sinal de controle saturado das duas entradas. Contudo, assim como no caso SISO no motor CC, as restrições não foram

Figura 4.13: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 4 PID's e termo *feedforward* para condições da Tabela 4.9.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.14: Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso 1 com 4 PID's e termo *feedforward*.



Fonte: Próprio autor.

violadas. A Figura 4.14 ilustra o Poliedro Invariante com a trajetória do vetor de estado para o caso 1 em questão.

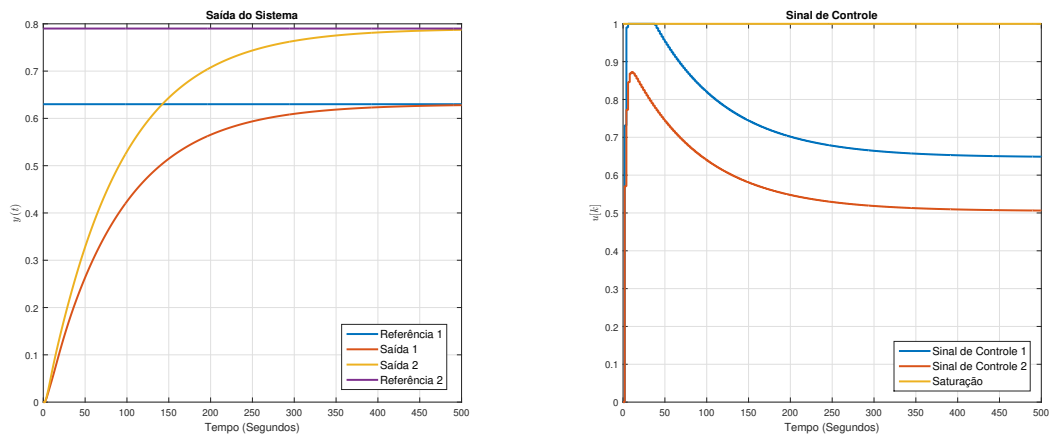
Caso 2 ($-1 \leq u_1[k] \leq 1$; $-1 \leq u_2[k] \leq 1$)

Tabela 4.10: Simulação (para o caso 2) com 4 PID's e termo *feedforward*.

TABELA DE PARÂMETROS			
λ	δ_1	δ_2	F.O
0,9999	0,0000000	0,0000000	$8,4528 \cdot 10^{-10}$
K_{p11}	K_{p12}	K_{p21}	K_{p22}
19,7160	24,6077	14,7288	19,6738
K_{i11}	K_{i12}	K_{i21}	K_{i22}
0,2211	0,2754	0,1649	0,22037
K_{d11}	K_{d12}	K_{d21}	K_{d22}
-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001
K_{r11}	K_{r12}	K_{r21}	K_{r22}
-19,2633	-24,0429	-14,3899	-19,2216

Fonte: Próprio autor.

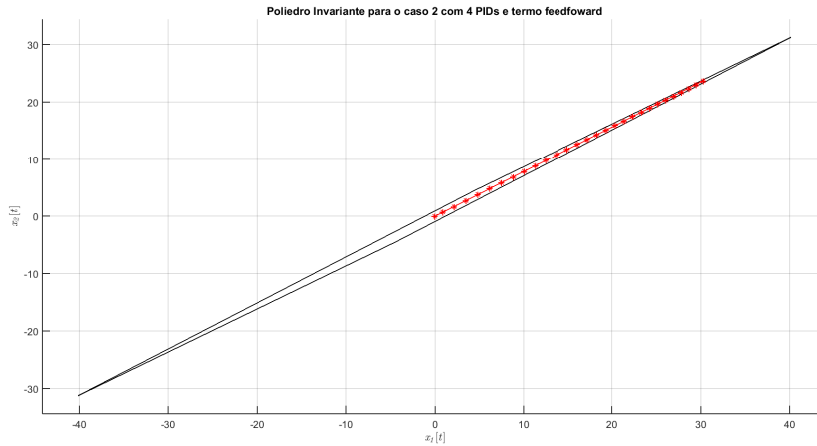
Figura 4.15: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema com 4 PID's e termo *feedforward* para condições da Tabela 4.10.



Fonte: Próprio autor.

Por fim, pelos resultados obtidos na Tabela 4.10 e nos gráficos da Figura 4.15, percebe-se que o sinal de controle de uma das entradas chega a saturação passando um certo tempo e as respostas um pouco mais lentas comparado ao caso 1 anterior. Contudo, é importante

Figura 4.16: Ilustração da trajetória do vetor de estado $[x_1(t) \ x_2(t)]^T$ no interior do Poliedro Invariante para o caso 2 com 4 PID's e termo *feedforward*.



Fonte: Próprio autor.

ressaltar que nenhuma das respostas sofreram inversão. Na Figura 4.16 observa-se a trajetória do vetor de estado no interior do Poliedro Invariante para o caso 2 em questão.

Conclui-se, então, que os ajustes realizados nas restrições associadas a $x[k]$ e $p[k]$, além da inserção do termo *feedforward*, foram de fundamental importância para definir uma sintonia adequada nos casos apresentados. A técnica produziu uma melhor resposta possível se aproximando dos resultados obtidos através da técnica MPC utilizada no trabalho de Bemporad et al. (2002). Assim, como no caso SISO, as restrições na variável controlada foram respeitadas mesmo com a saturação do atuador.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada a aplicação da estratégia de otimização para os casos SISO e MIMO a partir de exemplos numéricos. Em cada caso, foi possível constatar como a dinâmica do sistema muda consideravelmente ao ajustarmos os valores de restrições relativos às variáveis de estado $x[k]$, integral do erro $v[k]$ e derivada da saída $p[k]$. Além disso, foi possível constatar que variando os limites de $u[k]$, o sistema tende a chegar no limite da saturação. No caso do motor CC, também constatou-se que quando o sinal de controle chegou no nível da saturação, o sinal sofreu *overshoot* caracterizando o efeito do *windup*. No caso MIMO 2x2, deve-se ressaltar a importância do termo *feedforward* na melhora da resposta do sistema, considerando o caso centralizado do controlador.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um método de sintonia de controladores PID multivariáveis baseado em otimização para sistemas lineares de tempo discreto sob restrições nas variáveis de saída e saturação dos atuadores. A partir de um modelo de estado do sistema com controlador e da modelagem politópica da saturação, foram derivadas condições para que um poliedro contido no conjunto de restrições seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada. Tais condições foram usadas na formulação de um problema de otimização não-linear cuja solução fornece os ganhos do controlador e um poliedro invariante que garante o respeito às restrições. O uso do filtro para a referência permite a obtenção de poliedros maiores junto com a otimização do tempo de resposta do sistema. A técnica proposta foi ilustrada por meio de simulações numéricas em cima de análises comparativas a partir de modelos SISO e MIMO 2x2.

No primeiro caso SISO, foi usado o modelo de um motor CC utilizado no trabalho de Dantas et al. (2018) onde analisou-se a relação entre parâmetros do problema de otimização e o desempenho dos controladores projetados. Verificou-se também que um ajuste adequado dos parâmetros possibilitou obter uma sintonia que respeitasse as restrições, além do compromisso entre uma resposta rápida e um conjunto de condições iniciais admissíveis de tamanho aceitável. Tal resultado rendeu a publicação de um artigo no Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2022), além da apresentação do mesmo de forma presencial em Teresina - PI.

Tendo em vista que este trabalho aqui realizado foi inspirado no controlador PI de Martins et al. (2020), o segundo caso SISO teve por objetivo comparar os resultados obtidos tanto com o PI, quanto com o PID projetado. Assim, percebe-se o quanto a resposta do sistema melhorou significativamente ao se acrescentar o termo *feedforward*, conforme proposto em dos Santos et al. (2021). Isso significa que este termo, além de atenuar as dificuldades de se achar solução quando aumentamos os limites da variável $w[k]$, ele age com o objetivo de deixar a resposta mais rápida.

Por fim, como já mencionado ao longo do texto, por questões de facilidade, foi escolhido o caso MIMO 2x2 para a aplicação da estratégia de otimização. A técnica pode ser facilmente estendida para o caso $m \times m$ seguindo a mesma ideia apresentada nos capítulos 2 e 3. A partir das simulações e análises apresentadas, constata-se que à medida que se trabalha com sistemas de mais de uma variável, a resposta do sistema é mais adequada quando se trabalha com o caso do PID centralizado (acoplado) comparado ao descentralizado (desacoplado). Contudo, ao mesmo tempo, o termo *feedforward* também acaba

sendo importante para que se possa atingir ganhos que tornem a resposta mais rápida, como aconteceu no caso SISO de Martins et al. (2020) com o PID projetado. Com isso, mesmo os sinais atingindo a saturação em alguns casos, assim como no SISO, as restrições foram respeitadas. Portanto, fica explícita a importância da contribuição deste trabalho para o processo de sintonia de controladores PID aplicados a sistemas multivariáveis sob restrições baseado em otimização tornando possível uma nova abordagem.

Em trabalhos futuros, pretende-se propor uma técnica que possibilite fazer o ajuste automático de alguns parâmetros, bem como estender a aplicação a projetos de controladores PID para sistemas não-lineares representados por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (Dórea et al. 2020) e também estudar uma forma de aproveitar soluções, encontradas pelo *solver* KNITRO (em problemas já resolvidos), como valor inicial facilitador para o algoritmo de busca.

Referências Bibliográficas

- Andrade, A. L., Souza (2010), Sintonia de controladores pid utilizando algoritmos genéticos., Dissertação de mestrado, Instituto Federal Fluminense, Campus-Centro.
- Åström, Karl Johan e Tore Hägglund (1995), *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, ISA - The Instrumentation, Systems and Automation Society.
- Åström, Karl Johan e Tore Hägglund (2001), ‘The future of pid control’, *Control engineering practice* **9**(11), 1163–1175.
- Bak, Martin (2000), Control of systems with constraints, Tese de doutorado, Technical University of Denmark, Department of Automation.
- Bemporad, Alberto, Manfred Morari, Vivek Dua e Efstratios N Pistikopoulos (2002), ‘The explicit linear quadratic regulator for constrained systems’, *Automatica* **38**(1), 3–20.
- Blanchini, Franco (1999), ‘Set invariance in control’, *Automatica* **35**(11), 1747–1767.
- Blanchini, Franco e Stefano Miani (2015a), Set-theoretic estimation, em ‘Set-Theoretic Methods in Control’, Springer, pp. 527–551.
- Blanchini, Franco e Stefano Miani (2015b), *Set-theoretic methods in control*, 2ª edição, Birkhäuser.
- Brião, Stephanie L., Eugênio B. Castelan, Eduardo Camponogara e Jackson G. Ernesto (2021), ‘Output feedback design for discrete-time constrained systems subject to persistent disturbances via bilinear programming’, *Journal of the Franklin Institute* **358**(18), 9741–9770.
- Brião, Stephanie L, Matheus VA Pedrosa, Eugênio B Castelan, Eduardo Camponogara e Leonardo S de Assis (2018), Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral lyapunov functions, em ‘2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)’, IEEE, pp. 1–6.
- Cabral, Eduardo Lobo Lustosa (2016), ‘Transformação entre as formas espaço dos estados e função de transferência’.
URL: <http://sites.poli.usp.br/d/pmr2400/>

- Castelan, Eugênio B e Jean-Claude Henet (1992), 'Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems', *Automatica* **28**(3), 605–611.
- Castrucci, A. Bittar, R. M. Sales (2011), *Controle Automático*, 1ª edição, GEN/LTC, Rio de Janeiro.
- Dantas, Amanda Danielle O da S, André Felipe O de A Dantas, João Tiago LS Campos, Domingos L de Almeida Neto e Carlos Eduardo T Dórea (2018), 'Pid control for electric vehicles subject to control and speed signal constraints', *Journal of Control Science and Engineering* **2018**.
- Dorea, Carlos Eduardo Trabuco e JC Henet (1999), '(a, b)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems', *Journal of optimization theory and applications* **103**(3), 521–542.
- dos Santos, Geovana A. França, Eugenio B. Castelan e Jackson G. Ernesto (2021), 'Pi-controller design for constrained linear systems using positive invariance and bilinear programming, em '2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)', pp. 1–7.
- Dórea, Carlos E.T., Eugenio B. Castelan e Jackson G. Ernesto (2020), 'Robust positively invariant polyhedral sets and constrained control using fuzzy t-s models: a bilinear optimization design strategy', *IFAC-PapersOnLine* **53**(2), 8013–8018. 21st IFAC World Congress.
- Felipe Conceição, Wesley Beccaro e João Justo (2019), 'Ensinando métodos de discretização para projeto de sistemas de controle: Comparação de controladores pid em sistemas embarcados', *Journal of Applied Instrumentation and Control* **7**(2), 8–16.
- Gropp, W e JJ Moré (1997), 'Optimization environments and the neos server. approximation theory and optimization, md buhmann and a. iserles, eds'.
- Hadley, George (1982), *Programação linear*, Guanabara Dois.
- Johnson, Michael A e Mohammad H Moradi (2005), 'Pid control [electronic resource]: New identification and design methods'.
- Levine, WS (1996), 'The control handbook. boca raton, fl; new york: Crc'.
- Mancini, Ana Theresa Fernandes de Oliveira (2021), Controle por realimentação de saída de sistemas lineares sob restrições com redução do conjunto terminal, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- Martins, José KEC, Fábio MU Araújo e Carlos ET Dórea (2020), Um método baseado em otimização para sintonia de controladores pi para sistemas sujeitos a restrições, em 'Congresso Brasileiro de Automática-CBA', Vol. 2.

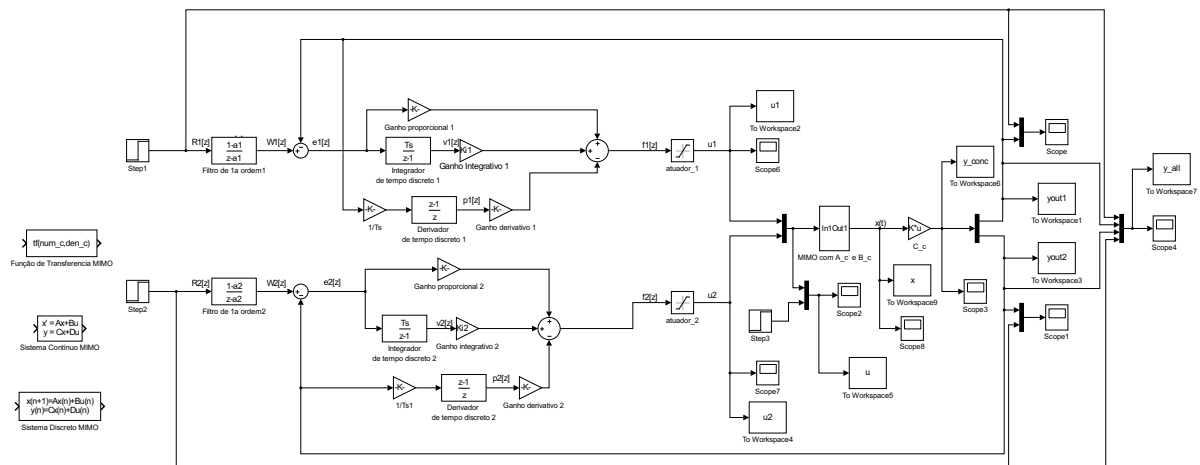
- Milani, Basílio EA e Andréa N Carvalho (1995), ‘Robust linear regulator design for discrete-time systems under polyhedral constraints’, *Automatica* **31**(10), 1489–1493.
- Milani, Basílio EA e Carlos ET Dórea (1996), ‘On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances’, *Automatica* **32**(5), 785–789.
- Ogata, Katsuhiko (2010), *Engenharia de controle moderno*, 5ª edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo.
- Pedrosa, M.V.A. (2018), Invariância positiva de domínios poliédricos para sistemas lineares na perspectiva do operador delta, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).
- Silva, Guillermo J, Aniruddha Datta e Shankar P Bhattacharyya (2005), *PID controllers for time-delay systems*, Vol. 43, Springer.
- Tarbouriech, Sophie, Germain Garcia e Adolf H Glattfelder (2007), *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*, Vol. 346, Springer.
- Tarbouriech, Sophie, Germain Garcia, João Manoel Gomes da Silva Jr e Isabelle Queinnec (2011), *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*, Springer Science & Business Media.
- Tchamna, Rodrigue e Moonyong Lee (2018), ‘Analytical design of an industrial two-term controller for optimal regulatory control of open-loop unstable processes under operational constraints’, *ISA transactions* **72**, 66–76.
- Ziegler, John G, Nathaniel B Nichols et al. (1942), ‘Optimum settings for automatic controllers’, *trans. ASME* **64**(11).
- Åström & Hägglund (2005), *Advanced PID Control*, 1ª edição, ISA, Research Triangle Park, NC 27709.

Apêndice A

Esquemáticos criados no simulink

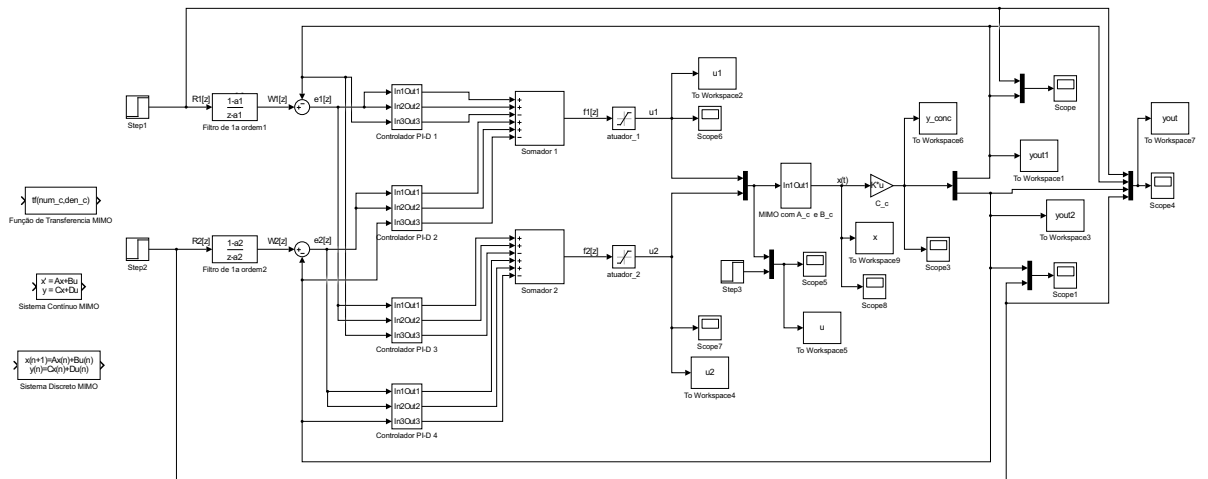
A.1 Estrutura MIMO 2x2 com 2 controladores PID

Figura A.1: Esquemático 1



A.2 Estrutura MIMO 2x2 com 4 controladores PID

Figura A.2: Esquemático 2



A.3 Estrutura MIMO 2x2 com 4 controladores PID e termo *feedforward*

Figura A.3: Esquemático 3

