

02

EFEITOS DE CAMPOS ALEATÓRIOS  
E DE ANISOTROPIAS EM  
VIDROS DE SPINS

Selma Rozane Vieira

Natal/1999

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial à obtenção do grau de doutor em Física

**Orientador: Prof. Dr. Fernando Dantas Nobre**

## Agradecimentos

Ao Prof. Fernando Dantas Nobre, pelo empenho, dedicação e paciência ao longo da orientação deste trabalho;

Ao Prof. Francisco Alexandre da Costa, pelas valiosas discussões e contribuições.

Aos Profs. Carlos Seihibi Orii Yokoi e Sílvio Roberto Salinas, pelas importantes discussões durante o período que permaneci no Instituto de Física da Universidade de São Paulo;

À Ana Lúcia Dantas, pelas discussões, apoio, compreensão, incentivo, e pela grande amizade.

Aos colegas da Pós-Graduação do DFTE, pela amizade e agradável convivência durante a minha permanência neste departamento;

Aos colegas da Pós-Graduação do Departamento de Física Geral da USP pela, boa convivência durante minha estadia naquela instituição;

Aos funcionários do DFTE, em particular, à Nalva de Araújo Lima;

À CAPES, pelo apoio financeiro, que foi sem dúvida de fundamental importância.

Natal/RN

Junho, 1999

*Selma Rozane Vieira*

# Resumo

Modelos de vidros de spins, dos tipos Ising e  $m$ -vetorial, com interações de alcance infinito, são estudados através do método das réplicas. Inicialmente, o vidro de spins  $m$ -vetorial, na presença de um campo magnético externo uniforme e de campos de anisotropias uniaxiais, é considerado. Os efeitos das anisotropias nos diagramas de fases e, em particular, na linha de Gabay-Toulouse, que sinaliza o ordenamento dos graus de liberdade de vidro de spins transversos, são investigados. As modificações na linha de Gabay-Toulouse, devido à presença de campos de anisotropia que privilegiam orientações segundo os eixos cartesianos ( $m = 2$ : anisotropia planar;  $m = 3$ : anisotropia cúbica), também são estudadas. O vidro de spins de Ising com favorecimento antiferromagnético, na presença de campos magnéticos uniforme e aleatório obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussiana, é investigado através de uma generalização do modelo Sherrington-Kirkpatrick em duas subredes. Os efeitos da aleatoriedade no campo magnético sobre os diagramas de fases do modelo são analisados. Algumas confrontações entre resultados deste trabalho e medidas experimentais existentes na literatura são discutidas.

# Abstract

Ising and  $m$ -vector spin-glass models are studied, in the limit of infinite-range interactions, through the replica method. First, the  $m$ -vector spin glass, in the presence of an external uniform magnetic field, as well as of uniaxial anisotropy fields, is considered. The effects of the anisotropies on the phase diagrams, and in particular, on the Gabay-Toulouse line, which signals the transverse spin-glass ordering, are investigated. The changes in the Gabay-Toulouse line, due to the presence of anisotropy fields which favor spin orientations along the Cartesian axes ( $m = 2$ : planar anisotropy;  $m = 3$ : cubic anisotropy), are also studied. The antiferromagnetic Ising spin glass, in the presence of uniform and Gaussian random magnetic fields, is investigated through a two-sublattice generalization of the Sherrington-Kirkpatrick model. The effects of the magnetic-field randomness on the phase diagrams of the model are analysed. Some confrontations of the present results with experimental observations available in the literature are discussed.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vidro de Spins <math>m</math>-Vetorial na Presença de Anisotropias Uniaxiais</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	O Modelo . . . . .	9
2.3	A Solução com Simetria entre Réplicas . . . . .	12
2.4	Diagramas de Fases . . . . .	15
2.4.1	Caso $D_1 \neq 0$ ; $D_2 = 0$ . . . . .	15
2.4.2	Caso $D_1 > 0$ ; $ D_2  < D_1$ . . . . .	23
2.5	Conclusões . . . . .	38
<b>3</b>	<b>O Vidro de Spins <math>m</math>-Vetorial na Presença de uma Anisotropia Cúbica</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	39
3.2	O Modelo e a Solução com Simetria entre Réplicas . . . . .	40
3.3	Diagramas de Fases . . . . .	43
3.4	Conclusões . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Efeitos de Campo Aleatório no Vidro de Spins de Ising Antiferromagnético</b>	<b>47</b>
4.1	Introdução . . . . .	47
4.2	O Modelo . . . . .	49
4.3	A Solução com Simetria entre Réplicas . . . . .	51
4.4	Diagramas de Fases . . . . .	52
4.4.1	Caso $H = 0$ e $\sigma = 0$ . . . . .	53

4.4.2	Caso $H = 0$ e $\sigma > 0$ . . . . .	54
4.4.3	Caso $H \neq 0$ e $\sigma \neq 0$ . . . . .	57
4.5	Conclusões . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>Comportamento em Baixas Temperaturas da Linha Gabay-Toulouse</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Expansões em Altas Temperaturas para o Vidro de Spins <math>m</math>-Vetorial</b>	<b>69</b>
B.1	Caso ( $J_0 = 0 ; h \neq 0$ ) . . . . .	69
B.2	Caso ( $J_0 \neq 0 ; h = 0 ; D_2 = 0$ ) . . . . .	74
<b>C</b>	<b>Expansões em Baixas Temperaturas para o Vidro de Spins <math>m</math>-Vetorial</b>	<b>76</b>
<b>D</b>	<b>Análise de Estabilidade da Solução com Simetria entre Réplicas para o Vidro de Spins Antiferromagnético</b>	<b>82</b>
<b>E</b>	<b>Fronteira Paramagnética-Antiferromagnética para o Vidro de Spins Antiferromagnético</b>	<b>87</b>
	<b>Referências</b>	<b>90</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de fases no plano campo de anisotropia $D_1$ versus temperatura (em unidades de $J$ ) para o vidro de spins de Heisenberg. As fases exibidas são: Paramagnética (P), Vidro de Spins Longitudinal (VS1) e Vidro de Spins Misto (VS2). . . . .	17
2.2	Diagrama de fases no plano $T$ versus $J_0$ (em unidades de $J$ ) para o vidro de spins $m$ -vetorial ( $m = 3$ ), com $D_1 = 0.3J$ . As fases mostradas são: Paramagnética (P), Ferromagnéticas (F1,F2), Ferromagnética-Mista (F3), Vidro de Spins Longitudinal (VS1) e Vidro de Spins Misto (VS2). A linha pontilhada representa a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas. . . .	19
2.3	Diagrama de fases para o vidro de spins de Heisenberg com $D_1 = 0.4J$ , mostrando as fases Paramagnética (P), Ferromagnética estável (F1), Ferromagnética instável (F2) e Vidro de Spins Longitudinal (VS1). A linha pontilhada representa a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas.	20
2.4	Linhas Gabay-Toulouse, no plano campo magnético versus temperatura, para valores fixos do campo de anisotropia uniaxial $D_1$ . A curva pontilhada representa a linha GT no caso $D_1 = 0$ (Gabay e Toulouse, 1981). . . . .	22
2.5	Diagramas de fases para diferentes valores de $m$ , mostrando o mesmo comportamento qualitativo da figura 2.4; (a) $m = 2$ ; (b) $m = 4$ . . . . .	24
2.6	As linhas GT no plano $h$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg, com valores simétricos (positivos e negativos) do campo de anisotropia $D_1$ . A curva pontilhada representa a linha GT com $D_1 = 0$ (Gabay e Toulouse, 1981). . . . .	25
2.7	Diagrama de fases tri-dimensional para o vidro de spins de Heisenberg na presença de uma anisotropia uniaxial ( $D_1 > 0$ ). . . . .	26



2.8	Diagrama de fases no plano $D_1$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), do vidro de spins de Heisenberg, para uma escolha típica do campo de anisotropia de segunda ordem, $D_2 = 0.1D_1$ . A linha pontilhada refere-se ao caso $D_2 = 0$ . . . . .	28
2.9	Diagrama de fases no plano $D_1$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), do vidro de spins de Heisenberg, para uma escolha típica do campo de anisotropia de segunda ordem, $D_2 = -0.1D_1$ . A linha pontilhada refere-se ao caso $D_2 = 0$ . . . . .	29
2.10	Diagrama de fases no plano $D_1$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), do vidro de spins de Heisenberg, para uma escolha típica do campo de anisotropia de segunda ordem, $D_2 = 0.2D_1$ . A linha pontilhada refere-se ao caso $D_2 = 0$ . . . . .	30
2.11	Fronteira crítica P-VS1 no plano $D_1$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg, com diversos valores de $D_2$ . A linha pontilhada corresponde ao caso $D_2 = 0$ . . . . .	31
2.12	As linhas GT no plano $h$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa $D_1$ e $D_2$ , com $D_2 = D_1/3$ . A linha pontilhada corresponde ao caso $D_1 = D_2 = 0$ . . . . .	32
2.13	As linhas GT no plano $h$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa $D_1$ e $D_2$ , com $D_2 = -D_1/5$ . A linha pontilhada corresponde ao caso $D_1 = D_2 = 0$ . . . . .	33
2.14	As linhas GT no plano $h$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa $D_1$ e $D_2$ , com $D_2 = -D_1/3$ . A linha pontilhada corresponde ao caso $D_1 = D_2 = 0$ . . . . .	34
2.15	As linhas GT no plano $h$ versus $T$ (em unidades de $J$ ), para a vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa $D_1$ e $D_2$ , com $D_2 = -D_1/2$ . A linha pontilhada corresponde ao caso $D_1 = D_2 = 0$ . . . . .	35
2.16	O campo magnético versus a temperatura do pico da suscetibilidade magnética, para o vidro de spins $Al_{63}Gd_{37}$ (Barbara e Malozemoff, 1983). . . . .	36
2.17	A temperatura do pico do espectro de flutuações na resistência elétrica versus o campo magnético, para o vidro de spins $Ni_{77}Mn_{23}$ (Keener e Weissman, 1996). . . . .	37

3.1	Linhas de Gabay-Toulouse para o vidro de spins $m$ -vetorial ( $m = 2$ ) na presença de uma anisotropia planar. Apresentamos as linhas GT para valores distintos do campo de anisotropia: $D/J = \pm 0.3$ e $D/J = \pm 1.0$ . A curva pontilhada representa a linha GT para $D/J = 0$ . . . . .	44
3.2	Linhas de Gabay-Toulouse para o vidro de spins $m$ -vetorial ( $m = 3$ ) na presença de um campo de anisotropia cúbica. Os valores do campo de anisotropia são: $D/J = 0.3$ , e $0.5$ . A curva pontilhada representa a linha GT para $D/J = 0$ . . . . .	45
4.1	Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising antiferromagnético, no plano temperatura <i>versus</i> interação média (em unidades de $\sqrt{J'^2 + J^2}$ ; $t = T/\sqrt{J'^2 + J^2}$ , $j = (J_0 + J'_0)/\sqrt{J'^2 + J^2}$ ). As várias fases são: Paramagnética (P), Antiferromagnética (AF), Vidro de Spins (VS) e Antiferromagnética Mista (AF'). A linha pontilhada representa a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas. . . . .	55
4.2	Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising antiferromagnético na presença de um campo aleatório gaussiano, para $\sigma_0 = 0.5$ e $\sigma_0 = 1.0$ ( $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{J'^2 + J^2}$ ). As linhas pontilhadas representam em cada caso, a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas. A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases, assim como as unidades de temperatura e interação média, são as mesmas definidas na figura 4.1. . . . .	56
4.3	Diagramas de fases no plano temperatura <i>versus</i> campo magnético para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético, na presença de um campo aleatório gaussiano, com interações intra-subredes nulas. (a) $\sigma = 0.3J$ , $J_0 = 1.2J$ ; (b) $\sigma = 0.4J$ , $J_0 = 1.25J$ . Para comparação, exibimos também os casos $\sigma = 0$ (Korenblit e Shender, 1985). As linhas pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linha AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1. . . . .	58

- 4.4 Diagrama de fases no plano temperatura *versus* campo magnético para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético, na presença de um campo aleatório gaussiano, com as interações intra-subredes nulas, para o caso  $\sigma = 0.5J$ ,  $J_0 = 1.4J$ . Para comparação, exibimos também o caso  $\sigma = 0$  (Korenblit e Shender, 1985). As linhas pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1. . . . . . 59
- 4.5 Diagramas de fases para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético inter-subredes e ferromagnético intra-subredes na presença de um campo aleatório gaussiano (com temperatura e campo magnético em unidades tais que  $J'_0 + J_0 = 1$ ). A escolha dos parâmetros são: (a)  $J'/J = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$ ,  $J'_0 = J_0 = 0.5$  e  $\sigma = J$ ; (b)  $J'/J = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$ ,  $J'_0 = 0.3$ ,  $J_0 = 0.7$  e  $\sigma = J$ . Para comparação, exibimos também os caso  $\sigma = 0$  (Fyodorov *et al.*, 1987b). As linha pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1. . . . . . 60
- 4.6 Diagrama de fases para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético inter-subredes e ferromagnético intra-subredes na presença de um campo aleatório gaussiano (com temperatura e campo magnético em unidades tais que  $J'_0 + J_0 = 1$ ). A escolha dos parâmetros são:  $J'/J = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$ ,  $J'_0 = 0.7$ ,  $J_0 = 0.3$  e  $\sigma = J$ . Para comparação, exibimos também o caso  $\sigma = 0$  (Fyodovov *et al.*, 1987b); na região sombreada, as diversas fases são matematicamente estáveis, correspondendo a mínimos locais da energia livre (a bola preta sugere a existência de um ponto tricrítico, abaixo do qual uma linha de transição de primeira ordem, no interior da região sombreada, está presente). As linhas pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1. . . . . . 61

# Capítulo 1

## Introdução

Os sistemas magnéticos desordenados são de grande interesse em física da matéria condensada. Um destaque especial tem sido dado aos chamados “Vidros de Spins” (VS), os quais vêm sendo bastante estudados, desde o início da década de 70, tanto do ponto de vista teórico, como experimental. Muitos dos resultados e motivações relacionados aos VS são abordados em artigos de revisão e livros (Chowdhury, 1986; Binder e Young, 1986; Mézard *et al.*, 1987; Fischer e Hertz, 1991; Young, 1997).

Um marco na área de vidro de spins ocorreu com a experiência de Cannella e Mydosh (1972). Eles observaram que a suscetibilidade magnética em ligas metálicas do tipo AuFe e CuMn apresentava uma cúspide acentuada, em uma dada temperatura  $T_c$  (onde  $T_c$  seria supostamente a temperatura de transição entre uma fase desordenada para a fase ordenada), sugerindo a ocorrência de uma transição de fases. Trabalhos experimentais subsequentes revelaram anomalias em outras propriedades físicas, com alguns fenômenos não comuns nas transições de fases tradicionais; como exemplos, podemos citar um máximo arredondado no calor específico para temperaturas ligeiramente acima de  $T_c$  (Wenger e Keeron, 1976) e o fenômeno de remanência para  $T < T_c$ , onde a suscetibilidade de uma dada amostra medida na presença de um campo magnético  $H$  apresenta resultados diferentes, dependendo se a mesma é resfriada na presença do campo (field-cooled) ou na ausência de campo (zero-field-cooled) (Nagata *et al.*, 1979). Estes fenômenos não se limitam apenas às ligas metálicas construídas pela diluição de impurezas magnéticas, tipo Fe, Mn, Cr (da ordem de 1 a 10%) em uma matriz não magnética, tipo Au, Cu, Ag (tais ligas

são denominadas de vidros de spins canônicos ou metálicos), mas também são comuns a compostos não metálicos, tipo  $\text{Fe}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Cl}_2$ ,  $\text{Eu}_{1-x}\text{Gd}_x\text{S}$ ,  $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}$ , (vidros de spins isolantes) assim como a sistemas, tais como compostos amorfos, ligas com impurezas de terras raras e ferroelétricos desordenados.

As medidas das propriedades citadas acima não são suficientes para caracterizar uma transição de fases genuína, uma vez que os resultados das medidas variam lentamente com o tempo de observação. A transição de vidro de spins só foi consensualmente aceita após medidas da suscetibilidade não linear  $\chi_{nl}$  (Chikazama *et al.*, 1979), a qual corresponde ao coeficiente da potência  $-h^3$  na expansão da magnetização em potências do campo magnético externo,

$$m = \chi h - \chi_{nl} h^3 + \dots \quad (1.1)$$

A suscetibilidade não linear  $\chi_{nl}$  é uma função mais bem comportada no tempo, apresentando uma divergência pronunciada em  $T = T_c$ , comparável à divergência observada na suscetibilidade linear  $\chi$  em sistemas ferromagnéticos.

Nas ligas metálicas do tipo AuFe e CuMn, os átomos magnéticos estão bastantes diluídos ocupando posições aleatórias na rede cristalina da matriz não magnética. Contudo, tais átomos são suficientes para que existam interações entre eles, mediadas por elétrons de condução dos íons não magnéticos. Esta interação de troca indireta, chamada de interação RKKY (Rudermann e Kittel, 1954; Kasuya, 1956; Yosida, 1957), apresenta um comportamento oscilatório com a distância  $r_{ij}$  entre os spins situados nos sítios  $i$  e  $j$ , decaindo rapidamente com a distância. Quando as interações entre os pares de spins são positivas, elas favorecem alinhamentos paralelos, enquanto que acoplamentos negativos favorecem alinhamentos antiparalelos. Como consequência da competição entre tais interações, o estado de baixas temperaturas é caracterizado por um congelamento das variáveis de spins em direções aleatórias, sendo então denominado de fase de vidro de spins.

O estado VS origina-se de dois ingredientes essenciais: frustração e desordem. A desordem provoca uma perda de invariância translacional existente nos sistemas cristalinos, enquanto que a frustração significa contradição nas interações, resultando na inexistência de uma configuração de spins unicamente favorecida por todas as interações. As frus-

trações implicam em diferentes configurações, todas com a mesma energia, conduzindo a um estado fundamental da fase VS altamente degenerado, além da existência de inúmeros estados metaestáveis.

Com o objetivo de estudar os vidros de spins, Edwards e Anderson (EA) (1975) propuseram um modelo com interações de curto alcance onde a aleatoriedade na posição dos íons magnéticos foi substituída por uma aleatoriedade nas ligações. O modelo EA é definido numa rede regular de  $N$  sítios com um vetor spin  $\vec{S}_i$  em cada sítio  $i$ . O hamiltoniano que descreve o modelo é dado por

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad , \quad (1.2)$$

onde a soma  $\sum_{\langle ij \rangle}$  aplica-se aos pares de spins primeiros vizinhos. A desordem pode ser introduzida através de uma distribuição de probabilidades associada às constantes de acoplamento  $J_{ij}$ , implicando que devemos efetuar uma média sobre a desordem na energia livre do sistema (média temperada). Em geral, espera-se que as propriedades macroscópicas não variem de uma amostra para outra, ou seja, não devem depender dos detalhes da distribuição de probabilidades dos  $J_{ij}$ , mas apenas de suas propriedades globais, como desvio padrão e média. Edwards e Anderson postularam que na fase VS cada momento magnético aponta em média em uma dada direção, que varia de sítio para sítio. Eles introduziram o parâmetro de ordem ( $q_{EA}$ ) para caracterizar a fase vidro de spins,

$$q_{EA} = \frac{1}{N} \sum_i [\langle S_i \rangle_T^2]_J \quad , \quad (1.3)$$

onde  $\langle \dots \rangle_T$  e  $[\dots]_J$  representam respectivamente, médias térmicas e sobre a desordem. A fase VS é caracterizada por magnetização total nula e por  $q_{EA} \neq 0$ . O modelo EA, embora possua uma formulação teórica relativamente simples, enfrenta dificuldades matemáticas na realização das médias, principalmente devido às interações de curto alcance.

Um modelo mais simples, com interações de alcance infinito e variáveis de spins de Ising, foi proposto por Sherrington e Kirkpatrick (SK) (1975). No modelo SK as constantes de acoplamento  $J_{ij}$  obedecem uma distribuição de probabilidades  $P(J_{ij})$ , que é imposta como sendo a mesma para todos os pares de spins. O modelo SK representa uma aproximação de campo médio para o modelo EA. A solução do modelo SK, foi obtida

através do método das réplicas, no qual o logaritmo da função de partição  $Z$  é avaliado através da função de partição  $Z^n$ , associada a  $n$  cópias independentes (réplicas) do sistema original. Este método, utiliza a identidade

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (Z^n - 1) \quad . \quad (1.4)$$

A solução proposta por SK, conhecida como aproximação de simetria entre réplicas, consiste na caracterização da fase VS através de um único parâmetro de ordem, explicando satisfatoriamente o comportamento dos vidros de spins em altas temperaturas; entretanto, tal solução apresenta sérios problemas em baixas temperaturas e, em particular, uma entropia negativa em  $T = 0$ . Posteriormente, de Almeida e Thouless (AT) (1978) constataram que a solução proposta por Sherrington e Kirkpatrick era instável em toda a fase VS, mostrando que esta instabilidade era uma consequência da hipótese de simetria entre as réplicas. A solução utilizada por SK é instável (tanto na ausência, como na presença de campo magnético externo) abaixo de uma certa curva, conhecida como linha AT. Segundo AT, a região do diagrama de fases abaixo desta linha (que inclui toda a fase VS) deveria ser corretamente descrita por uma quebra da simetria entre réplicas, ou seja, por um conjunto de parâmetros de ordem, ao invés de um único parâmetro. Diversas tentativas, levando em conta a quebra de simetria entre réplicas, foram consideradas por vários autores sem sucesso (Bray e Moore, 1978, 1979; Pytte e Rudnick, 1979; Blandin *et al.*, 1980). Contudo, a solução estável ao longo da fase VS para o modelo SK foi proposta por Parisi (1979, 1980a). Esta solução é caracterizada por uma função parâmetro de ordem contínua  $q(x)$  (ou seja, um número infinito de parâmetros de ordem), definida no intervalo  $[0,1]$ , estando associada a uma multiplicidade de estados a baixas temperaturas. A interpretação física para esta função parâmetro de ordem foi proposta em trabalhos posteriores (Parisi, 1983; Mézard *et al.*, 1984) de tal forma que a derivada

$$\frac{dx}{dq} = P(q) \quad , \quad (1.5)$$

onde  $P(q)$  representa a probabilidade de encontrar dois estados com um conjunto de magnetizações de sítios apresentando uma superposição ("overlap") igual a  $q$ . Hoje, acredita-se ser esta a solução correta para o modelo SK, satisfazendo aos testes de estabilidade (De Dominicis e Kondor, 1983; Thouless *et al.*, 1980).

Atualmente uma grande controvérsia existe no que diz respeito à aplicabilidade das propriedades previstas pela teoria de campo médio dos VS (modelo SK) para a descrição de sistemas reais. Uma teoria alternativa, baseada no formalismo de grupo de renormalização para VS (McMillan, 1984, 1985; Bray e Moore, 1984), foi proposta por Fisher e Huse (1986, 1988a,b), conhecida como “modelo de gotas” (*droplet model*); seus resultados diferem radicalmente dos obtidos a partir da solução de campo médio. Segundo o modelo da gota, os vidros de spins com interações de curto alcance em redes de Bravais  $d$ -dimensionais ( $d$  finito, porém acima da dimensão crítica inferior) devem apresentar uma fase VS com apenas dois estados fundamentais, relacionados entre si através de uma simetria por inversão (em analogia ao que acontece em sistemas ferromagnéticos). Este modelo, que é proposto para qualquer dimensão finita, deve falhar à medida que a dimensão aumenta, quando espera-se uma predominância do comportamento descrito por campo médio. Resultados obtidos através de simulações numéricas para  $d > 3$  (Reger *et al.*, 1990; Grannan e Hertzell, 1991; Parisi e Ritort, 1993; Ciria *et al.*, 1993) são contrários ao modelo da “gota”, sendo favoráveis ao modelo SK. Contudo, a situação permanece em aberto no que diz respeito ao caso  $d = 3$  (Caracciolo *et al.*, 1990a,b; Berg *et al.*, 1994; Young, 1997)

Embora a teoria de campo médio para os VS de Ising esteja hoje bem estabelecida, através do modelo SK, sua generalização para outras variáveis de spins apresenta novas questões. Nos modelos que incluem variáveis de spins contínuas, conhecidos como vidros de spins  $m$ -vetoriais, a presença de um campo magnético externo provoca uma instabilidade na solução com simetria entre réplicas (análoga à instabilidade AT para o modelo SK) abaixo da linha Gabay-Toulouse (GT) (1981), quando ocorre um ordenamento dos graus de liberdade de vidros de spins transversos à direção do campo. Contudo, as soluções de Parisi destes modelos apresentam uma semelhança qualitativa às do modelo SK. Para modelos com variáveis discretas, como no caso dos vidros de spins de Potts (Elderfield e Sherrington, 1983b; Goldbart e Elderfield, 1985; Nobre e Sherrington, 1986, 1989) e quadrupolares (Goldbart e Sherrington, 1985), mudanças qualitativas foram observadas nas funções de Parisi, em relação àquelas obtidos para os modelos com variáveis contínuas, como por exemplo, descontinuidades nas funções parâmetros de ordem.



Dentre os vários modelos de vidros de spins com interações de alcance infinito estudados através do formalismo de réplicas, podemos destacar, como de interesse para o presente trabalho, aqueles que incluem efeitos de campos aleatórios e de anisotropias. No modelo de vidro de spins  $m$ -vetorial, alguns dos efeitos de uma anisotropia uniaxial foram estudados por Cragg e Sherrington (1982), assim como por Roberts e Bray (1982), dentro da aproximação de simetria entre réplicas. Entretanto, as modificações na linha GT devido a tais campos de anisotropia só foram investigadas recentemente (Vieira *et al.*, 1998, 1999a). Paralelamente aos vidros de spins, os sistemas ferromagnéticos na presença de campos aleatórios têm sido bastante investigados nas últimas décadas (Belanger, 1992; Young, 1997). Os modelos com campos magnéticos aleatórios surgiram com o trabalho de Imry e Ma (1975); embora campos aleatórios não possam ser gerados diretamente em laboratório, Fishman e Aharony (1979), assim como Cardy (1984), mostraram que antiferromagnetos diluídos, na presença de um campo magnético uniforme, fornecem realizações experimentais desses sistemas (Belanger, 1992). Entretanto, existem diversos sistemas na natureza, como por exemplo, os antiferromagnetos diluídos  $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$  (Montenegro *et al.*, 1991; Belanger *et al.*, 1991) e  $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$  (Bertrand *et al.*, 1982; zen Wong *et al.* 1985a,b), assim como o composto antiferromagnético misto  $\text{Fe}_x\text{Mn}_{1-x}\text{TiO}_3$  (Yoshizawa *et al.*, 1987, 1989), que apresentam, dependendo da concentração  $x$ , comportamento típico de campo aleatório, vidro de spins, ou uma composição de ambos. Consequentemente, torna-se importante um estudo de modelos de vidros de spins na presença de campos magnéticos aleatórios (Soares *et al.*, 1994; Nogueira *et al.*, 1996, 1998; Vieira *et al.*, 1999b). O modelo SK na presença de um campo aleatório gaussiano parece fornecer uma descrição qualitativa razoável dos diagramas de fases da média do campo *versus* temperatura do antiferromagneto diluído  $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$  (Soares *et al.*, 1994).

Nesta tese investigamos os efeitos de campos magnéticos aleatórios sobre o vidro de spins de Ising (modelo SK) com favorecimento antiferromagnético, assim como de campos de anisotropias sobre o vidro de spins  $m$ -vetorial. Na primeira parte (capítulos 2 e 3) estudamos modelos de vidros de spins  $m$ -vetoriais com interações de alcance infinito na presença de campos magnéticos e campos de anisotropias. Os efeitos de campos de anisotropias uniaxiais nos diagramas dos modelos  $m$ -vetoriais e, em particular, na linha

GT, são analisados no capítulo 2; as modificações na linha GT, devido à presença de um campo de anisotropia cúbica, são estudadas no capítulo 3. Na segunda parte (capítulo 4) estudamos um vidro de spins com favorecimento antiferromagnético através de uma generalização do modelo SK em duas subredes, na presença de campos magnéticos uniforme e aleatório obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussiana. Finalmente, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões.

## Capítulo 2

# Vidro de Spins $m$ -Vetorial na Presença de Anisotropias Uniaxiais

### 2.1 Introdução

Modelos de vidros de spins com simetria contínua e  $m$  componentes cartesianas ( $m \geq 2$ ) representam sistemas de grande interesse em física da matéria condensada. Muitos dos estudos teóricos nestes sistemas foram desenvolvidos a partir de modelos com interações de alcance infinito, representando uma aproximação do tipo campo médio. A maioria dos modelos estudados são restritos a um espaço isotrópico nas variáveis de spins (Kirkpatrick e Sherrington, 1978; de Almeida *et al.*, 1978) e, em algumas situações, na presença de um campo magnético externo uniforme. Neste último caso, os vidros de spins  $m$ -vetoriais apresentam uma fronteira crítica no plano temperatura *versus* campo, sinalizada pelo ordenamento do parâmetro de vidro de spins transverso (linha de Gabay-Toulouse). Recentemente este modelo foi estudado incluindo também um campo magnético aleatório gaussiano (Nogueira Jr. *et al.*, 1996), onde foi encontrado um comportamento não-universal na linha GT.

Entretanto, grande parte dos sistemas reais possuem campos de anisotropias que provocam efeitos não previstos pela teoria dos modelos isotrópicos, bem como pela presença de campos magnéticos externos uniforme e aleatório. O entendimento teórico dos

vidros de spins  $m$ -vetoriais (em particular, o caso  $m = 3$ , spins de Heisenberg) na presença de anisotropias uniaxiais é essencial. A energia de anisotropia age de tal forma a favorecer a magnetização ao longo de um certo eixo. A contribuição dos termos de anisotropia uniaxial, para a energia magnética de um dado domínio, pode ser representada por (Cullit, 1972)

$$E_{anis} = -K_1 \cos^2 \theta - K_2 \cos^4 \theta + \dots, \quad (2.1)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a magnetização do domínio e o eixo fácil do material. Em geral, as constantes  $\{K_n\}$  (independentes de  $\theta$ ) decrescem em magnitude para valores de  $n$  crescente, sendo o termo de ordem mais baixa o de maior relevância. Podemos ter competições entre as anisotropias uniaxiais, dependendo dos sinais das constantes de anisotropia (Cullit, 1972).

Na presença de um campo de anisotropia uniaxial (que faz o sistema preferir orientações segundo um determinado eixo cartesiano), o vidro de spins  $m$ -vetorial já foi investigado em alguns trabalhos (Cragg e Sherrington, 1982; Roberts e Bray, 1982; Elderfield e Sherrington, 1982, 1983a; Viana e Bray, 1983; Bray e Viana, 1983); no entanto, os efeitos do campo de anisotropia na linha GT não foram considerados.

Neste capítulo, estudaremos o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de campos de anisotropias uniaxiais. Consideraremos o caso de interações de alcance infinito obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussiana e investigaremos o modelo através do método das réplicas (Sherrington e Kirkpatrick, 1975).

O capítulo será dividido da seguinte maneira: na seção 2.2, definiremos o modelo; na seção 2.3, encontraremos a solução na aproximação de simetria entre réplicas; na seção 2.4, discutiremos os diversos diagramas de fases; por fim, na seção 2.5, apresentaremos nossas conclusões.

## 2.2 O Modelo

Consideremos o vidro de spins  $m$ -vetorial ( $m \geq 2$ ) na presença de um campo magnético uniforme e de campos de anisotropias uniaxiais (todos na direção  $\vec{I}$ ), definido pelo seguinte

hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} J_{ij} \sum_{\mu} S_{i\mu} S_{j\mu} - D_1 \sum_i S_{i1}^2 - D_2 \sum_i S_{i1}^4 - h \sum_i S_{i1} \quad , \quad (2.2)$$

onde  $\vec{S}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) são vetores clássicos  $m$ -dimensionais que satisfazem a condição de normalização  $\sum_{\mu=1}^m S_{i\mu}^2 = m$  ;  $\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, m$ ) indica componentes cartesianas e  $\sum_{(ij)}$  representa uma soma sobre todos os pares distintos de spins. As contribuições dos campos de anisotropias são representadas por  $D_1$  e  $D_2$ . Os  $J_{ij}$ 's são constantes de acoplamento distribuídas aleatoriamente obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussianas,

$$P(J_{ij}) = \left( \frac{N}{2\pi J^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{N}{2J^2} (J_{ij} - J_0/N)^2 \right] \quad . \quad (2.3)$$

A energia livre para uma dada amostra  $\{J_{ij}\}$  será  $F(\{J_{ij}\})$ ; como trata-se de um sistema temperado (acoplamentos congelados) a média sobre a desordem será tomada na energia livre, ou seja

$$[F(\{J_{ij}\})]_J = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P(J_{ij}) F(\{J_{ij}\}) \quad , \quad (2.4)$$

enquanto que a energia livre por spin será

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{(ij)} dJ_{ij} P(J_{ij}) \ln Z\{J_{ij}\} \quad . \quad (2.5)$$

Usando o método das réplicas, com o procedimento usual, análogo ao efetuado no modelo Sherrington-Kirkpatrick (1975) (Binder e Young, 1986; Fischer e Hertz, 1991), obtemos a energia livre por spins,

$$\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \min g(M_1^\alpha, x^\alpha, q_1^{\alpha\beta}, q^{\alpha\beta}) \quad , \quad (2.6)$$

onde  $\beta = 1/T$  (trabalharemos em unidades de  $k_B = 1$ ) e

$$\begin{aligned}
g(M_1^\alpha, x^\alpha, q_1^{\alpha\beta}, q^{\alpha\beta}) &= -\frac{\beta J_0}{2} nm - \frac{(\beta J)^2}{4} nm + \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (M_1^\alpha)^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{\alpha} m x^\alpha \\
&+ \frac{(\beta J)^2}{4} \sum_{\alpha} m(m-1)(x^\alpha)^2 + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q_1^{\alpha\beta})^2 \\
&+ \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (m-1)(q^{\alpha\beta})^2 - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp\{H_{eff}\} \quad , \quad (2.7)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{eff} &= \beta J_0 \sum_{\alpha} S_1^{\alpha} M_1^{\alpha} + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{\alpha} m (S_1^{\alpha})^2 x^{\alpha} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S_1^{\alpha} S_1^{\beta} q_1^{\alpha\beta} \\
&+ (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} \sum_{\mu \neq 1} S_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{\beta} q^{\alpha\beta} + \beta D_1 \sum_{\alpha} (S_1^{\alpha})^2 + \beta D_2 \sum_{\alpha} (S_1^{\alpha})^4 \\
&+ \beta h \sum_{\alpha} S_1^{\alpha} \quad . \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Nas equações acima,  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ) são índices de réplicas,  $\sum_{(\alpha\beta)}$  representa uma soma sobre pares distintos de réplicas  $(\alpha, \beta)$ , enquanto que  $\text{Tr}_{\alpha}$  denota um traço sobre as variáveis de spins no espaço das réplicas.

Os parâmetros de ordem  $M_1^{\alpha}$ ,  $x^{\alpha}$ ,  $q_1^{\alpha\beta}$ ,  $q^{\alpha\beta}$  são determinados usando as condições de equilíbrio da equação (2.6),

$$M_1^{\alpha} = \langle S_1^{\alpha} \rangle \quad , \quad (2.9)$$

$$(m-1)x^{\alpha} = \langle (S_1^{\alpha})^2 \rangle - 1 \quad , \quad (2.10)$$

$$q_1^{\alpha\beta} = \langle S_1^{\alpha} S_1^{\beta} \rangle \quad , \quad (\alpha \neq \beta) \quad , \quad (2.11)$$

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{(m-1)} \sum_{\mu \neq 1} \langle S_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{\beta} \rangle \quad , \quad (\alpha \neq \beta) \quad , \quad (2.12)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  representa uma média térmica tomada com relação ao “hamiltoniano efetivo”  $\mathcal{H}_{eff}$ . Os parâmetros de ordem quadrupolares  $x^{\alpha}$  medem anisotropias no espaço dos spins para cada réplica  $\alpha$ ,  $M_1^{\alpha}$  são as magnetizações ao longo da direção  $\vec{1}$ , enquanto  $q_1^{\alpha\beta}$  e  $q^{\alpha\beta}$  representam os parâmetros de vidro de spins longitudinal e transversal, respectivamente.

Na seção seguinte, descreveremos a solução com simetria entre réplicas para este modelo.

## 2.3 A Solução com Simetria entre Réplicas

A continuação analítica  $n \rightarrow 0$  da equação (2.6) pode ser efetuada se considerarmos a aproximação de simetria entre réplicas

$$\begin{aligned} M_1^\alpha &= M_1 \quad ; \quad x^\alpha = x \quad , \quad \forall \alpha \quad , \\ q_1^{\alpha\beta} &= q_1 \quad ; \quad q^{\alpha\beta} = q \quad , \quad \forall (\alpha\beta) \quad . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Com a escolha acima, a energia livre por spin pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \beta f &= \frac{(\beta J_0)}{2} (M_1^2 - m) + \frac{(\beta J)^2}{4} [m(m-1)x^2 + 2mx] \\ &\quad - \frac{(\beta J)^2}{4} [q_1^2 - q^2 + m(1-q)^2] - \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu} \left[ \frac{du_{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u_{\mu}^2/2] \right] \ln \tilde{Z} \quad , \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde

$$\tilde{Z} = \text{Tr} \exp \left[ \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} S_{\mu} + b S_1^2 + c S_1^4 \right] \quad , \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= \beta J q_{\mu}^{1/2} u_{\mu} + \beta h \delta_{\mu,1} + \beta J_0 M \delta_{\mu,1} \quad , \\ b &= \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} [mx + q - q_1] \quad , \\ c &= \beta D_2 \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

O traço na equação (2.15) é uma integral sobre uma hipersfera  $m$ -dimensional, sujeita ao vínculo  $\sum_{\mu} (S_{i\mu})^2 = m$  (condição de normalização). Em coordenadas esféricas o funcional  $\tilde{Z}$  pode ser expresso por

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \frac{2\pi^{(m-2)/2}}{\Gamma[(m-2)/2]} \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 \exp(a_1 S_1 + b S_1^2 + c S_1^4) \\ &\quad \times \int_0^{\Omega} dS S^{(m-2)} \delta(S^2 - (m - S_1^2)) \int_0^{\pi} d^{m-2}\theta \text{sen}^{m-3}\theta \exp(r S \cos\theta) \quad , \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $\Omega$  é o valor máximo permitido para  $S$ ,  $r = (a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_m^2)^{1/2}$ ,  $S = (\sum_{\mu \neq 1} S_{\mu}^2)^{1/2}$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$  é o ângulo polar entre  $\vec{r}$  e  $\vec{S}$  neste espaço de dimensão  $(m-1)$ . A integral angular em (2.17) é conhecida (ver *Handbook of Mathematical Functions*, p.376) (Abramowitz e Stegun, 1965),

$$\int d^{m-2}\theta \text{sen}^{m-3}\theta \exp(r S \cos\theta) = (2\pi)^{(m-2)/2} \frac{I_{(m-3)/2}(rS)}{[rS]^{(m-3)/2}} \quad , \quad (2.18)$$

onde

$$P_{nt} = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 S_1^t \exp \left( a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4 \right) (m - S_1^2)^{(m-3+n)/2} \quad , \quad (2.28)$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta J q_1^{1/2} u_1 + \beta h \quad , \\ b_1 &= \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} (m x - q_1) \quad , \\ c &= \beta D_2 \quad . \end{aligned} \quad (2.29)$$

As equações (2.25)-(2.27) podem ser resolvidas analiticamente em alguns limites. Para baixas temperaturas e  $h \gg |D_1|, |D_2|$ , temos o decaimento exponencial usual (Gabay e Toulouse, 1981) (ver Apêndice A),

$$\frac{T}{J} \cong \exp \left[ -\frac{(h/J)^2}{2m} \right] \quad . \quad (2.30)$$

Se todos os campos são pequenos ( $h, D_1, D_2 \ll J$ ), as equações (2.25)-(2.27) podem ser expandidas em série de potências (ver Apêndice B) de modo que

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_1}{J} + \frac{6m}{(m+4)} \frac{D_2}{J} - \frac{m}{\sqrt{2}} \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right| \\ &\quad - \frac{(18m^3 + 36m^2 - 48m + 12)}{\sqrt{2}(m+2)(m+4)} \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \frac{1}{4} \left( \frac{h}{J} \right)^2 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$q_1 = m \frac{D_1}{J} + \frac{(18m^3 + 36m^2 - 48m + 12)}{(m+2)(m+4)} \frac{D_2}{J} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{h}{J} \right| + \dots \quad , \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{T}{J} &= \frac{\tilde{T}}{J} + \frac{(m^4 + 8m^3 + 22m^2 + 24m)}{\sqrt{2}(m+2)^2(m+4)} \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right| \\ &\quad + \frac{(18m^5 + 108m^4 + 204m^3 + 36m^2 - 240m + 72)}{\sqrt{2}(m+2)^3(m+4)} \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| \\ &\quad - \frac{(m^2 + 4m + 2)}{4(m+2)^2} \left( \frac{h}{J} \right)^2 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.33)$$



onde  $\tilde{T}$  é a temperatura na qual a linha GT encontra o eixo  $h = 0$ ,

$$\frac{\tilde{T}}{J} = 1 - \frac{D_1}{J} - \frac{(6m^2 + 12)}{(m+2)(m+4)} \frac{D_2}{J} + \dots \quad (2.34)$$

Fora destes limites, o conjunto de equações (2.25)-(2.27) pode ser resolvido numericamente.

Na próxima seção analisaremos os diagramas de fases nos planos temperatura *versus*  $J_0$ , campo de anisotropia *versus* temperatura e campo magnético *versus* temperatura (linha GT).

## 2.4 Diagramas de Fases

Nesta seção, discutiremos os efeitos dos campos de anisotropias e magnético sobre os diagramas de fases para o vidro de spins  $m$ -vetorial, na aproximação de simetria entre réplicas.

### 2.4.1 Caso $D_1 \neq 0$ ; $D_2 = 0$

Estudaremos a seguir, os diagramas de fases considerando apenas o termo de anisotropia de ordem mais baixa. Devido à presença do campo de anisotropia, o parâmetro quadrupolar  $x$  é sempre induzido; teremos então transições associadas aos demais parâmetros de ordem.

#### i) $J_0 = h = 0$

Neste caso temos  $M_1 = 0$ . O diagrama de fases no plano campo de anisotropia *versus* temperatura, mostrado na figura 2.1 exibe três fases distintas: a fase Paramagnética (P) ( $q_1 = q = 0$ ), a fase Vidro de Spins Longitudinal (VS1) ( $q_1 \neq 0$ ;  $q = 0$ ) e a fase Vidro de Spins-Mista (VS2) ( $q_1 \neq 0$ ;  $q \neq 0$ ). A seguir, definiremos as duas fronteiras críticas existentes.

### Fronteira Paramagnética-Vidro de Spins Longitudinal (P-VS1)

Esta fronteira é determinada a partir das equações (2.26) e (2.27), tomando  $h = D_2 = 0$ , no limite  $q_1 \rightarrow 0$ ,

$$\frac{T}{J} = \frac{\tilde{P}_{02}}{\tilde{P}_{00}} \quad ; \quad x = \frac{1}{(m-1)} \left[ \frac{T}{J} - 1 \right] \quad , \quad (2.35)$$

onde

$$\tilde{P}_{0t} = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 S_1^t \exp \left[ \left( \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} m x \right) S_1^2 \right] (m - S_1^2)^{(m-3)/2} \quad . \quad (2.36)$$

### Vidro de Spins Longitudinal-Vidro de Spins Misto (VS1-VS2)

Determinamos esta fronteira resolvendo as equações (2.25)-(2.27) com  $h = D_2 = 0$ .

Em alguns limites obtivemos resultados analíticos:

(a) quando  $D_1 \rightarrow \infty$ , a fronteira crítica P-VS1 aproxima-se da linha assintótica  $T/J = m$ ;

(b) se  $D_1 = 0$  a transição da fase paramagnética para a fase vidro de spins acontece em  $T/J = 1$  (Kirkpatrick e Sherrington, 1978; de Almeida *et al.*, 1978; Gabay e Toulouse, 1981);

(c) em  $T = 0$  a transição VS1-VS2 ocorre para um dado valor  $D_{1c}^*$ , o qual pode ser obtido das equações (2.25)-(2.27) (ver Apêndice C). Para o caso de spins de Heisenberg ( $m = 3$ ) encontramos  $D_{1c}^* \approx 0.323J$ , em concordância com trabalhos anteriores (Cragg e Sherrington, 1982; Roberts e Bray, 1982). Nas demais regiões, o diagrama de fases da figura 2.1 foi obtido numericamente. A diferença entre o diagrama aqui mostrado e os dos trabalhos de Cragg-Sherrington e Roberts-Bray (para  $D_1 \geq 0$ ) é uma pequena reentrância na fronteira crítica associada ao ordenamento de vidro de spins transversal em baixas temperaturas, permitindo valores de  $D_1 > D_{1c}^*$  ao longo da linha VS1-VS2.

ii)  $J_0 \geq 0$  ;  $h = 0$

Dependendo da magnitude do campo de anisotropia  $D_1$  podemos obter dois diagramas de fases qualitativamente distintos, como mostram as figuras 2.2 e 2.3. Na figura 2.2

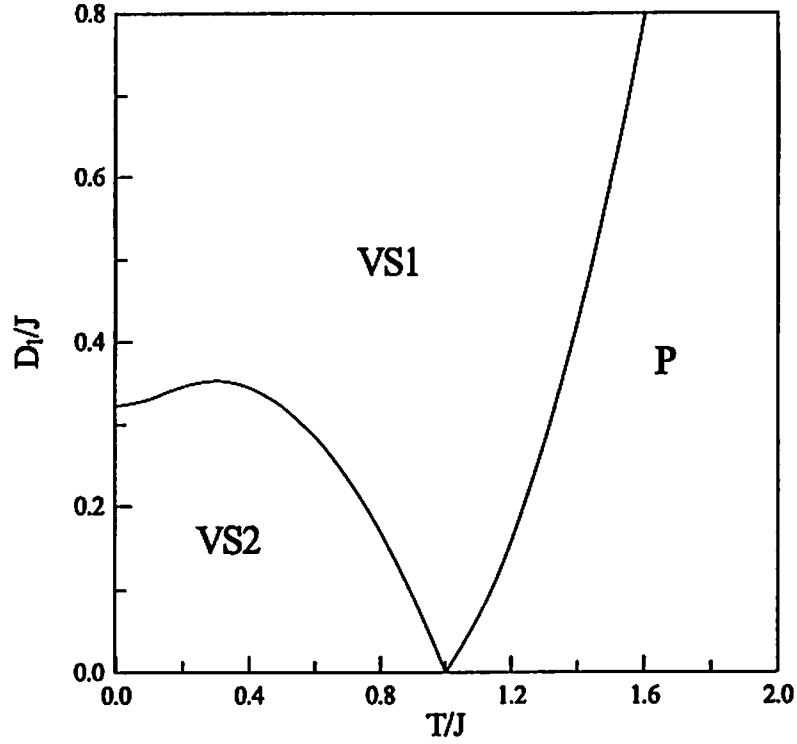


Figura 2.1: Diagrama de fases no plano campo de anisotropia  $D_1$  versus temperatura (em unidades de  $J$ ) para o vidro de spins de Heisenberg. As fases exibidas são: Paramagnética (P), Vidro de Spins Longitudinal (VS1) e Vidro de Spins Misto (VS2).

mostramos o diagrama de fases para o campo de anisotropia  $D_1 = 0.3J$  e na figura 2.3, para  $D_1 = 0.4J$ . Designamos as diversas fases por: Paramagnética (P) ( $M_1 = q_1 = q = 0$ ); Ferromagnética estável (F1) ( $M_1 \neq 0$ ;  $q_1 \neq 0$ ;  $q = 0$ ); Ferromagnética instável (F2) ( $M_1 \neq 0$ ;  $q_1 \neq 0$ ;  $q = 0$ ); Ferromagnética-Mista (F3) ( $M_1 \neq 0$ ;  $q_1 \neq 0$ ;  $q \neq 0$ ); Vidro de Spins Longitudinal (VS1) ( $M_1 = 0$ ;  $q_1 \neq 0$ ;  $q = 0$ ) e Vidro de Spins Misto (VS2) ( $M_1 = 0$ ;  $q_1 \neq 0$ ;  $q \neq 0$ ). A seguir, explicitaremos como as diversas fronteiras críticas são determinadas.

#### Fronteira Paramagnética-Ferromagnética estável (P-F1)

Podemos determinar esta fronteira crítica partindo da equação do parâmetro  $M_1$ ; a equação (2.20) reduz-se a

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u_1^2/2) \frac{P_{01}}{P_{00}} \quad (2.37)$$

No limite  $M_1$  pequeno, temos

$$M_1 = \beta J_0 M_1 [1 + (m - 1)x - q_1] \quad , \quad (2.38)$$

e dividindo a equação acima por  $M_1$  (lembrando que nesta linha o parâmetro  $q_1 = 0$ ), obtemos

$$\frac{T}{J} = \frac{J_0}{J} [1 + (m - 1)x] \quad , \quad (2.39)$$

$$x = \frac{\tilde{P}_{02}}{\tilde{P}_{00}} \quad . \quad (2.40)$$

### Fronteira Paramagnética-Vidro de Spins Longitudinal (P-VS1)

Esta fronteira é determinada pela solução de equações análogas a (2.35) e (2.36).

### Fronteira Vidro de Spins Longitudinal-Vidro de Spins Misto (VS1-VS2)

Resolvendo as equações (2.25)-(2.27), com  $h = D_2 = 0$ .

### Fronteira Ferromagnética instável-Ferromagnética-Mista (F2-F3)

Resolvendo o sistema de equações (2.25)-(2.27) e (2.37), com  $h = 0$ .

As fases F1 e F2 são separadas por uma linha do tipo Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas, enquanto que a linha vertical separando as fases F3 e VS2 (ver figura 2.2) é obtida pela conjectura de Parisi e Toulouse (1980). A fase ferromagnética mista (F3) é caracterizada pelos ordenamentos de vidro de spins transverso e ferromagnetismo, enquanto a fase vidro de spins mista (VS2) pelos ordenamentos de vidros de spins longitudinal e transversal. A solução com simetria entre réplicas é estável nas fases P e F1, e instável nas fases F2, F3, VS1 e VS2. Para  $D_1 = 0.3J$  (ver figura 2.2) observamos dois tipos de reentrância:

(a) fixando um valor de  $J_0/J$  ligeiramente maior que 1 e baixando a temperatura podemos passar continuamente pelas fases  $P \rightarrow F1 \rightarrow F2 \rightarrow VS1$ ;

(b) em uma pequena região do diagrama de fases, fixando a temperatura e variando  $J_0/J$  podemos passar pelas fases  $VS1 \rightarrow F2 \rightarrow F3 \rightarrow F2$  continuamente.

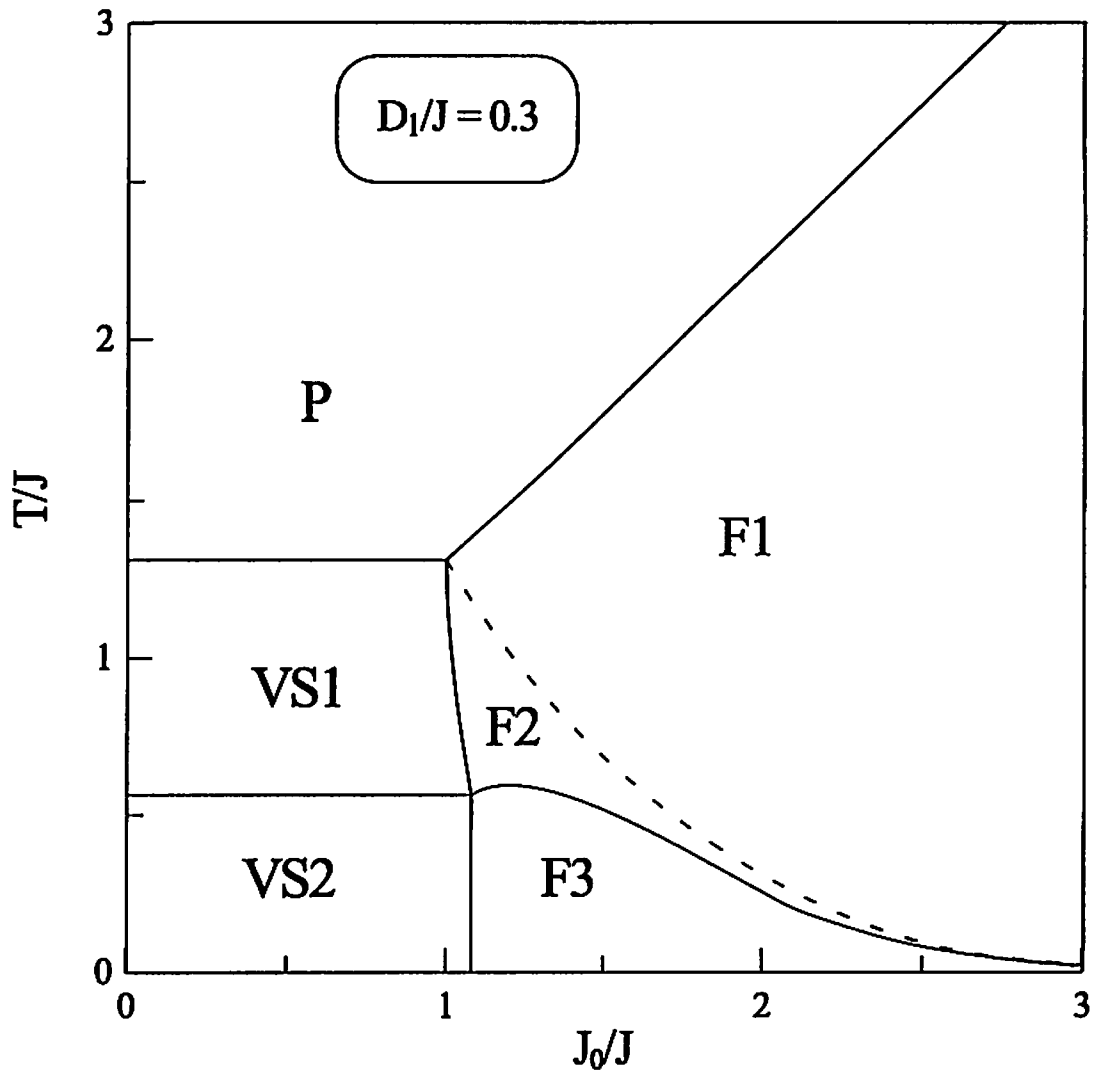


Figura 2.2: Diagrama de fases no plano  $T$  versus  $J_0$  (em unidades de  $J$ ) para o vidro de spins  $m$ -vetorial ( $m = 3$ ), com  $D_1 = 0.3J$ . As fases mostradas são: Paramagnética (P), Ferromagnéticas (F1,F2), Ferromagnética-Mista (F3), Vidro de Spins Longitudinal (VS1) e Vidro de Spins Misto (VS2). A linha pontilhada representa a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas.

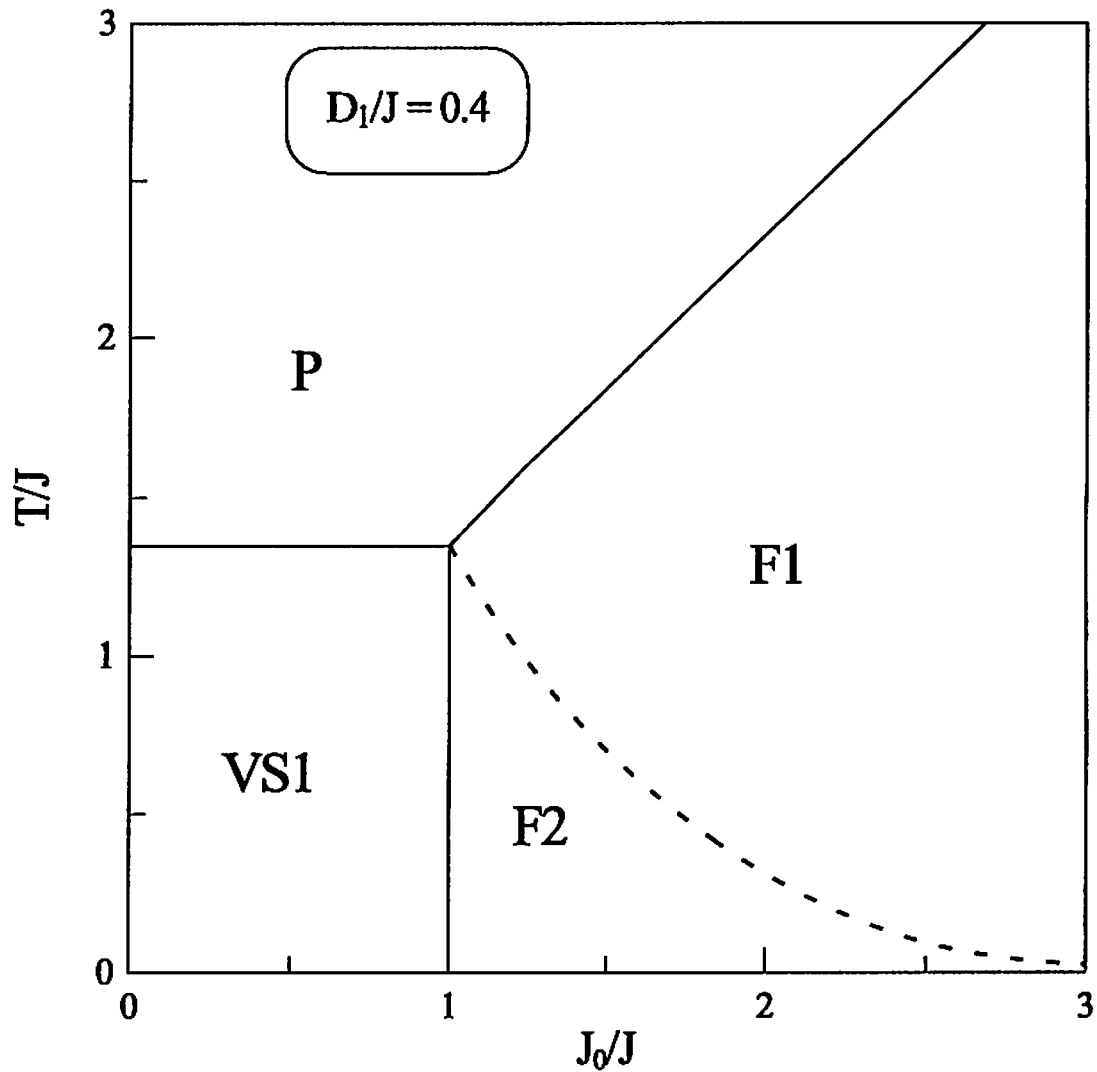


Figura 2.3: Diagrama de fases para o vidro de spins de Heisenberg com  $D_1 = 0.4J$ , mostrando as fases Paramagnética (P), Ferromagnética estável (F1), Ferromagnética instável (F2) e Vidro de Spins Longitudinal (VS1). A linha pontilhada representa a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas.

Como ambos efeitos ocorrem dentro da região de instabilidade da solução com simetria entre réplicas, é possível que estas reentrâncias sejam consequências desta hipótese [equação (2.13)].

Considerando  $D_1$  pequeno, podemos obter as coordenadas do ponto multicrítico (ponto onde as fases F2, F3, VS1 e VS2 da figura 2.2 se encontram) expandindo as equações (2.25)-(2.27) e (2.37) em séries de potências (ver Apêndice A),

$$\frac{\tilde{T}}{J} \cong 1 - \frac{D_1}{J} \quad ; \quad \frac{\tilde{J}_0}{J} \cong 1 + \frac{3m^2}{(m+2)^2} \left(\frac{D_1}{J}\right)^2 \quad . \quad (2.41)$$

Concluimos então que a introdução do campo de anisotropia  $D_1$  provoca um deslocamento no ponto multicrítico da figura 2.2, de tal forma a aumentar  $\tilde{J}_0$  e diminuir  $\tilde{T}$ , com relação ao caso com  $D_1 = 0$  (Gabay e Toulouse, 1981). Não existe ordenamento vidro de spins transverso para  $D_1 = 0.4J$  em qualquer temperatura finita; neste caso, o diagrama de fases é qualitativamente similar ao do modelo SK. Nossos resultados numéricos mostram este tipo de comportamento para valores do campo de anisotropia a partir de  $D_1 \simeq 0.35J$ .

iii)  $J_0 = 0$  ;  $h \geq 0$

Na figura 2.4 mostramos o diagrama de fases campo magnético *versus* temperatura obtido a partir das equações (2.25)-(2.27), para diversos valores de  $D_1$  positivos (Vieira *et al.*, 1998). Vemos que a linha GT é deslocada para a esquerda quando  $D_1$  aumenta, como esperado, já que a presença do campo de anisotropia uniaxial favorece os graus de liberdade longitudinais, dificultando o ordenamento transversal. O deslocamento para a esquerda ( $D_1 > 0$ ) de  $\tilde{T}$  foi verificado de forma numérica e analítica, como pode ser visto na equação (2.34). O efeito mais interessante exibido na figura 2.4 é a reentrância da fase paramagnética. Para valores fixos de  $D_1$ , dentro uma certa faixa de temperatura, podemos passar da fase paramagnética ( $q = 0$ ) para a fase vidro de spins ( $q \neq 0$ ) e então de volta para o estado paramagnético, diminuindo o campo magnético  $h$  e mantendo a temperatura fixa. Estes resultados foram verificados numericamente, e também analiticamente para  $h, D_1 \ll J$ , como pode ser visto da equação (2.33). Se  $h \ll D_1$ , a equação (2.33) é

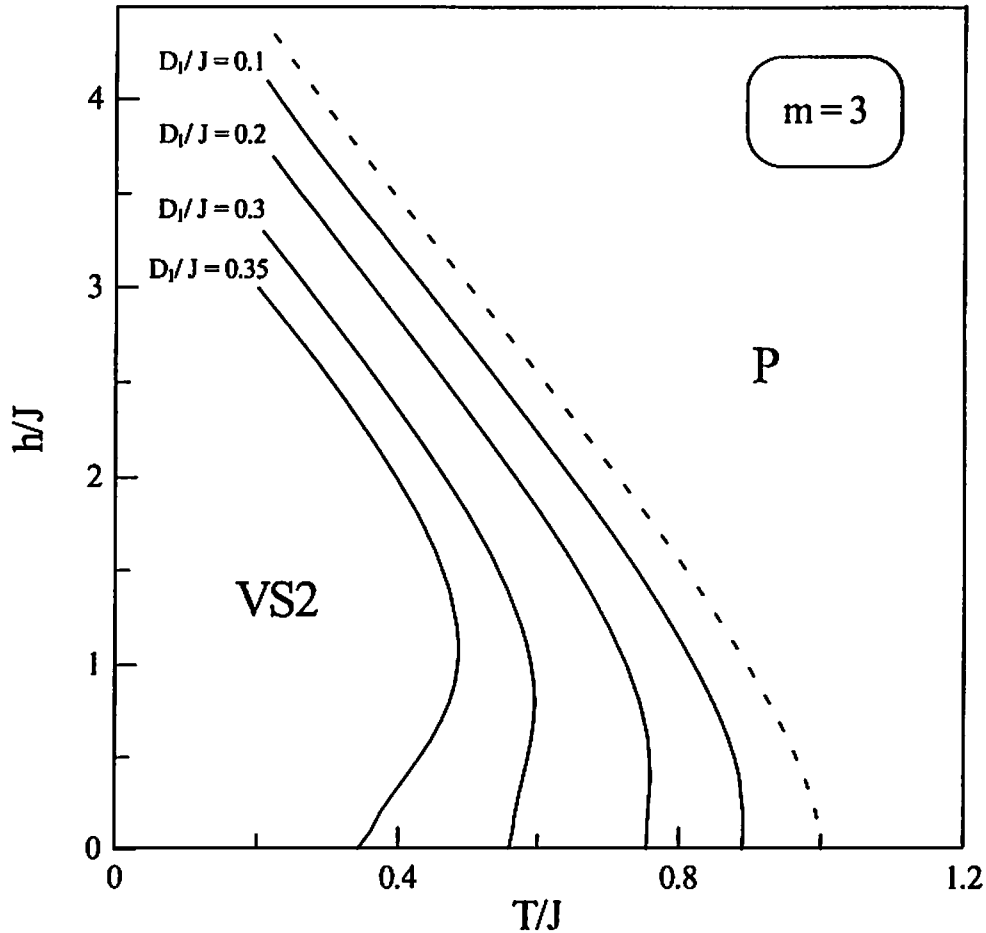


Figura 2.4: Linhas Gabay-Toulouse, no plano campo magnético *versus* temperatura, para valores fixos do campo de anisotropia uniaxial  $D_1$ . A curva pontilhada representa a linha GT no caso  $D_1 = 0$  (Gabay e Toulouse, 1981).

dominada pelo termo linear em  $h$ , de modo que

$$\tau \sim -|h/J| \quad ; \quad \tau = \frac{(\tilde{T} - T)}{\tilde{T}} \quad , \quad (2.42)$$

enquanto se  $h \gg D_1$ , obtemos um cruzamento (*crossover*) para o comportamento Gabay-Toulouse,  $\tau \sim (h/J)^2$ . A reentrância torna-se mais pronunciada para valores crescentes de  $D_1$ , como pode ser visto da figura 2.4. É importante salientar que a reentrância encontrada na figura 2.1, ao diminuir a temperatura para valores de  $D_1$  ligeiramente acima de  $D_{1c}^* \approx 0.323J$  (VS1  $\rightarrow$  VS2  $\rightarrow$  VS1), sugere a existência de duas linhas GT para um mesmo valor de  $D_1$ . Tal possibilidade não foi detectada numericamente, uma vez que encontramos convergência para uma única linha GT neste intervalo. Na figura 2.5



mostramos exemplos de que estes comportamentos são qualitativamente análogos para todo  $m \geq 2$ . Na figura 2.6 apresentamos as linhas GT para valores de  $D_1$  simétricos (positivos e negativos), também com a concordância dos resultados numérico e analítico, ou seja, para  $D_1 < 0$  o deslocamento de  $\tilde{T}$  é para a direita, e nenhuma reentrância está presente [ver equações (2.33) e (2.34)]. O diagrama de fases tri-dimensional no caso  $J_0 = 0$  e  $h, D_1 \geq 0$  é apresentado na figura 2.7. É importante mencionar que a transição de fases P-VS1 só ocorre se  $h = 0$ ; para campos magnéticos diferentes de zero, o parâmetro de ordem vidro de spins longitudinal é trivialmente induzido. Para  $h > 0$  a instabilidade da solução com simetria entre réplicas acontece na linha GT (Cragg *et al.*, 1982); portanto, a reentrância descrita acima persistirá frente o procedimento de quebra da simetria entre réplicas.

#### 2.4.2 Caso $D_1 > 0$ ; $|D_2| < D_1$

Nesta seção, consideraremos o efeito dos dois campos de anisotropia uniaxiais de ordem mais baixa sobre os diagramas de fases para o vidro de spins  $m$ -vetorial clássico (Vieira *et al.*, 1999a). Restringiremos nossa análise para  $D_1 > 0$  e a campos de anisotropia de segunda-ordem  $D_2$  sempre em módulo menor que  $D_1$ , como sugerido em observações experimentais (Cullity, 1972).

##### i) $J_0 = h = 0$

Diagramas de fases no plano  $D_1$  versus  $T$ , para diversos valores do campo de anisotropia de segunda ordem são mostrados nas figuras 2.8 a 2.11. As linhas pontilhadas em cada figura representam o caso em que  $D_2 = 0$ . As fronteiras críticas (linhas cheias) são obtidas de forma análoga ao caso  $D_2 = 0$ . As equações que determinam as fronteiras P-VS1 e VS1-VS2 são as mesmas do caso em que não temos campo de anisotropia de segunda ordem (ver seção 2.4.1), com

$$\tilde{P}_{0t} = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 S_1^t \exp \left[ \left( \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} m x \right) S_1^2 + \beta D_2 S_1^4 \right] (m - S_1^2)^{(m-3)/2} \quad . \quad (2.43)$$

Neste caso, também podemos obter alguns limites analiticamente:

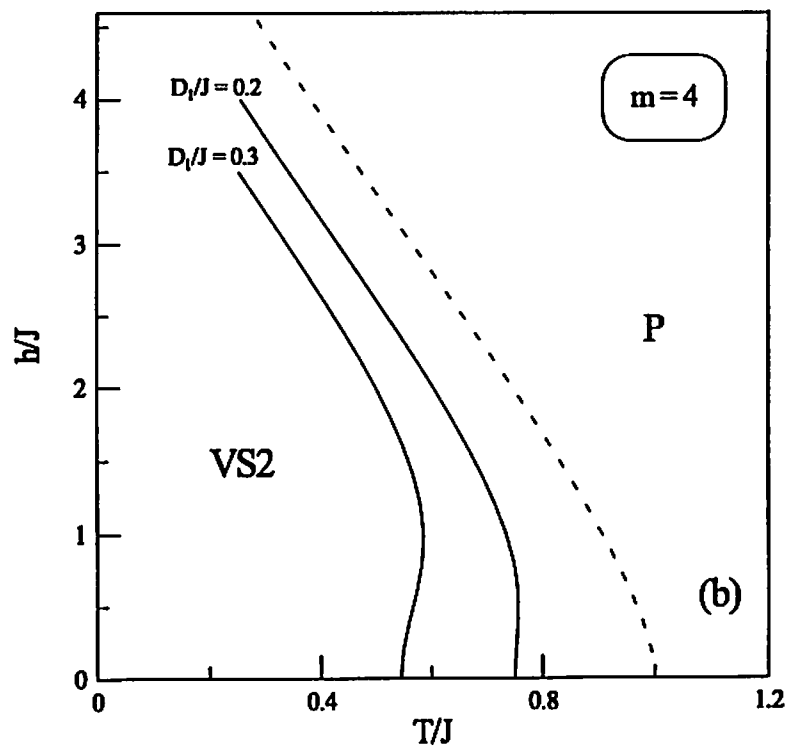
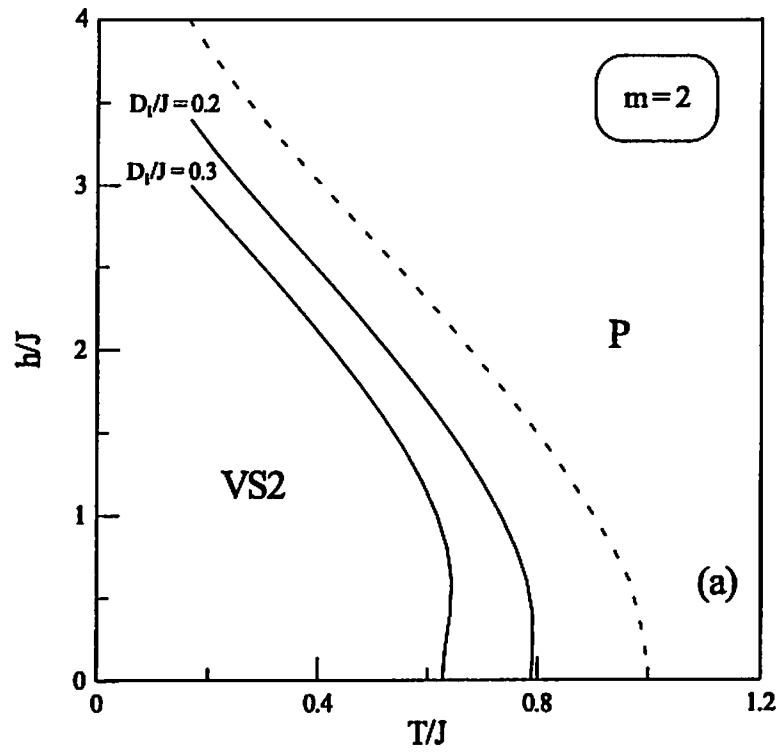


Figura 2.5: Diagramas de fases para diferentes valores de  $m$ , mostrando o mesmo comportamento qualitativo da figura 2.4; (a)  $m = 2$ ; (b)  $m = 4$ .

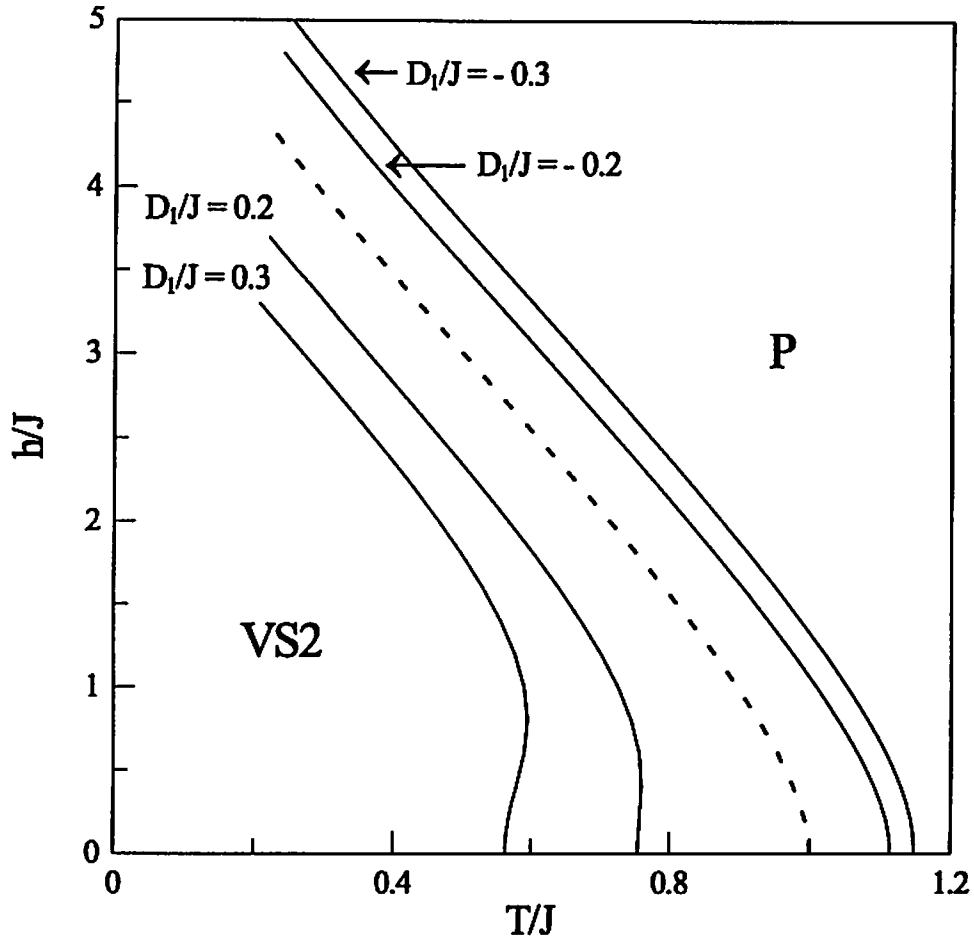


Figura 2.6: As linhas GT no plano  $h$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg, com valores simétricos (positivos e negativos) do campo de anisotropia  $D_1$ . A curva pontilhada representa a linha GT com  $D_1 = 0$  (Gabay e Toulouse, 1981).

- (a) Para  $D_1 = D_2 = 0$  a fase vidro de spins surge em  $T/J = 1$  [ver equação (2.34)];  
 (b) O limite assintótico ( $D_1 \rightarrow \infty$ ) para a fronteira crítica P-VS1 depende da escolha de  $D_2$ . Definindo

$$K(S_1) = \left( \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} m x \right) S_1^2 + \beta D_2 S_1^4 \quad , \quad (2.44)$$

e considerando que os campos de anisotropia são tais que  $D_2 = \gamma D_1$ , temos, no limite  $D_1 \rightarrow \infty$ ,

$$K(S_1) \simeq \beta D_1 (S_1^2 + \gamma S_1^4) \quad . \quad (2.45)$$

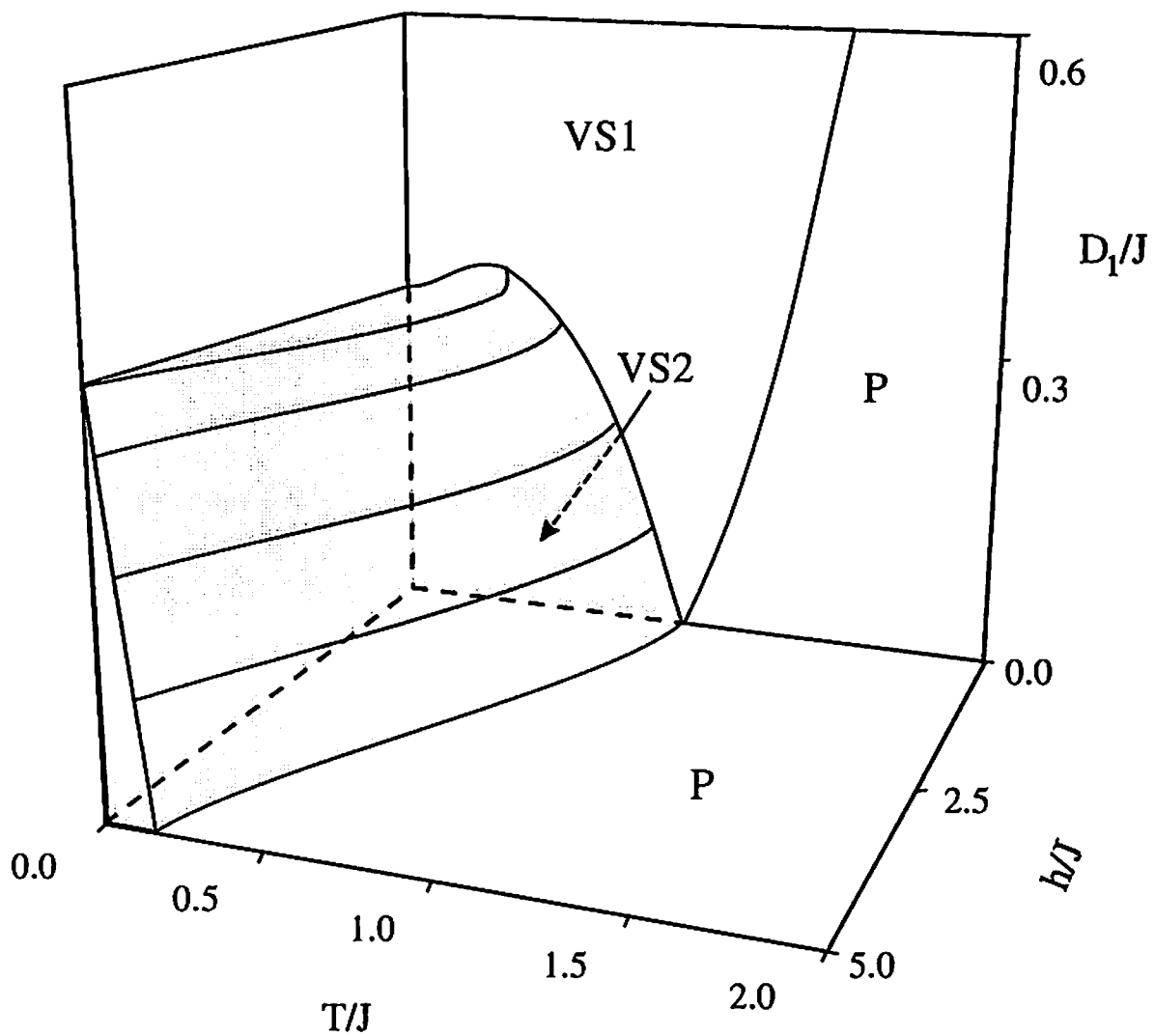


Figura 2.7: Diagrama de fases tri-dimensional para o vidro de spins de Heisenberg na presença de uma anisotropia uniaxial ( $D_1 > 0$ ).

A fronteira crítica P-VS1 é obtida da equação (2.35) com

$$\frac{\tilde{P}_{02}}{\tilde{P}_{00}} = \frac{\int_0^{\sqrt{m}} dS_1 S_1^2 \exp[K(S_1)] (m - S_1^2)^{(m-3)/2}}{\int_0^{\sqrt{m}} dS_1 \exp[K(S_1)] (m - S_1^2)^{(m-3)/2}} \quad (2.46)$$

Quando  $D_1 \rightarrow \infty$ , as integrais na expressão acima são dominadas pelo máximo de  $K(S_1)$ ; para  $D_2 > 0$  ( $\gamma > 0$ ), este máximo ocorre em  $S_1 = \sqrt{m}$ , de modo que

$$\frac{\tilde{P}_{02}}{\tilde{P}_{00}} = \lim_{S_1 \rightarrow \sqrt{m}} \frac{e^{K(S_1)} (m - S_1^2)^{(m-3)/2} S_1^2}{e^{K(S_1)} (m - S_1^2)^{(m-3)/2}} = m \quad (2.47)$$

Para  $D_2 < 0$  ( $\gamma < 0$ ), o máximo de  $K(S_1)$  ocorre em  $S_1^2 = -1/(2\gamma)$ ; como  $S_1^2 \leq m$  (condição de normalização), o máximo de  $K(S_1)$  ocorre em  $S_1^2 = -1/(2\gamma)$  se  $\gamma \leq -1/(2m)$  e em  $S_1^2 = m$  se  $-1/(2m) \leq \gamma \leq 0$ . Logo, para  $D_1 > D_2 > 0$ , assim como para  $D_2$  negativo tal que  $-1/(2m) \leq \gamma \leq 0$ , o comportamento assintótico para  $D_1 \rightarrow \infty$  é a reta  $T/J = m$ . No entanto, se  $D_2$  é negativo, com  $\gamma < -1/(2m)$ , o comportamento assintótico é dado por  $T/J = -1/(2\gamma)$ .

(c) O valor de  $D_1$  crítico, onde a fronteira VS1-VS2 encontra o eixo  $T = 0$  também depende do campo de anisotropia de segunda ordem (ver apêndice C),

$$D_{1c} = \frac{D_{1c}^*}{1 + 6\gamma} \quad , \quad (2.48)$$

onde  $D_{1c}^* \approx 0.323J$  é o valor crítico, para o caso  $m = 3$ , quando  $D_2 = 0$  (Cragg e Sherrington, 1982; Roberts e Bray, 1982). Observamos que  $D_{1c}$  aumenta quando  $\gamma$  diminui e, em particular, quando  $\gamma = -1/6$ , temos  $D_{1c} \rightarrow \infty$ . A equação (2.48) não é válida se  $\gamma \leq -1/6$ ; neste caso, a fronteira crítica VS1-VS2 não toca o eixo  $T = 0$ , como pode ser visto na figura 2.10. Na figura 2.8 apresentamos o diagrama de fases para  $D_2 = 0.1D_1$ ; como esperado, a fase vidro de spins mista (VS2) é reduzida com relação ao caso  $D_2 = 0$  (linha pontilhada) e em  $T = 0$  temos  $D_{1c} \approx 0.2018J$ . Observamos que a reentrância  $VS1 \rightarrow VS2 \rightarrow VS1$  torna-se mais pronunciada para  $D_2 > 0$ . Na figura 2.9 exibimos o diagrama de fases para  $D_2 = -0.1D_1$ , mostrando um aumento na fase VS2 devido à presença do campo de anisotropia  $D_2$  negativo. Em ambas as figuras 2.8 e 2.9 a fronteira crítica P-VS1 aproxima-se de  $T/J = 3$  quando  $D_1 \rightarrow \infty$ . Na figura 2.10 mostramos

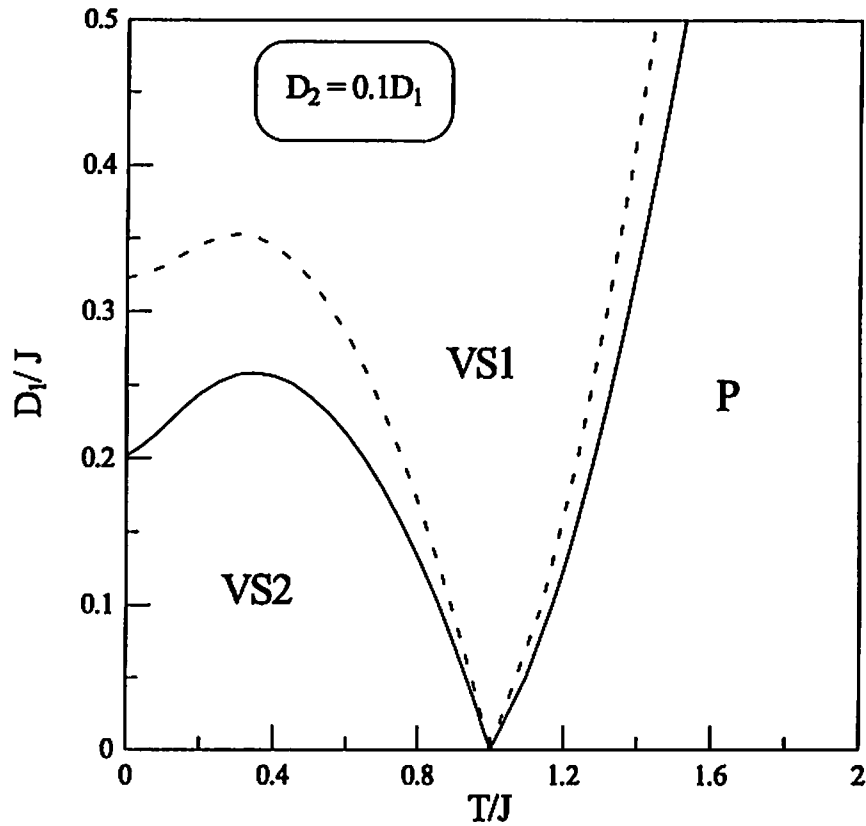


Figura 2.8: Diagrama de fases no plano  $D_1$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), do vidro de spins de Heisenberg, para uma escolha típica do campo de anisotropia de segunda ordem,  $D_2 = 0.1D_1$ . A linha pontilhada refere-se ao caso  $D_2 = 0$ .

o diagrama de fases para  $D_2 = -0.2D_1$ ; neste caso, não existe a fase vidro de spins longitudinal (VS1) em  $T = 0$ , enquanto que o limite assintótico da fronteira P-VS1 é dado por  $T/J = -1/(2\gamma) = 2.5$ .

Na figura 2.11 apresentamos a fronteira crítica P-VS1 para diversos valores de  $D_2$  ( $-1/3 \leq D_2/D_1 \leq 1/3$ ), mostrando as diferentes tendências de limites assintóticos para valores de  $D_1$  grandes.

É importante salientar que os resultados apresentados nas figuras 2.8 a 2.10 são qualitativamente análogos aos encontrados para o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de duas anisotropias aleatórias (Bray e Viana, 1983).

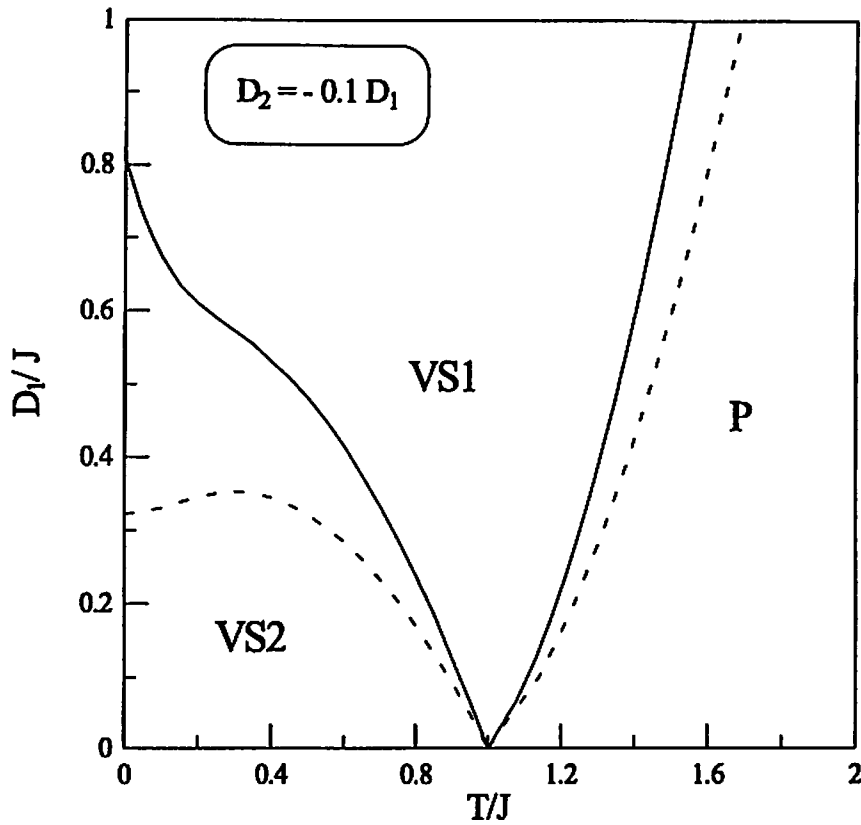


Figura 2.9: Diagrama de fases no plano  $D_1$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), do vidro de spins de Heisenberg, para uma escolha típica do campo de anisotropia de segunda ordem,  $D_2 = -0.1 D_1$ . A linha pontilhada refere-se ao caso  $D_2 = 0$ .

ii)  $J_0 \geq 0$  ;  $h = 0$

Os diagramas de fases neste caso são qualitativamente similares ao caso  $D_2 = 0$  (ver figuras 2.2 e 2.3), discutido na seção anterior.

iii)  $J_0 = 0$  ;  $h > 0$

As linhas GT no plano campo magnético versus temperatura, para diferentes valores de  $D_1$  e  $D_2$ , estão exibidas nas figuras 2.12-2.15. Análogo ao que acontece no caso  $D_2 = 0$ , duas novas características são observadas com respeito à linha GT na ausência de campos de anisotropias,  $D_1 = D_2 = 0$  (Gabay-Toulouse, 1981) (linhas pontilhadas nas figuras 2.12-2.15).

(a) A temperatura  $\tilde{T}$  é deslocada quando comparada ao valor  $\tilde{T} = J$  (Gabay-Toulouse, 1981), como pode ser visto da equação (2.34);

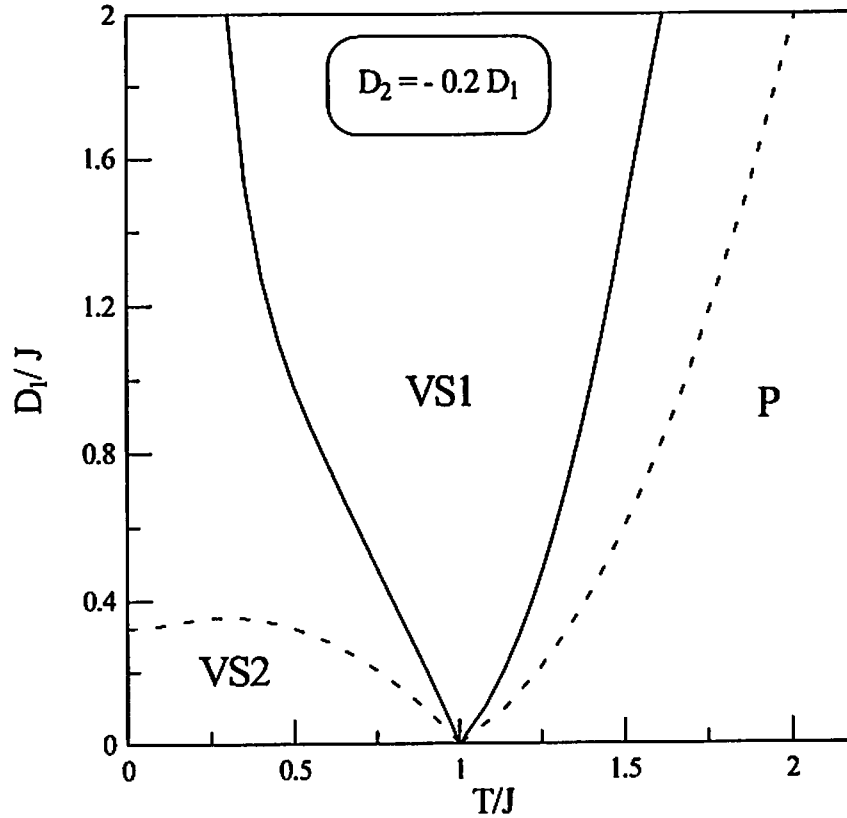


Figura 2.10: Diagrama de fases no plano  $D_1$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), do vidro de spins de Heisenberg, para uma escolha típica do campo de anisotropia de segunda ordem,  $D_2 = 0.2D_1$ . A linha pontilhada refere-se ao caso  $D_2 = 0$ .

(b) Efeitos de reentrância podem ocorrer, dentro de uma certa faixa de temperaturas, dependendo da escolha dos campos de anisotropias.

Estes dois efeitos foram observados nas soluções numéricas das equações (2.25)-(2.27) e também nas expansões para campos baixos [equações (2.32)-(2.33)], como discutiremos a seguir.

Se ambos campos de anisotropias são positivos, observamos da equação (2.34) uma redução na temperatura  $\tilde{T}$ , e da equação (2.33), uma reentrância caracterizada pelo comportamento expresso na equação (2.42), para  $h \ll (D_1, D_2)$ , e por um comportamento do tipo  $\tau \sim (h/J)^2$ , se  $h \gg (D_1, D_2)$ . Este caso está mostrado na figura 2.12 (com  $D_2 = D_1/3$ ). Tal reentrância poderá estar relacionada com o decréscimo da temperatura de congelamento, quando o campo magnético é reduzido, observado em vários sistemas reais (Barbara *et al.*, 1981; Barbara e Malozemoff, 1983; Lundgren *et al.*, 1982; Keener



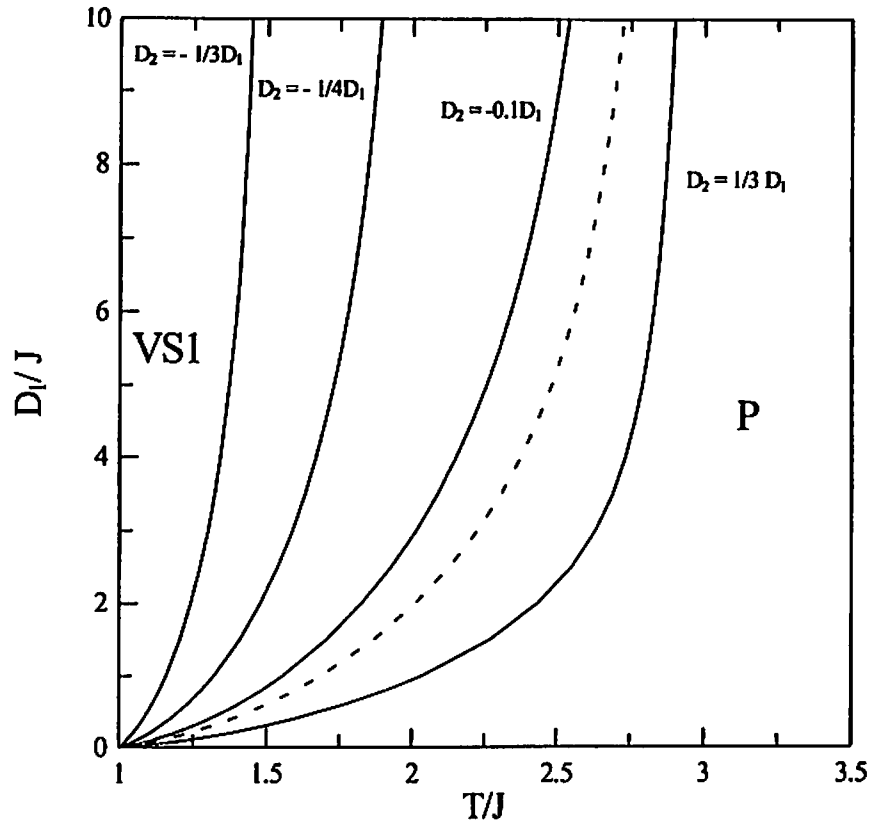


Figura 2.11: Fronteira crítica P-VS1 no plano  $D_1$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg, com diversos valores de  $D_2$ . A linha pontilhada corresponde ao caso  $D_2 = 0$ .

e Weissman, 1996), como ilustrado nas figuras 2.16 e da figura 2.17. Como esperado, o caso de dois campos de anisotropias positivos é qualitativamente análogo à situação de um único campo anisotrópico positivo, com um valor efetivo convenientemente escolhido (ver figuras 2.4, 2.12).

Vamos agora ressaltar o caso onde os campos de anisotropias competem, isto é,  $D_1 > 0$  (favorecendo o ordenamento vidro de spins longitudinal) e  $D_2 < 0$  (favorecendo o ordenamento vidro de spins transverso). Para campos pequenos, a equação (2.34) define o limiar

$$D_2' \cong -\frac{(m+2)(m+4)}{6m^2+12} D_1 \quad , \quad (2.49)$$

acima (abaixo) do qual a temperatura  $\tilde{T}$  é deslocada para esquerda (direita) de  $\tilde{T} = J$ . Para  $m = 3$ , tal limiar corresponde a  $D_2' \cong -0.5D_1$ . Do mesmo modo, da equação (2.33)

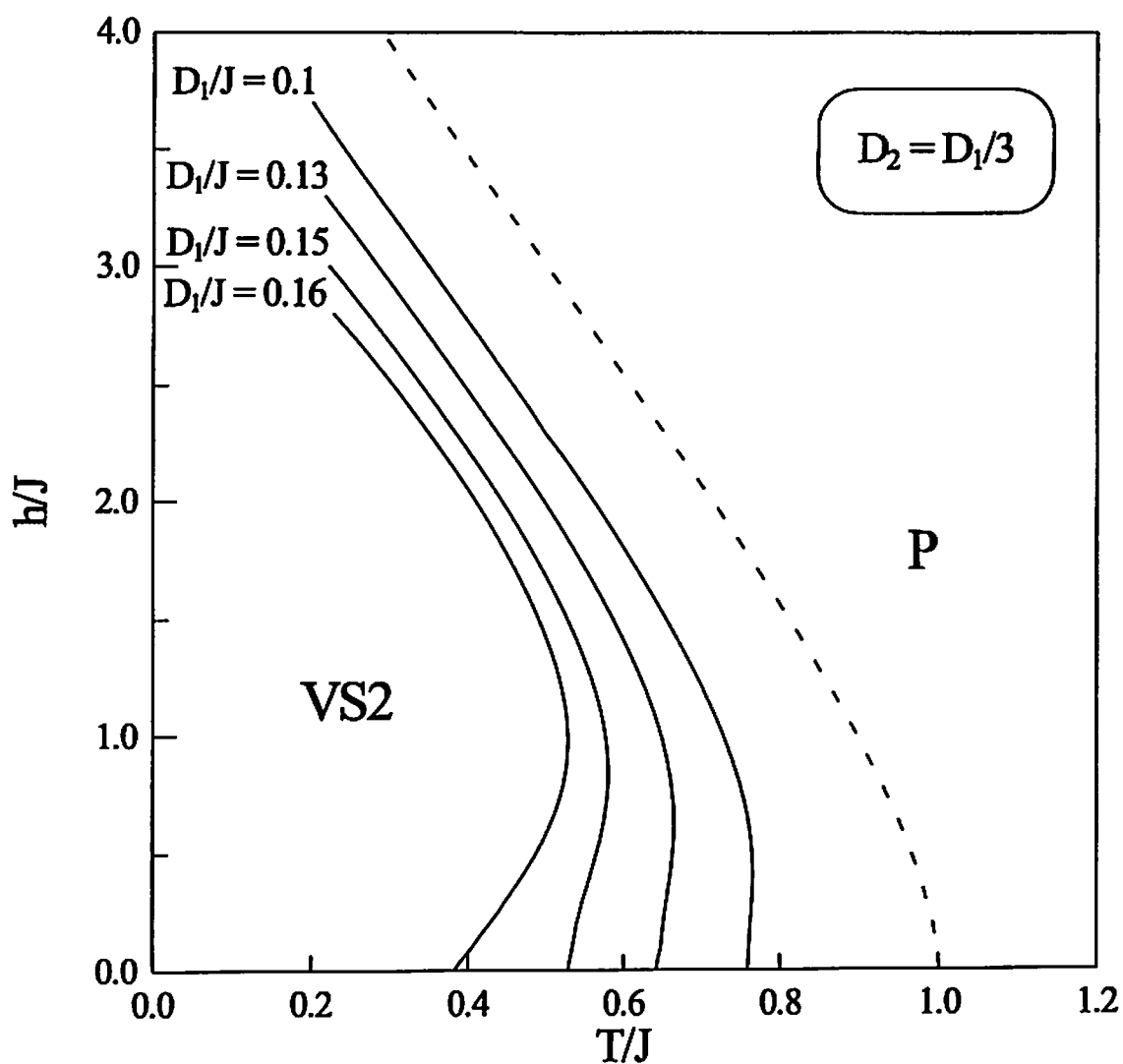


Figura 2.12: As linhas GT no plano  $h$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa  $D_1$  e  $D_2$ , com  $D_2 = D_1/3$ . A linha pontilhada corresponde ao caso  $D_1 = D_2 = 0$ .

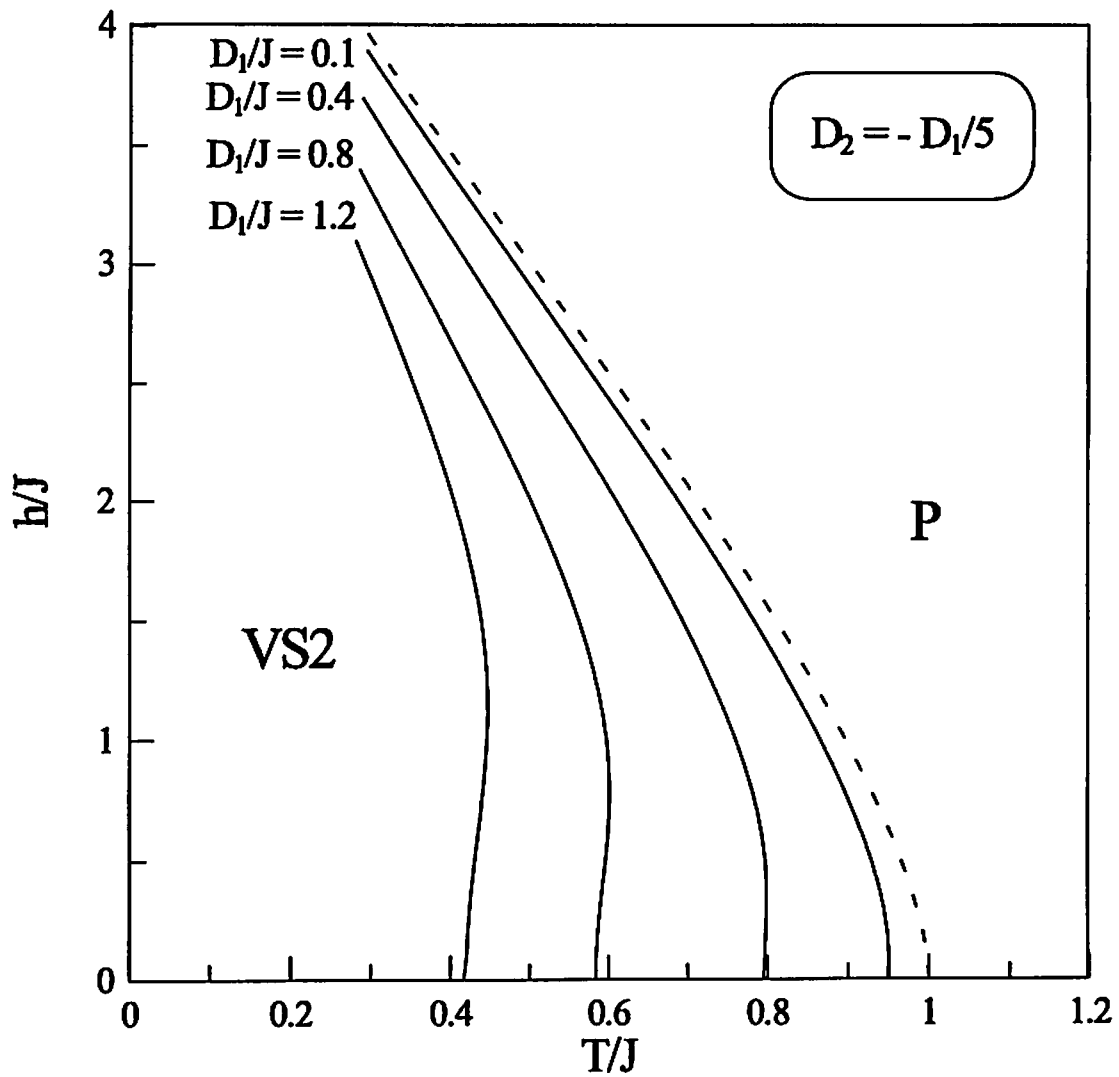


Figura 2.13: As linhas GT no plano  $h$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa  $D_1$  e  $D_2$ , com  $D_2 = -D_1/5$ . A linha pontilhada corresponde ao caso  $D_1 = D_2 = 0$ .

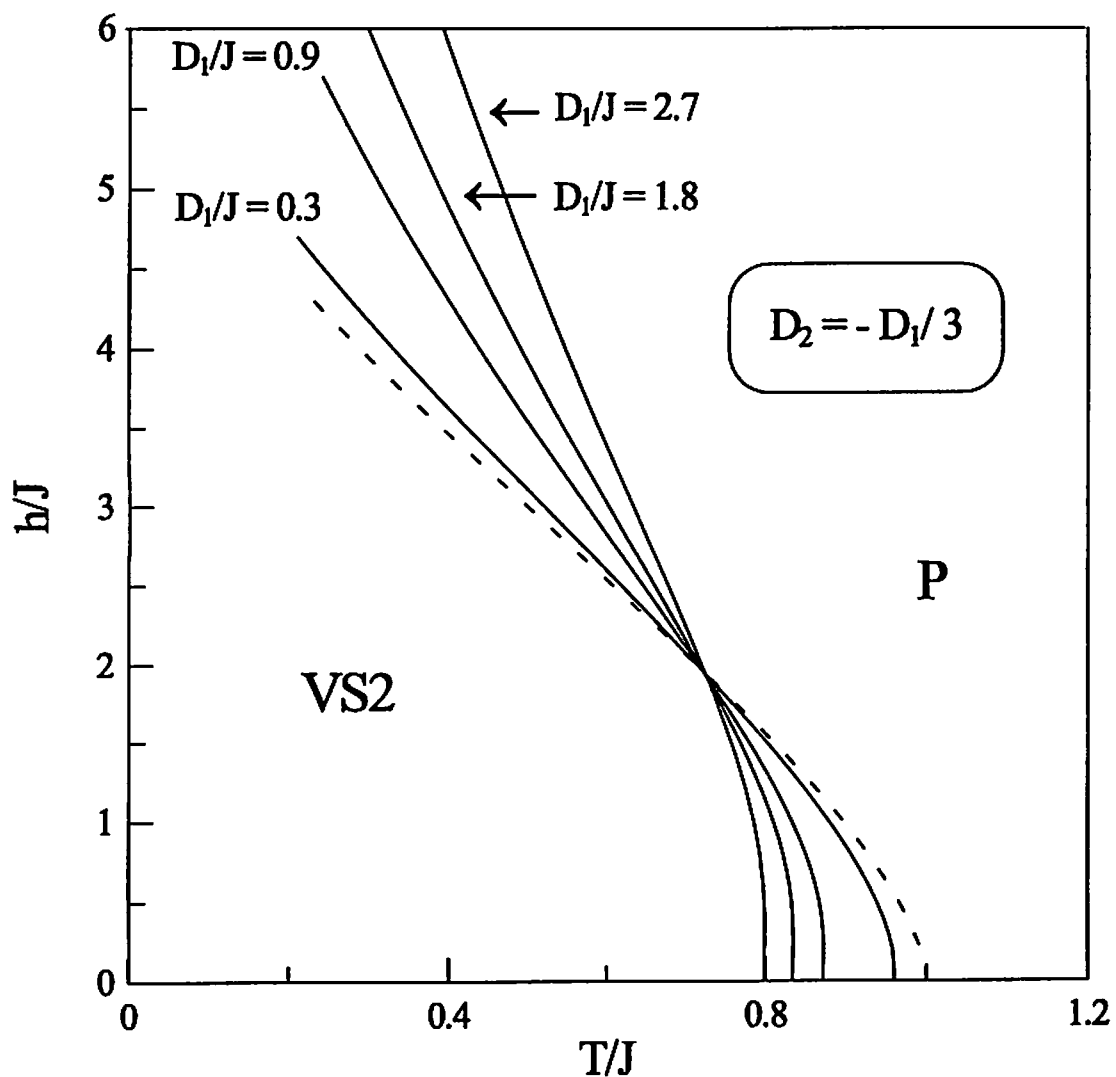


Figura 2.14: As linhas GT no plano  $h$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), para o vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa  $D_1$  e  $D_2$ , com  $D_2 = -D_1/3$ . A linha pontilhada corresponde ao caso  $D_1 = D_2 = 0$ .

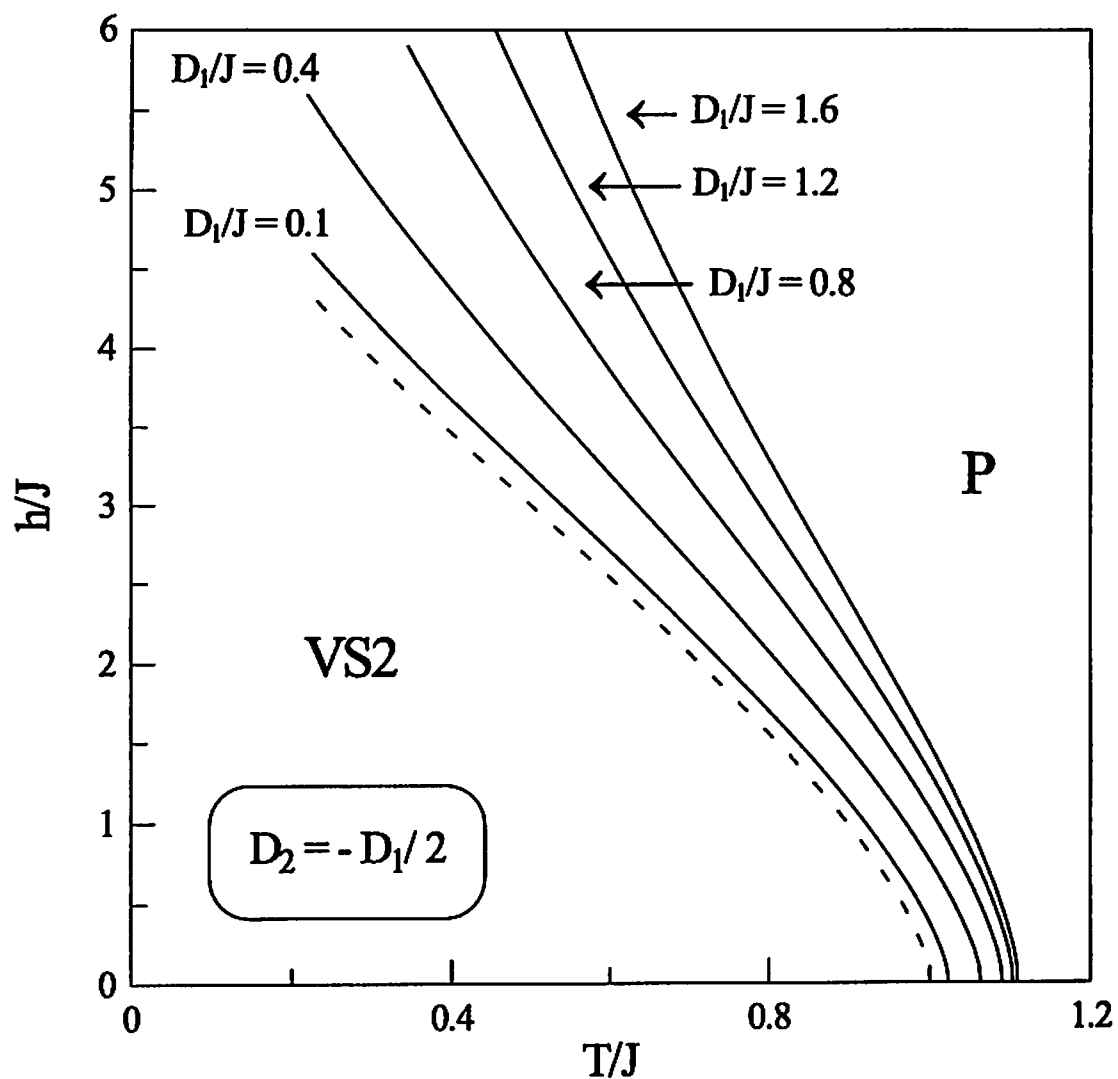


Figura 2.15: As linhas GT no plano  $h$  versus  $T$  (em unidades de  $J$ ), para a vidro de spins de Heisenberg na presença dos dois campos de anisotropia de ordem mais baixa  $D_1$  e  $D_2$ , com  $D_2 = -D_1/2$ . A linha pontilhada corresponde ao caso  $D_1 = D_2 = 0$ .

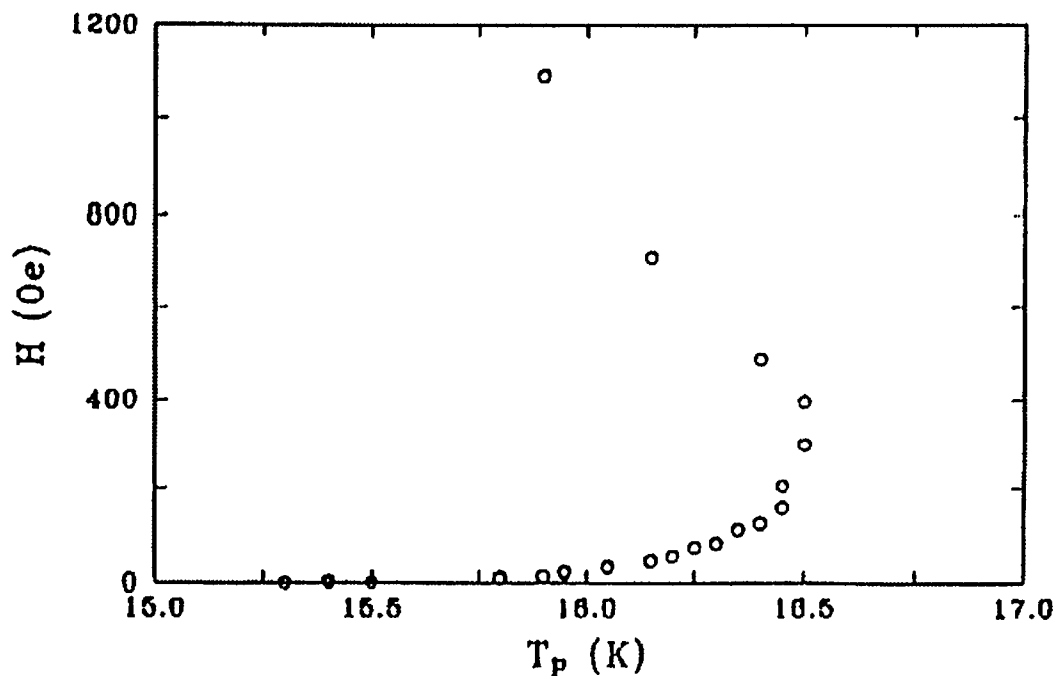


Figura 2.16: O campo magnético *versus* a temperatura do pico da suscetibilidade magnética, para o vidro de spins  $Al_{63}Gd_{37}$  (Barbara e Malozemoff, 1983).

definimos um segundo limiar

$$D_2'' \cong -\frac{(m+2)(m^4 + 8m^3 + 22m^2 + 24m)}{18m^5 + 108m^4 + 204m^3 + 36m^2 - 240m + 72} D_1, \quad (2.50)$$

acima (abaixo) do qual a reentrância caracterizada pela equação (2.42) ocorre (não ocorre). Para  $m = 3$ , tal limiar corresponde a  $D_2'' \cong -0.15D_1$ . Embora os valores limites  $D_2'$  e  $D_2''$  tenham sido obtidos a partir dos termos de ordem mais baixas das equações de expansões em séries, eles estão em boa concordância com as soluções numéricas das equações (2.25)-(2.27), como ilustrado pelas figuras 2.13-2.15.

Na figura 2.13,  $D_2 = -D_1/5$ , que corresponde um valor maior do que  $D_2'$ , mas muito próximo de  $D_2''$ . Como consequência, a temperatura  $\tilde{T}$  diminui, enquanto o efeito de reentrância é muito pequeno. Na figura 2.14, mostramos o caso  $D_2 = -D_1/3$ , que corresponde a  $D_2' < D_2 < D_2''$ . Neste caso não observamos o efeito de reentrância, mas apenas uma temperatura  $\tilde{T}$  deslocada para esquerda. Comparando as curvas da figura 2.14 com

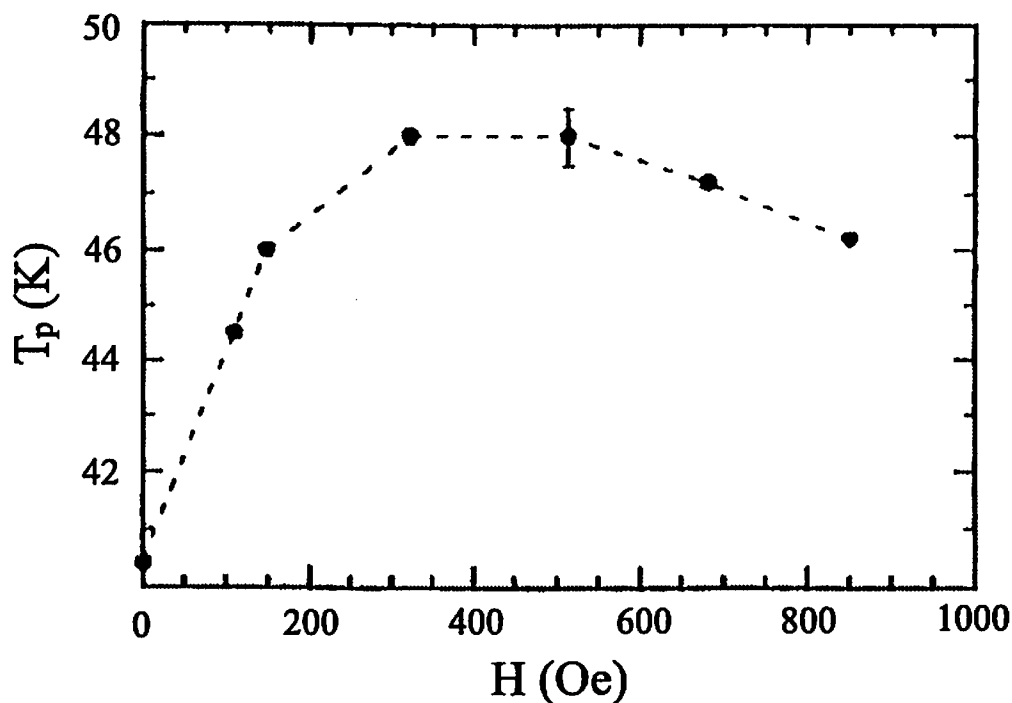


Figura 2.17: A temperatura do pico do espectro de flutuações na resistência elétrica *versus* o campo magnético, para o vidro de spins  $\text{Ni}_{77}\text{Mn}_{23}$  (Keener e Weissman, 1996).

a linha GT na ausência de campos de anisotropia (linha pontilhada), notamos um comportamento interessante: para temperaturas em torno de  $T = J$ , o campo de anisotropia de primeira ordem  $D_1$  domina (o ordenamento vidro de spins longitudinal é acentuado), enquanto que para baixas temperaturas, o campo de anisotropia de segunda ordem  $D_2$  prevalece (o ordenamento vidro de spins transverso é favorecido, levando a um aumento na fase VS2). Como mostra a figura 2.14, todas as linhas cruzam-se em um mesmo valor da temperatura e campo magnético, sinalizando um cruzamento (*crossover*) entre estes dois regimes; o ponto onde todas as linhas se encontram parece ser independente da escolha de  $D_1$  e  $D_2$ , dependendo apenas de suas razões. Na figura 2.15, exibimos o caso  $D_2 = -D_1/2$ , que corresponde a  $D_2 = D'_2$  e  $D_2 < D''_2$ . Conforme esperado [ver equações (2.34) e (2.33)],  $\tilde{T}$  exibe um pequeno deslocamento para a direita para valores crescentes de  $D_1$ , enquanto nenhuma reentrância é observada.

Visto que a linha GT no plano campo magnético *versus* temperatura corresponde ao limite de validade da solução com simetria entre réplicas (Cragg *et al.*, 1982), os resultados

discutidos acima não serão alterados frente ao formalismo da quebra de simetria entre réplicas.

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo estudamos o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de campos de anisotropia uniaxiais e de um campo magnético uniforme, no limite de interações de alcance infinito. Investigamos o modelo através do método das réplicas. Discutimos diversos diagramas de fases dentro da aproximação de simetria entre réplicas.

Mostramos o surgimento de novas características nos diagramas de fases, devido aos campos de anisotropia. Observamos que para campo magnético nulo, o diagrama de fases no plano temperatura *versus*  $J_0$  pode ser distinto ou análogo ao do modelo SK, dependendo da escolha dos campos de anisotropia. Na presença do campo magnético, a linha GT no plano campo magnético *versus* temperatura, associada ao ordenamento do parâmetro de vidro de spins transverso, apresenta características interessantes devido aos campos de anisotropia uniaxiais. Em particular, constatamos uma transição de fases reentrante.

Esperamos que alguns dos nossos resultados possam ser aplicados, pelo menos qualitativamente, a sistemas reais; em particular, a alguns sistemas vidros de spins, para os quais uma diminuição da temperatura de congelamento com o campo magnético tem sido observada (Barbara *et al.*, 1981; Barbara e Malozemoff, 1983; Keener e Weissman, 1996), como exibidas nas figuras 2.16 e 2.17.



## Capítulo 3

# O Vidro de Spins $m$ -Vetorial na Presença de uma Anisotropia Cúbica

### 3.1 Introdução

Neste capítulo trataremos o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de um campo de anisotropia cúbica (preferência de orientações ao longo dos diversos eixos cartesianos) e de um campo magnético externo. Estudaremos o modelo no limite de interações de alcance infinito, obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussiana. A investigação será feita através do método das réplicas. Discutiremos o diagrama de fases no plano  $h/J$  versus  $T/J$  (linha GT), para diferentes valores do campo de anisotropia, utilizando a hipótese de simetria entre réplicas.

O capítulo será apresentado da seguinte maneira: na seção 3.2, definiremos o modelo e obteremos sua solução com simetria entre réplicas; na seção 3.3 discutiremos os diagramas de fases; na seção 3.4, apresentaremos nossas conclusões.

## 3.2 O Modelo e a Solução com Simetria entre Réplicas

Consideremos o modelo descrito pelo hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij)} J_{ij} \sum_{\mu} S_{i\mu} S_{j\mu} - D \sum_i \sum_{\mu} S_{i\mu}^4 - h \sum_i S_{i1} \quad , \quad (3.1)$$

onde as variáveis de spins e os somatórios são análogos aos definidos no capítulo 2. Os  $J_{ij}$ s são constantes de acoplamento aleatórias, obedecendo a distribuição de probabilidades gaussiana da equação (2.3), com  $J_0 = 0$ . O campo de anisotropia cúbica  $D$  privilegia os eixos cartesianos ( $D > 0$ ), ou as demais orientações ( $D < 0$ ). É importante notar que o termo  $D \sum_{\mu} S_{i\mu}^4$  corresponde à potência de ordem mais baixa nas variáveis de spins apresentando esta propriedade, uma vez que

$$\sum_{\mu} S_{i\mu}^2 = m \quad . \quad (3.2)$$

O procedimento para a obtenção da energia livre por spin, no formalismo das réplicas, é o mesmo utilizado no capítulo anterior, sendo o funcional  $g(M_1^{\alpha}, x^{\alpha}, q_1^{\alpha\beta}, q^{\alpha\beta})$  análogo ao da equação (2.7), com o hamiltoniano efetivo  $H_{eff}$  dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & \beta J_0 \sum_{\alpha} S_1^{\alpha} M_1^{\alpha} + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{\alpha} m (S_1^{\alpha})^2 x^{\alpha} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S_1^{\alpha} S_1^{\beta} q_1^{\alpha\beta} \\ & + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} \sum_{\mu \neq 1} S_{\mu}^{\alpha} S_{\mu}^{\beta} q^{\alpha\beta} + \beta D \sum_{\alpha} \sum_{\mu} (S_{\mu}^{\alpha})^4 + \beta h \sum_{\alpha} S_1^{\alpha} \quad . \quad (3.3) \end{aligned}$$

Considerando a solução com simetria entre réplicas, obtemos

$$\begin{aligned} \beta f = & \frac{(\beta J_0)}{2} (M_1^2 - m) + \frac{(\beta J)^2}{4} [m(m-1)x^2 + 2mx] \\ & - \frac{(\beta J)^2}{4} [q_1^2 - q^2 + m(1-q)^2] - \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu} \left[ \frac{du_{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u_{\mu}^2/2] \right] \ln \tilde{Z} \quad , \quad (3.4) \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{Z} = \text{Tr} \exp \left[ b S_1^2 + \sum_{\mu=1}^m (a_{\mu} S_{\mu} + c S_{\mu}^4) \right] \quad , \quad (3.5)$$

com

$$\begin{aligned} a_{\mu} &= \beta J q_{\mu}^{1/2} u_{\mu} + \beta h \delta_{\mu,1} \quad , \\ b &= \frac{(\beta J)^2}{2} [mx + q - q_1] \quad , \\ c &= \beta D \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

O traço na equação (3.5) é uma integral sobre uma hipersfera  $m$ -dimensional, sujeito ao vínculo da equação (3.2), podendo ser escrito na forma

$$\tilde{Z} = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 \exp(a_1 S_1 + b S_1^2 + c S_1^4) \int d\tilde{S}_{m-1} \delta \left[ \sum_{\mu \neq 1}^m S_\mu^2 - m \right] \exp \left[ \sum_{\mu \neq 1}^m (a_\mu S_\mu + c S_\mu^4) \right] .$$

A presença de anisotropias ao longo de todos os eixos cartesianos inviabiliza o emprego de coordenadas esféricas, como efetuado no capítulo anterior, uma vez que não podemos escrever uma equação análoga à equação (2.17).

Neste capítulo trataremos os casos  $m = 2$  (anisotropia planar) e  $m = 3$  (anisotropia cúbica), utilizando coordenadas cartesianas. Para o caso  $m = 2$ , temos

$$\begin{aligned} D \sum_i \sum_\mu S_{i\mu}^4 &= D \sum_i (S_{i1}^4 + S_{i2}^4) = D \sum_i [(S_{i1}^2 + S_{i2}^2)^2 - 2S_{i1}^2 S_{i2}^2] \\ &= D \sum_i (4 - 2S_{i1}^2 S_{i2}^2) = 4ND - 2D \sum_i S_{i1}^2 (2 - S_{i1}^2) \\ &= 4ND - 4D \sum_i S_{i1}^2 + 2D \sum_i S_{i1}^4 \end{aligned}$$

Concluimos então que este problema com  $m = 2$  é equivalente ao caso de duas anisotropias uniaxiais (ver capítulo 2) com  $D_1 = -4D$  e  $D_2 = 2D$ . Para o caso  $m \geq 3$  o termo de anisotropia pode ser reescrito como

$$D \sum_i \sum_\mu S_{i\mu}^4 = m^2 ND - 2D \sum_i \sum_{(\mu\nu)} S_{i\mu}^2 S_{i\nu}^2 ,$$

que corresponde a acoplamentos entre termos quadráticos de diferentes componentes. Na equação acima, o somatório  $\sum_{(\mu\nu)}$  se aplica aos pares distintos de coordenadas cartesianas; para o caso da anisotropia cúbica,  $\sum_{(\mu\nu)} S_{i\mu}^2 S_{i\nu}^2 = S_{i1}^2 S_{i2}^2 + S_{i1}^2 S_{i3}^2 + S_{i2}^2 S_{i3}^2$ .

Utilizando coordenadas cartesianas, podemos efetuar o traço da equação (3.5). Para o caso particular  $m = 3$ , ainda podemos escrever  $\tilde{Z}$  como

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dS_1 \exp(a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4) \left\{ \int_{-\sqrt{3-S_1^2}}^{\sqrt{3-S_1^2}} dS_2 \int_{-\Omega}^{\Omega} dS_3 \left[ \frac{1}{2(3-S_1^2-S_2^2)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\delta[S_3 - (3-S_1^2-S_2^2)^{1/2}] + \delta[S_3 + (3-S_1^2-S_2^2)^{1/2}]) \exp(a_2 S_2 + a_3 S_3 + c(S_2^4 + S_3^4)) \right] \right\} , \end{aligned}$$

sendo  $\Omega$  o valor máximo permitido para  $S_3$ . Considerando  $a_2 = a_3 \equiv a$  (ou seja, os parâmetros vidros de spins transversos  $q_2 = q_3 \equiv q$ ), podemos reescrever a equação acima

na forma

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = & \exp(9c) \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dS_1 \exp[f(S_1)] \int_{\sqrt{3-S_1^2}}^{\sqrt{3-S_1^2}} dS_2 \exp[\tilde{h}(S_1, S_2)] \\ & \times \frac{\cosh[a(3-S_1^2-S_2^2)^{1/2}]}{(3-S_1^2-S_2^2)^{1/2}} \quad , \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} f(S_1) &= a_1 S_1 + (b_1 - 6c) S_1^2 + 2c S_1^4 \quad ; \\ \tilde{h}(S_1, S_2) &= a S_2 + 2c S_2^4 - 2c(3 - S_1^2) S_2^2 \quad . \end{aligned}$$

A presença do campo magnético uniforme induz os parâmetros  $x$  e  $q_1$ , permitindo uma transição de fases associada com o parâmetro de ordem vidro de spins transverso  $q$ , sinalizada pela linha Gabay-Toulouse. As equações que definem esta linha (obtidas de forma análoga ao desenvolvimento do Capítulo 2) são

$$\left(\frac{T}{J}\right)^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2) \left(3 - \frac{\tilde{P}_{02}}{\tilde{P}_{00}}\right)^2 \quad , \quad (3.8)$$

$$q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2) \left(\frac{\tilde{P}_{01}}{\tilde{P}_{00}}\right)^2 \quad , \quad (3.9)$$

$$1 + 2x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2) \frac{\tilde{P}_{02}}{\tilde{P}_{00}} \quad , \quad (3.10)$$

sendo

$$\tilde{P}_{0t} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dS_1 S_1^t F(S_1) \exp(a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + 2c S_1^4) \quad , \quad (3.11)$$

com

$$F(S_1) = \int_{\sqrt{3-S_1^2}}^{\sqrt{3-S_1^2}} dS_2 \frac{\exp(2c S_2^4 - 2c(3 - S_1^2) S_2^2)}{\sqrt{3 - S_1^2 - S_2^2}} \quad . \quad (3.12)$$

Nas equações acima,

$$a_1 = \beta J \sqrt{q_1} v + \beta h \quad , \quad b_1 = \frac{(\beta J)^2}{2} (3x - q_1) \quad \text{e} \quad c = \beta D \quad . \quad (3.13)$$

### 3.3 Diagramas de Fases

Como visto na seção anterior, a anisotropia planar  $D$  ( $m = 2$ ) corresponde ao problema de duas anisotropias uniaxiais competitivas, discutido no capítulo anterior, com  $D_1 = -4D$  e  $D_2 = 2D$ , ou seja,  $D_2/D_1 = -1/2$ . As linha GT para valores típicos de  $D$  são exibidas na figura 3.1; para  $D > 0$  temos  $D_1 < 0$  e  $D_2 > 0$ , enquanto que o caso  $D < 0$ , corresponde a  $D_1 > 0$  e  $D_2 < 0$ , considerado no capítulo 2 (ver figura 2.15).

Para o caso  $m = 3$ , podemos resolver as equações (3.8)-(3.10) e construir os diagramas de fases no plano  $h/J$  versus  $T/J$  para diversos valores do campo de anisotropia. Em geral, este conjunto de equações foi resolvido numericamente. No regime de campos baixos ( $h, D \ll J$ ) obtivemos, também, resultados analíticos, de forma análoga ao desenvolvimento efetuado no apêndice B. As expansões em séries de potências fornecem os seguintes resultados,

$$q_1 = (\beta J)^2 q_1 - 2(\beta J)^4 q_1^2 + \frac{12}{5}(\beta J)^4 x q_1 + (\beta J)^2 \left(\frac{h}{J}\right)^2 + \dots, \quad (3.14)$$

$$x = \frac{3}{5}(\beta J)^2 x + \frac{9}{35}(\beta J)^4 x^2 - \frac{1}{5}(\beta J)^4 q_1^2 + \frac{1}{5}(\beta J)^2 \left(\frac{h}{J}\right)^2 + \frac{108}{175}(\beta J)^3 x \frac{D}{J} + \frac{108}{385}(\beta J)^2 \left(\frac{D}{J}\right)^2 \dots, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{T}{J}\right)^2 = 1 - \frac{6}{5}(\beta J)^2 x + \frac{84}{175}(\beta J)^4 q_1^2 - \frac{27}{175}(\beta J)^4 x^2 - \frac{216}{175}(\beta J)^3 x \frac{D}{J} - \frac{2}{5}(\beta J)^2 \left(\frac{h}{J}\right)^2 - \frac{216}{385}(\beta J)^2 \left(\frac{D}{J}\right)^2 + \dots. \quad (3.16)$$

Resolvendo as equações (3.14)-(3.16) de forma semelhante ao procedimento utilizado no apêndice B, encontramos

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{h}{J} \right| + \dots, \quad (3.17)$$

$$x = \frac{54}{77} \left(\frac{D}{J}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{J}\right)^2 \dots, \quad (3.18)$$

$$\frac{T}{J} = \frac{\bar{T}}{J} - \frac{23}{100} \left(\frac{h}{J}\right)^2 + \dots, \quad (3.19)$$

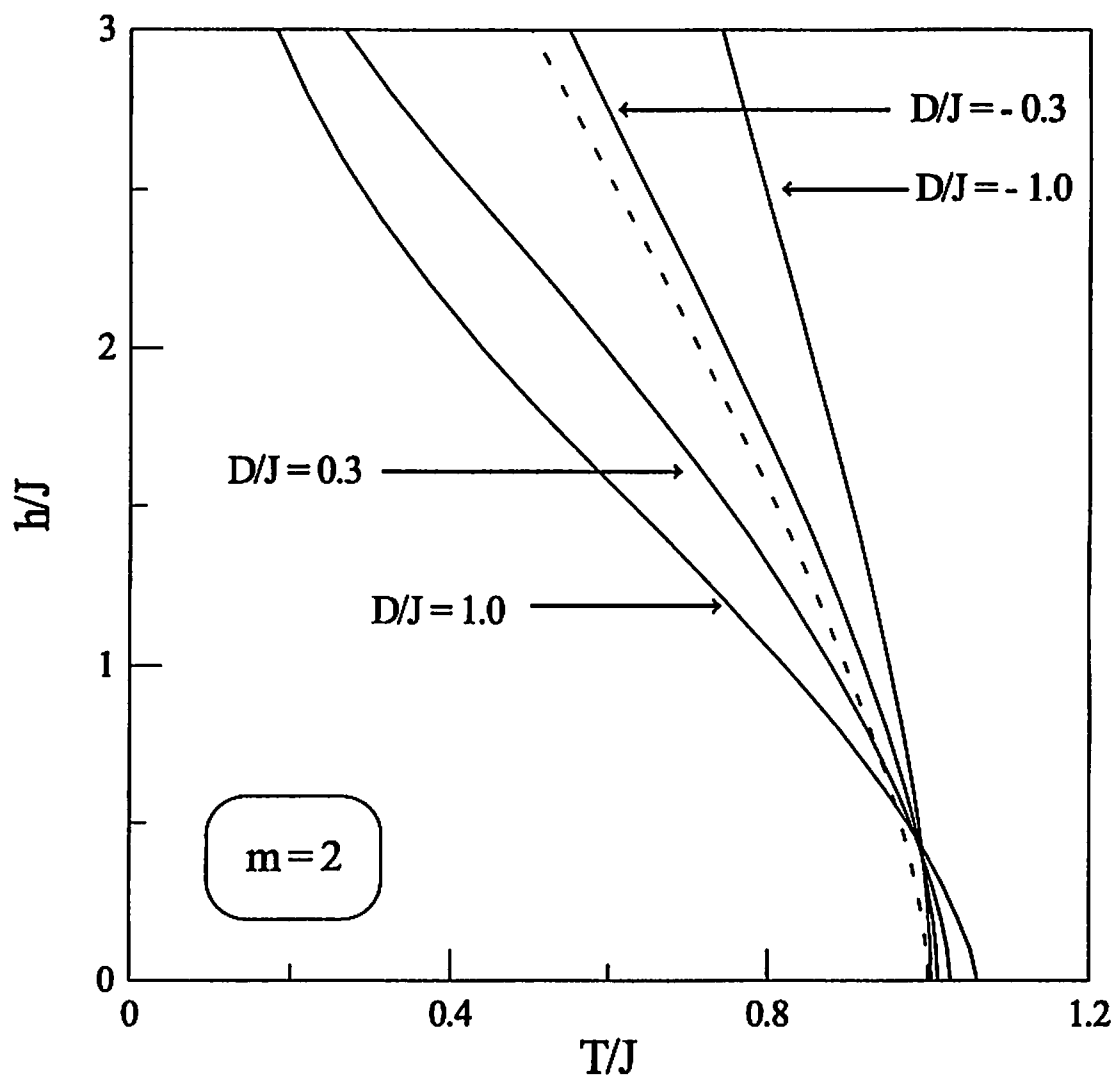


Figura 3.1: Linhas de Gabay-Toulouse para o vidro de spins  $m$ -vetorial ( $m = 2$ ) na presença de uma anisotropia planar. Apresentamos as linhas GT para valores distintos do campo de anisotropia:  $D/J = \pm 0.3$  e  $D/J = \pm 1.0$ . A curva pontilhada representa a linha GT para  $D/J = 0$ .

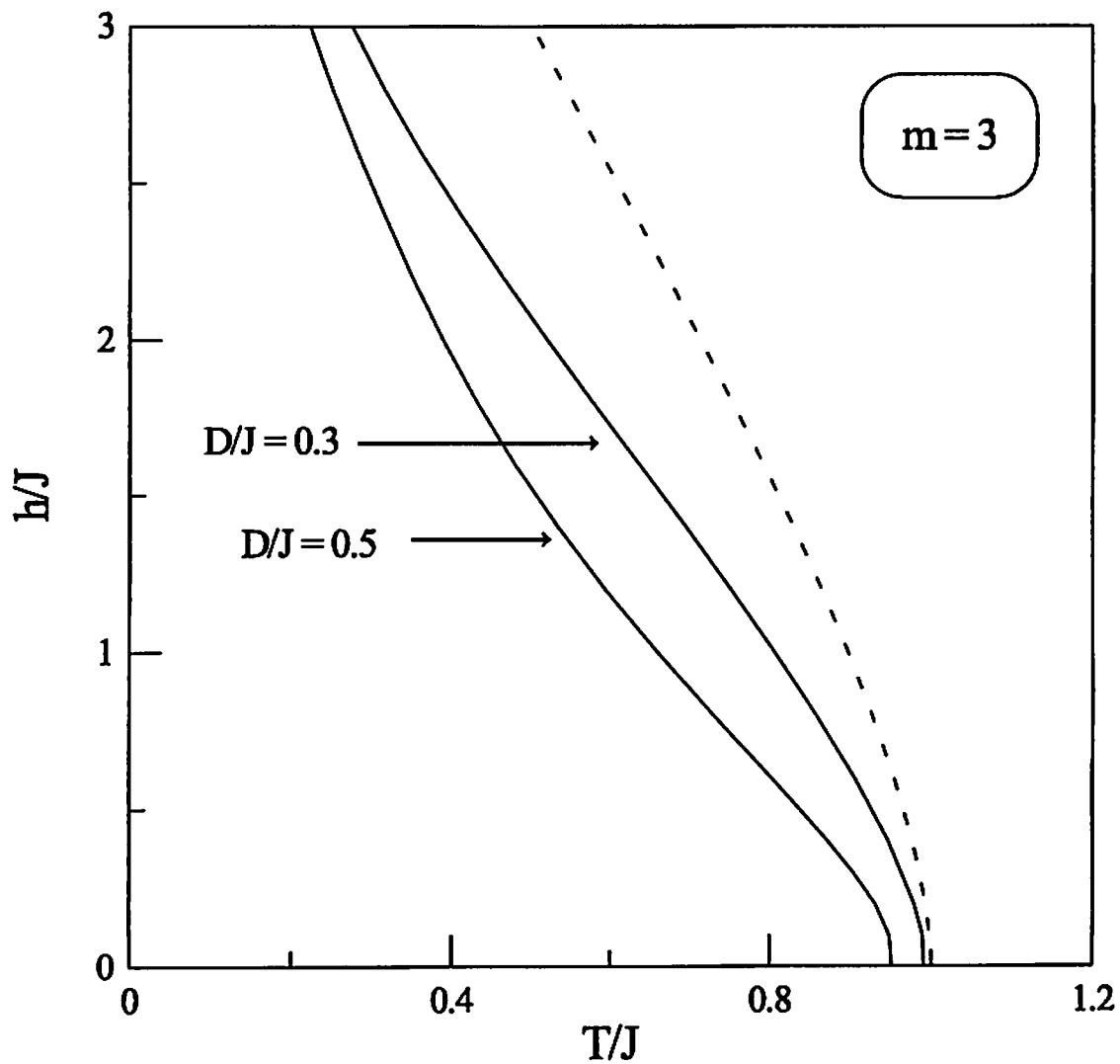


Figura 3.2: Linhas de Gabay-Toulouse para o vidro de spins  $m$ -vetorial ( $m = 3$ ) na presença de um campo de anisotropia cúbica. Os valores do campo de anisotropia são:  $D/J = 0.3$ , e  $0.5$ . A curva pontilhada representa a linha GT para  $D/J = 0$ .

sendo  $\tilde{T}$  a temperatura onde a linha GT encontra o eixo  $h = 0$ ,

$$\frac{\tilde{T}}{J} = 1 - \frac{54}{77} \left(\frac{D}{J}\right)^2 + \dots \quad (3.20)$$

Na figura 3.2 apresentamos a linha GT para dois valores positivos do campo de anisotropia,  $D/J = 0.3$  e  $0.5$ . Observamos que para  $D/J > 0$  a linha GT move-se para a esquerda, favorecendo a ordem longitudinal e dificultando o ordenamento transversal. Estes deslocamentos podem ser vistos analiticamente na equação (3.20) para valores pequenos de  $D$ : a temperatura  $\tilde{T}$  diminui com  $D$ .

É importante salientar que a instabilidade da solução com simetria entre réplicas acontece na linha GT (Cragg *et al.*, 1982); portanto, o procedimento de quebra da simetria entre réplicas não deve alterar as curvas exibidas nas figuras 3.1 e 3.2

### 3.4 Conclusões

Neste capítulo estudamos o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de um campo de anisotropia  $D$  favorecendo orientações segundo os eixos cartesianos e de um campo magnético uniforme, utilizando o método das réplicas. Na aproximação de simetria entre réplicas, obtivemos o diagrama de fases no plano campo magnético *versus* temperatura para diversos valores do campo de anisotropia. Mostramos que o caso  $m = 2$  (anisotropia planar) corresponde a duas anisotropias uniaxiais competitivas, sendo portanto qualitativamente análogo ao problema estudado no capítulo 2 desta tese. Para  $m = 3$  (anisotropia cúbica), encontramos pequenas modificações com relação à linha de Gabay-Toulouse; para o caso  $D = 0$ , ou seja, um deslocamento para a esquerda (favorecendo o ordenamento longitudinal).



## Capítulo 4

# Efeitos de Campo Aleatório no Vidro de Spins de Ising Antiferromagnético

### 4.1 Introdução

Um dos grandes interesses no estudo dos sistemas desordenados consiste na elaboração de modelos teóricos que sejam apropriados para descrever sistemas experimentais. Estudos experimentais realizados em ferromagnetos diluídos  $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$  (Bertrand *et al.*, 1982; zen Wong *et al.*, 1985a,b) e em compostos antiferromagnéticos mistos  $\text{Fe}_x\text{Mn}_{1-x}\text{TiO}_3$  (Yoshizawa *et al.*, 1987, 1989) mostraram evidências do comportamento vidro de spins para uma certa variação de  $x$ . Nestas faixas de concentrações, tais sistemas são considerados vidros de spins de Ising de curto alcance: a competição das interações antiferromagnéticas e ferromagnéticas de curto alcance são responsáveis pela frustração, enquanto a forte anisotropia uniaxial mantém os spins alinhados ao longo da direção axial.

Para uma descrição teórica destes sistemas, foram propostas generalizações do modelo Sherrington e Kirkpatrick (1975), numa versão de duas subredes, com interações aleatórias com favorecimento antiferromagnético entre os spins inter-subredes e entre os spins intra-subredes podendo ser nulas (Korenblit e Shender, 1985; Fyodorov *et al.*, 1987a), ou com favorecimento ferromagnético (Fyodorov *et al.*, 1987b; Takayma, 1988), na tentativa de

explicar os ordenamentos antiferromagnético e de vidro de spins. A transição associada com a fase antiferromagnética é caracterizada pelo surgimento da magnetização alternada (ou "staggered") (Kincaid e Cohen, 1975), enquanto que a transição para a fase vidro de spins é sinalizada pela instabilidade da solução com simetria entre réplicas (de Almeida e Thouless, 1978). Na fase vidro de spins, a solução apropriada deve apresentar quebra de simetria entre réplicas (Parisi, 1980a,b,c), descrita através de um número infinito de parâmetros de ordem, ou seja, uma função parâmetro de ordem. Experimentalmente, a transição para a fase vidro de spins é freqüentemente identificada pela ocorrência de efeitos de irreversibilidade e histerese. Resultados experimentais, nos diagramas de fases no plano campo magnético *versus* temperatura, em  $\text{Fe}_x\text{Mn}_{1-x}\text{TiO}_3$  (Yoshizawa *et al.*, 1994), bem como a linha de instabilidade de Almeida e Thouless (AT) estão qualitativamente em acordo com os resultados obtidos a partir da aproximação de campo médio.

Campos aleatórios são em geral produzidos em antiferromagnetos diluídos quando submetidos a um campo magnético uniforme (Fishman e Aharony, 1979; Cardy, 1984). Na verdade, comportamentos dos tipos vidro de spins e de campos aleatórios foram encontrados em diversos sistemas, como por exemplo,  $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$  (Bertrand *et al.*, 1982; zen Wong *et al.*, 1982). O composto antiferromagnético misto  $\text{Fe}_x\text{Mn}_{1-x}\text{TiO}_3$  não é diluído, mas acredita-se que a desigualdade entre os momentos magnéticos do Fe e do Mn também gera um campo aleatório efetivo (Yoshizawa *et al.*, 1994). Ao contrário destes sistemas, o antiferromagneto diluído  $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$  quase não apresenta frustração e apenas o comportamento de campo aleatório foi observado em pequenas diluições (Belanger, 1992). No entanto, de acordo com recentes investigações teóricas (Raposo *et al.*, 1995; Raposo e Coutinho-Filho, 1998), pequenas frustrações podem provocar efeitos importantes para altas diluições no  $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$ , levando à ocorrência da fase vidro de spins, conforme observações experimentais (Belanger *et al.*, 1991; Montenegro *et al.*, 1991).

Estas considerações nos motivaram a estudar os efeitos de campos aleatórios no modelo SK antiferromagnético em duas subredes, já investigado na presença de um campo magnético uniforme (Korenblit e Shender, 1985; Fyodorov *et al.*, 1987a,b; Takayama, 1988). Em particular, investigaremos os efeitos produzidos por campos aleatórios, obedecendo distribuições de probabilidades gaussianas, nos diagramas de fases do modelo

(Vieira *et al.*, 1999b). A investigação será feita utilizando o método das réplicas. O capítulo será dividido da seguinte maneira: na seção 4.2, definiremos o modelo; na seção 4.3 apresentaremos sua solução com simetria entre réplicas; na seção 4.4, discutiremos os diagramas de fases e na seção 4.5, apresentaremos nossas conclusões .

## 4.2 O Modelo

Consideremos uma generalização do modelo SK com duas subredes, na presença de campos magnéticos uniforme e aleatório, sendo as interações entre os spins inter-subredes aleatórias com favorecimento antiferromagnético, enquanto que as dos spins intra-subredes podem ser nulas (Korenblit e Shender, 1985; Fyodorov *et al.*, 1987a), ou aleatórias com favorecimento ferromagnético (Fyodorov *et al.*, 1987b; Takayama, 1988). O hamiltoniano que descreve este modelo é dado por

$$\mathcal{H} = \sum_{i \in A, j \in B} J_{ij} S_i S_j - \sum_{i, j \in A, B} J'_{ij} S_i S_j - H \sum_i S_i - \sum_i h_i S_i \quad , \quad (4.1)$$

onde  $A$  e  $B$  representam as duas subredes com  $N$  sítios cada,  $S_i = \pm 1$  e  $H$ , o campo magnético uniforme. A primeira soma é efetuada sobre todos os pares distintos de spins pertencendo a diferentes subredes, a segunda aplica-se a todos pares de spins distintos pertencendo às subredes  $A$  e  $B$ , enquanto que as duas últimas são realizadas sobre todos os spins das duas subredes. As constantes de troca  $J_{ij}$  e  $J'_{ij}$  (no caso em que estas últimas são não nulas), bem como o campo aleatório  $h_i$ , obedecem distribuições de probabilidades gaussianas

$$P(J_{ij}) = \left( \frac{N}{2\pi J^2} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-N(J_{ij} - J_0/N)^2}{2J^2} \right] \quad ,$$

$$P(J'_{ij}) = \left( \frac{N}{2\pi J'^2} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-N(J'_{ij} - J'_0/N)^2}{2J'^2} \right] \quad ,$$

$$P(h_i) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{h_i^2}{2\sigma^2} \right) \quad ,$$

com  $J_0, J'_0 \geq 0$ , de modo a assegurar um favorecimento ferromagnético intra-subredes e antiferromagnético inter-subredes.

Usando o método das réplicas, o procedimento usual (Binder e Young, 1986) nos leva à seguinte equação para a energia livre

$$\beta f = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{2n} \min g(m_A^\alpha, m_B^\beta, m^\alpha, q_A^{\alpha\beta}, q_B^{\alpha\beta}, q_1^{\alpha\beta}) \quad , \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} g(m_A^\alpha, m_B^\beta, m^\alpha, q_A^{\alpha\beta}, q_B^{\alpha\beta}, q_1^{\alpha\beta}) = & - \left[ \frac{(\beta J)^2}{2} + \frac{(\beta J')^2}{2} + (\beta \sigma)^2 \right] n - \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 \\ & + \frac{(\beta J_0 + \beta J'_0)}{2} \sum_{\alpha} [(m_A^\alpha)^2 + (m_B^\alpha)^2] + \frac{|(\beta J')^2 - (\beta J)^2|}{2} \sum_{(\alpha\beta)} [(q_A^{\alpha\beta})^2 + (q_B^{\alpha\beta})^2] \\ & + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q_1^{\alpha\beta})^2 - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp\{H_{eff}^A\} - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp\{H_{eff}^B\} \quad , \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{eff}^{A,B} = & \beta H \sum_{\alpha} S_{\alpha} + (\beta \sigma)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} + (\beta J'_0 + \beta J_0) \sum_{\alpha} m_{A,B}^{\alpha} S^{\alpha} - \beta J_0 \sum_{\alpha} m^{\alpha} S^{\alpha} \\ & + [(\beta J')^2 - (\beta J)^2] \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} q_{A,B}^{\alpha\beta} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} q_1^{\alpha\beta} \quad . \quad (4.4) \end{aligned}$$

Nas equações acima,  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ) são índices de réplicas;  $\text{Tr}_{\alpha}$  representa um traço sobre as variáveis de spins de cada uma das réplicas e  $\sum_{(\alpha\beta)}$  denota uma soma sobre pares distintos de réplicas.

As equações de estados são determinadas usando as condições de equilíbrio

$$\frac{\partial f}{\partial m^{\alpha}} = 0 \Rightarrow m^{\alpha} = \langle S^{\alpha} \rangle_A + \langle S^{\alpha} \rangle_B \quad , \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_{A,B}^{\alpha}} = 0 \Rightarrow m_{A,B}^{\alpha} = \langle S^{\alpha} \rangle_{A,B} \quad , \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1^{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow q_1^{\alpha\beta} = \langle S^{\alpha} S^{\beta} \rangle_A + \langle S^{\alpha} S^{\beta} \rangle_B \quad , \quad (\alpha / \beta) \quad , \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_{A,B}^{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow q_{A,B}^{\alpha\beta} = \langle S^{\alpha} S^{\beta} \rangle_{A,B} \quad , \quad (\alpha / \beta) \quad . \quad (4.8)$$

onde  $\langle \rangle$  representam médias térmicas com relação aos "hamiltonianos efetivos" definidos na equação (4.4).

A seguir apresentaremos a solução com simetria entre réplicas.

### 4.3 A Solução com Simetria entre Réplicas

A solução com simetria entre réplicas é obtida supondo que os parâmetros são independentes dos índices de réplicas,

$$\begin{aligned} m^\alpha &= m \quad ; \quad m_A^\alpha = m_A \quad ; \quad m_B^\alpha = m_B \quad ; \quad \forall \alpha \quad , \\ q^{\alpha\beta} &= q \quad ; \quad q_A^{\alpha\beta} = q_A \quad ; \quad q_B^{\alpha\beta} = q_B \quad ; \quad \forall (\alpha\beta) \quad . \end{aligned}$$

Usando a escolha acima, reescrevemos a energia livre por spin na equação (4.2) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \beta f &= -\frac{(\beta J)^2}{8} [(1 - q_A)^2 + (1 - q_B)^2] - \frac{(\beta J)^2}{4} [(1 - q_A)(1 - q_B)] \\ &+ \frac{\beta J_0^2}{4} [m_A^2 + m_B^2] - \frac{\beta J_0}{2} m_A m_B - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \ln(2 \cosh \mathcal{E}_A) \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \ln(2 \cosh \mathcal{E}_B) \quad , \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde

$$\mathcal{E}_{A,B} = \beta \left\{ H + J_0 m_{A,B} - J_0 m_{B,A} + [J^2 q_{A,B} + J^2 q_{B,A} + \sigma^2]^{1/2} z \right\} \quad . \quad (4.10)$$

Os parâmetros de ordem podem ser expressos como

$$m_{A,B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \tanh \mathcal{E}_{A,B} \quad , \quad (4.11)$$

$$q_{A,B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \tanh^2 \mathcal{E}_{A,B} \quad . \quad (4.12)$$

Devido a presença dos campos magnéticos (uniforme e aleatório), os parâmetros de vidros de spins  $q_{A,B}$  são sempre induzidos; portanto, a transição para a fase vidro de spins

é caracterizada pelo surgimento da instabilidade da solução com simetria entre réplicas (de Almeida e Thouless, 1978). A análise de estabilidade de AT é análoga ao caso do vidro de spins com favorecimento antiferromagnético na ausência de campo aleatório (Korenblit e Shender, 1985) (ver apêndice D). No presente caso, a linha AT é dada por

$$\left[ T^2 - J'^2 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \right] \left[ T^2 - J'^2 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \right] - J^4 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle = 0 \quad , \quad (4.13)$$

onde

$$\langle (\dots) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} (\dots) \exp(-z^2/2) \quad . \quad (4.14)$$

A análise de estabilidade da solução paramagnética (dentro da solução com simetria entre réplicas) nos leva a equação que define a fronteira entre as fases paramagnética e antiferromagnética ( $m_A = m_B = m$ ;  $q_A = q_B = q$ ) (ver apêndice E),

$$\left[ 1 - \frac{(J'_0 + J_0)}{T} a \right] \left[ 1 + \frac{(J'^2 - J^2)}{T^2} W \right] + 2 \frac{(J'^2 - J^2)(J'_0 + J_0)}{T^3} V^2 = 0 \quad , \quad (4.15)$$

$$a = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \rangle \quad , \quad (4.16)$$

$$V = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \text{tgh} \mathcal{E} \rangle \quad , \quad (4.17)$$

$$W = 2 \langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \rangle - 3 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E} \rangle \quad (4.18)$$

$$\mathcal{E} = \beta \left[ H + (J'_0 - J_0)m + \left( (J'^2 + J^2)q + \sigma^2 \right)^{1/2} z \right] \quad . \quad (4.19)$$

Na seção seguinte discutiremos os diagramas de fases, obtidos a partir da solução das equações apresentadas acima.

## 4.4 Diagramas de Fases

Nesta seção, discutiremos os efeitos dos campos magnéticos uniforme e aleatórios gaussianos sobre os diagramas de fases do vidro de spins de Ising com favorecimento antiferromagnético, na aproximação de simetria entre réplicas. Trabalharemos em unidades de temperaturas tais que  $\beta = 1/T$  ( $k_B = 1$ ).

#### 4.4.1 Caso $H = 0$ e $\sigma = 0$

Na ausência dos campos magnéticos, e com uma escolha de unidades reduzidas adequadas, o diagrama de fases é análogo ao do modelo SK com favorecimento ferromagnético, desde que troquemos a fase ferromagnética pela antiferromagnética. No plano temperatura *versus* interação média (ver figura 4.1), o diagrama de fases é composto pelas seguintes fases: Paramagnética (P) ( $m_A = m_B = 0$ ;  $q_A = q_B = 0$ ); Antiferromagnética Mista (AF') ( $m_A = -m_B$ ;  $q_A \neq 0$ ;  $q_B \neq 0$ , com quebra da simetria entre réplicas); Antiferromagnética ( $\Lambda F$ ) ( $m_A = -m_B$ ;  $q_A \neq 0$ ;  $q_B \neq 0$ , com simetria entre réplicas) e Vidro de Spins (VS) ( $m_A = m_B = 0$ ;  $q_A \neq 0$ ;  $q_B \neq 0$ ). A seguir determinaremos as fronteiras críticas.

##### Fronteira Vidro de Spins-Antiferromagnética Mista (VS-AF')

Esta fronteira é obtida a partir da expressão da energia livre, dada pela equação (4.9); efetuando uma expansão de Landau em potências de  $m$ , nas vizinhanças da linha crítica ( $m_A = -m_B = m$  e  $q_A = q_B = q$ ), obtemos

$$\beta f = -\frac{(\beta J)^2}{4}(1-q)^2 - 2\langle \ln(2\cosh \mathcal{E}) \rangle + C_2 m^2 + O(m^4) \quad ,$$

com

$$C_2 = \frac{\beta J'_0 + \beta J_0}{2} - \frac{\beta J_0'^2 + \beta J_0^2}{2} \langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \rangle \quad . \quad (4.20)$$

A fronteira VS-AF' é determinada da condição,  $C_2 = 0$ . Portanto, as equações que determinam esta fronteira, são

$$\frac{T}{\sqrt{J'^2 + J^2}} = \frac{J'_0 + J_0}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \text{sech}^2 \mathcal{E} \quad , \quad (4.21)$$

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) \tanh^2 \mathcal{E} \quad , \quad (4.22)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{J'^2 + J^2} \beta q^{1/2} z \quad .$$

### Fronteira Paramagnética-Antiferromagnética (P-AF)

Esta fronteira é determinada a partir da equação (4.21), com  $q = 0$ ,

$$\frac{T}{\sqrt{J'^2 + J^2}} = \frac{J'_0 + J_0}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \quad (4.23)$$

### Fronteira Antiferromagnética-Antiferromagnética Mista (AF-AF')

Esta fronteira é obtida através da análise de estabilidade de Almeida-Thouless, equação (4.13), com  $H = \sigma = 0$ . As coordenadas do ponto multicrítico, onde as fases P, AF, AF' e VS se encontram, são dadas por  $t = T/\sqrt{J'^2 + J^2} = 1$  e  $j = (J'_0 + J_0)/\sqrt{J'^2 + J^2} = 1$ ; a fronteira AF'-VS toca o eixo  $t = 0$  em  $j = \sqrt{\pi/2}$  para quaisquer valores de  $J'$ ,  $J$ ,  $J'_0$ ,  $J_0$ . O diagrama de fases é análogo ao modelo SK, com a fase ferromagnética substituída pela fase antiferromagnética, como mostra a figura 4.1.

#### 4.4.2 Caso $H = 0$ e $\sigma > 0$

A variância do campo aleatório ( $\sigma^2$ ) desempenha o papel de um campo que atua nos parâmetros  $q_A$  e  $q_B$ . Portanto, não temos transição associada aos parâmetros de vidro de spins. Na figura 4.2 (mesmas unidades utilizadas na figura 4.1) apresentamos o diagrama de fases para  $\sigma_0 = 0.5$  e  $\sigma_0 = 1.0$  ( $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{J'^2 + J^2}$ ), mostrando também as linhas de instabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A seguir determinaremos as fronteiras críticas, mostradas na figura 4.2.

### Fronteira Paramagnética-Antiferromagnética (P-AF)

Esta fronteira é obtida das equações (4.21) e (4.22) com

$$\varepsilon = \beta\sqrt{J'^2 + J^2} \left[ q + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \right)^2 \right]^{1/2} z \quad (4.24)$$

as quais podem ser resolvidas analiticamente, em alguns regimes:

a) Altas Temperaturas

$$\frac{T}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \simeq \frac{J'_0 + J_0}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \left[ 1 - \frac{J'^2 + J^2}{(J'_0 + J_0)^2} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \right)^2 \right] \quad ; \quad (4.25)$$



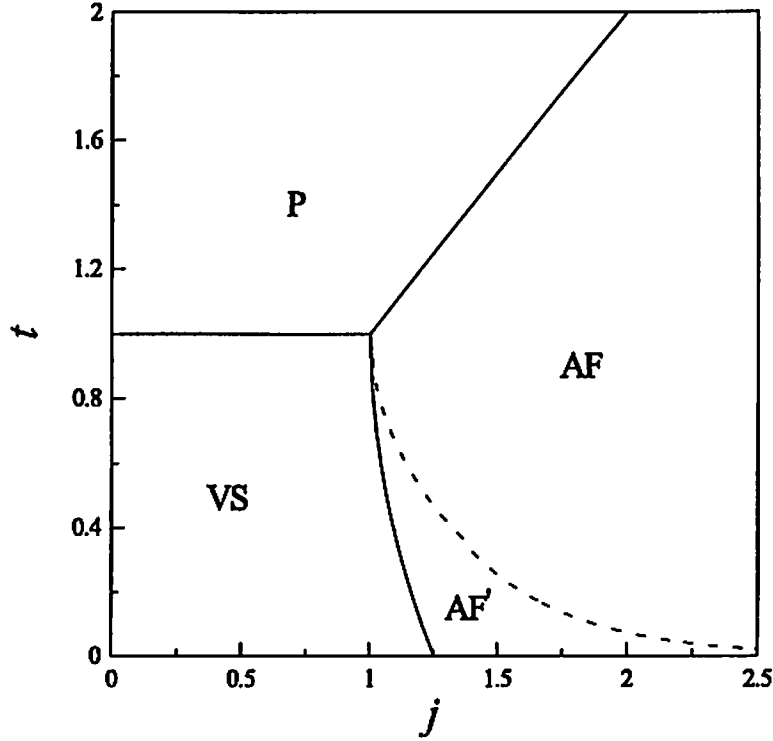


Figura 4.1: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising antiferromagnético, no plano temperatura *versus* interação média (em unidades de  $\sqrt{J'^2 + J^2}$ ;  $t = T/\sqrt{J'^2 + J^2}$ ,  $j = (J_0 + J'_0)/\sqrt{J'^2 + J^2}$ ). As várias fases são: Paramagnética (P), Antiferromagnética (AF), Vidro de Spins (VS) e Antiferromagnética Mista (AF'). A linha pontilhada representa a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas.

#### b) Baixas Temperaturas

$$\frac{T}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \simeq \pi \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \right)^2 \right]^2 \left\{ \frac{\sqrt{J'^2 + J^2}}{J'_0 + J_0} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (4.26)$$

o que nos dá para  $T = 0$ ,

$$\frac{J'_0 + J_0}{\sqrt{J'^2 + J^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{J'^2 + J^2}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.27)$$

As fronteiras de instabilidades de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas (curvas pontilhadas na figura 4.2), são obtidas a partir da equação (4.13), com  $H = 0$ . Abaixo destas linhas, a condição de estabilidade é violada;

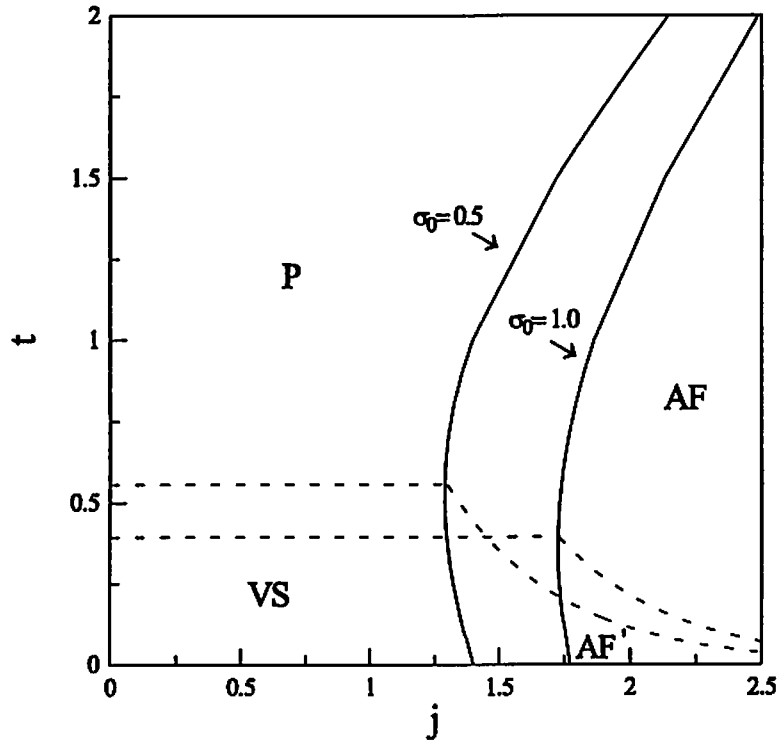


Figura 4.2: Diagrama de fases para o vidro de spins de Ising antiferromagnético na presença de um campo aleatório gaussiano, para  $\sigma_0 = 0.5$  e  $\sigma_0 = 1.0$  ( $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{J'^2 + J^2}$ ). As linhas pontilhadas representam em cada caso, a instabilidade de Almeida-Thouless, sinalizando o limite de validade da solução com simetria entre réplicas. A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases, assim como as unidades de temperatura e interação média, são as mesmas definidas na figura 4.1.

a região da fase paramagnética onde ocorre tal instabilidade é usualmente denominada de fase vidro de spins, enquanto que a região instável da fase antiferromagnética é denominada de antiferromagnética mista (caracterizada por ordenamento antiferromagnético e instabilidade da solução com simetria entre réplicas). À medida que a variância ( $\sigma^2$ ) aumenta observamos que a fase paramagnética torna-se dominante, deslocando as fases antiferromagnéticas (AF e AF') para a região de  $J'_0 + J_0$  crescente e achatando a fase vidro de spins para a região de baixas temperaturas. Nossos resultados estão em acordo com trabalhos anteriores sobre o modelo SK com favorecimento ferromagnético, na presença de campo aleatório com distribuição gaussiana simétrica (Soares *et al.*, 1994).

### 4.4.3 Caso $H \neq 0$ e $\sigma \neq 0$

Neste caso, consideraremos separadamente as situações em que as interações intrasubredes são nulas ( $J' = J'_0 = 0$ ), ou aleatórias com favorecimento ferromagnético ( $J', J'_0 > 0$ ). Em ambos os casos apresentaremos diagramas de fases no plano temperatura *versus* campo magnético.

#### 1) Caso $J' = 0, J'_0 = 0$

Apresentamos os diagramas de fases no plano temperatura *versus* campo magnético (em unidades de  $J$ ), para valores típicos de  $J_0/J$  e  $\sigma/J$  nas figuras 4.3 e 4.4. A nomenclatura utilizada para classificar as diversas fases dos diagramas é a mesma utilizada nas figuras 4.1 e 4.2. A seguir, discutiremos as fronteiras críticas.

#### Fronteira Paramagnética-Antiferromagnética

Esta fronteira é obtida a partir da equação (4.15), com  $J' = J'_0 = 0$ , e pode ser reescrita como

$$\left(\frac{T}{J}\right)^3 - \frac{J_0}{J} \left(\frac{T}{J}\right)^2 a + \frac{T}{J} W - \frac{J_0}{J} (2V^2 - aW) = 0 \quad . \quad (4.28)$$

#### Fronteiras de Instabilidades (Linhas AT)

Neste caso, as fronteiras de instabilidades são obtidas a partir da equação (4.13) com  $J' = J'_0 = 0$ , resultando em

$$\left(\frac{T}{J}\right)^4 = \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \quad . \quad (4.29)$$

Escolhendo valores de  $J_0/J$  no intervalo  $1 \leq J_0/J \leq \sqrt{\pi/2}$  ou  $J_0/J > \sqrt{\pi/2}$  os diagramas de fases apresentam comportamentos distintos (como pode ser visto nas figuras 4.3 e 4.4). Notamos que aumentando a largura da distribuição do campo aleatório, as fases antiferromagnéticas (AF e AF') são reduzidas; para valores de  $\sigma$  suficientemente grandes, tais fases são totalmente destruídas.

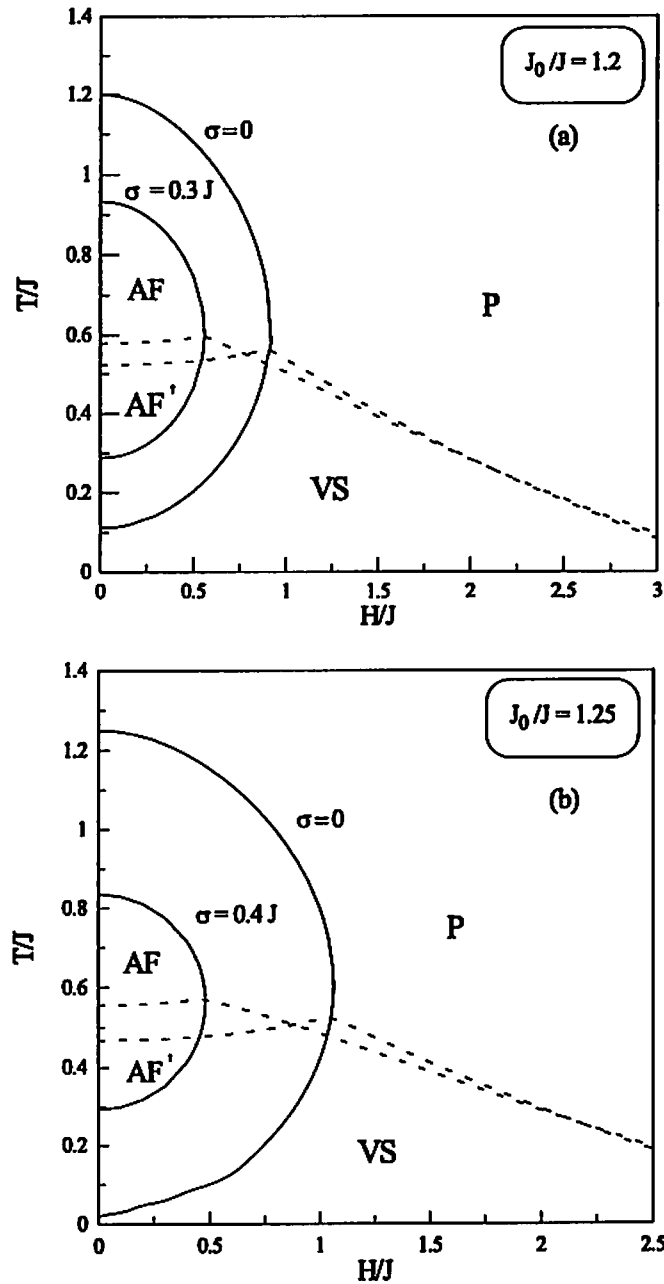


Figura 4.3: Diagramas de fases no plano temperatura *versus* campo magnético para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético, na presença de um campo aleatório gaussiano, com interações intra-subredes nulas. (a)  $\sigma = 0.3J$ ,  $J_0 = 1.2J$ ; (b)  $\sigma = 0.4J$ ,  $J_0 = 1.25J$ . Para comparação, exibimos também os casos  $\sigma = 0$  (Korenblit e Shender, 1985). As linhas pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linha AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1.

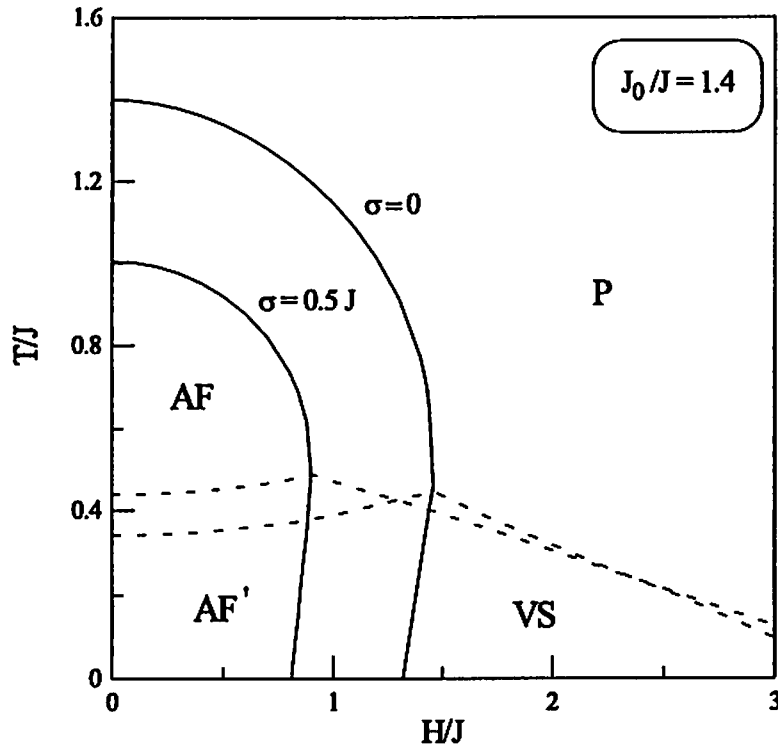


Figura 4.4: Diagrama de fases no plano temperatura *versus* campo magnético para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético, na presença de um campo aleatório gaussiano, com as interações intra-subredes nulas, para o caso  $\sigma = 0.5J$ ,  $J_0 = 1.4J$ . Para comparação, exibimos também o caso  $\sigma = 0$  (Korenblit e Shender, 1985). As linhas pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1.

## 2) Caso $J'$ , $J'_0 > 0$

Discutiremos os diagramas de fases no plano temperatura *versus* campo magnético (em unidades tais que  $J'_0 + J_0 = 1$ ), para o caso em que as interações intra-subredes são aleatórias com favorecimento ferromagnético. As linhas de instabilidades da solução com simetria entre réplicas (linhas AT) e as fronteiras críticas separando as fases Paramagnética e Antiferromagnética são obtidas, respectivamente, a partir das equações (4.13) e (4.15). Como, neste caso, os diagramas de fases dependem de quatro parâmetros ( $J'/J$ ,  $J'_0/J_0$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2}$  e  $\sigma/J$ ), um estudo minucioso de todas as possibilidades seria difícil. Para ilustrar os efeitos do campo aleatório gaussiano utilizaremos a seguinte escolha:  $J'/J = \sqrt{2}$  e  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$  (Fyodorov *et al.*, 1987b), com três possibilidades distintas para as médias das interações:  $J'_0 = J_0 = 0.5$ ;  $J'_0 = 0.3$ ,  $J_0 = 0.7$ ;  $J'_0 = 0.7$ ,  $J_0 = 0.3$ .

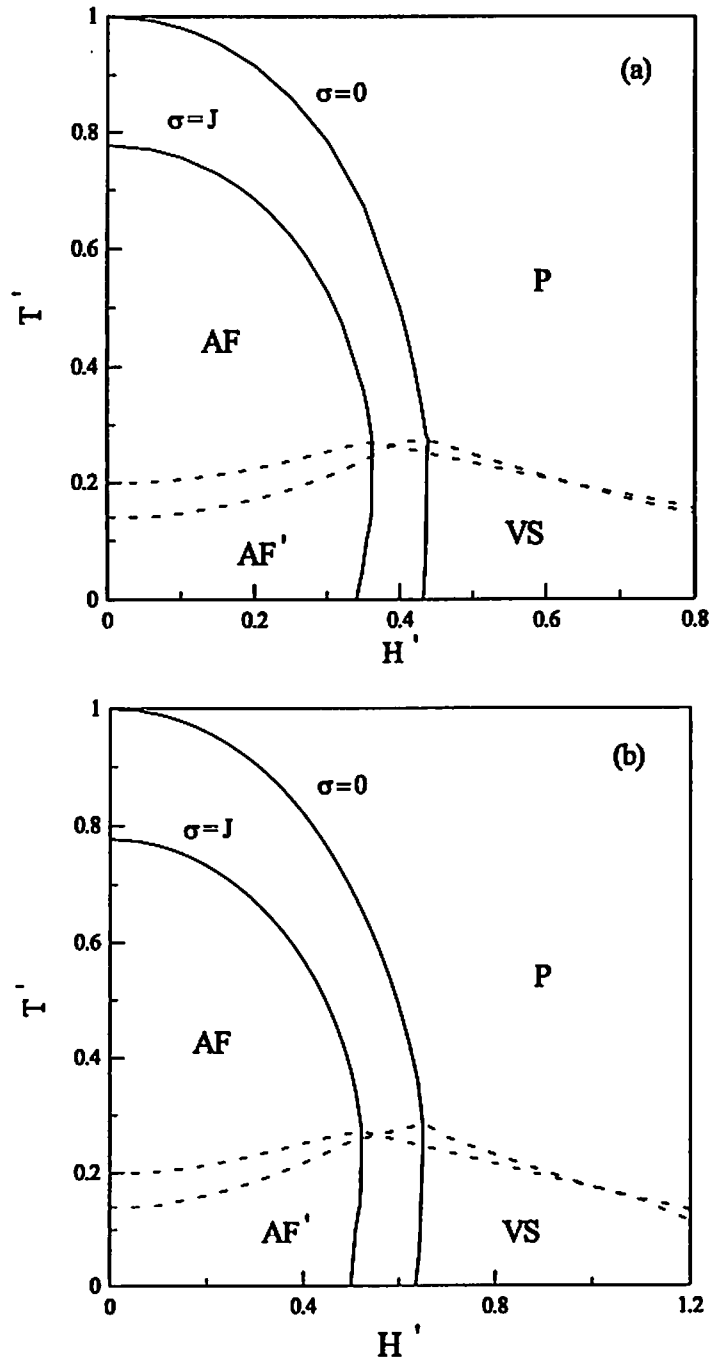


Figura 4.5: Diagramas de fases para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético inter-subredes e ferromagnético intra-subredes na presença de um campo aleatório gaussiano (com temperatura e campo magnético em unidades tais que  $J'_0 + J_0 = 1$ ). A escolha dos parâmetros são: (a)  $J'/J = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$ ,  $J'_0 = J_0 = 0.5$  e  $\sigma = J$ ; (b)  $J'/J = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$ ,  $J'_0 = 0.3$ ,  $J_0 = 0.7$  e  $\sigma = J$ . Para comparação, exibimos também os caso  $\sigma = 0$  (Fyodorov *et al.*, 1987b). As linha pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1.

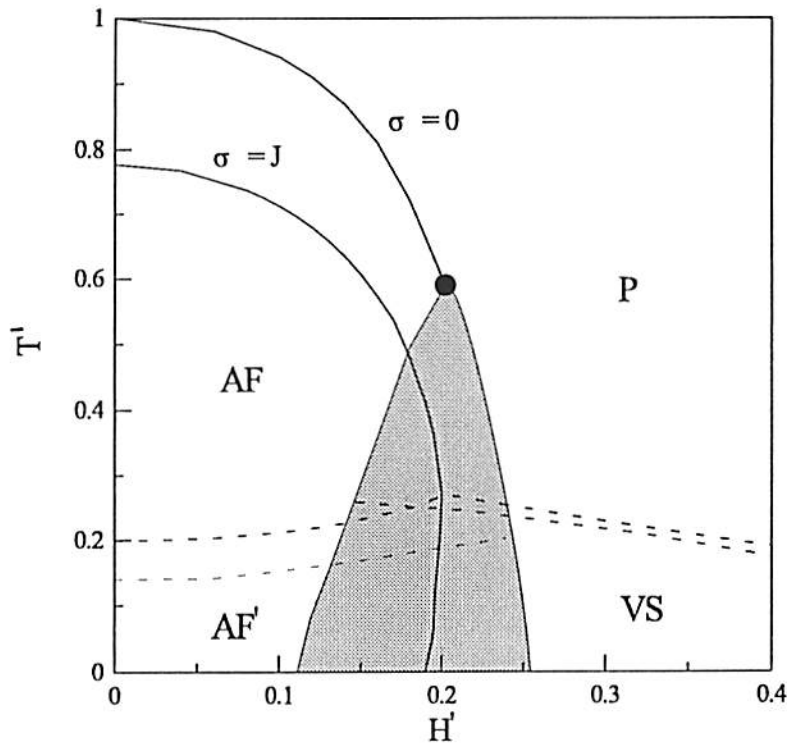


Figura 4.6: Diagrama de fases para o vidro de spins com favorecimento antiferromagnético inter-subredes e ferromagnético intra-subredes na presença de um campo aleatório gaussiano (com temperatura e campo magnético em unidades tais que  $J'_0 + J_0 = 1$ ). A escolha dos parâmetros são:  $J'/J = \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{J'^2 + J^2} = 0.625$ ,  $J'_0 = 0.7$ ,  $J_0 = 0.3$  e  $\sigma = J$ . Para comparação, exibimos também o caso  $\sigma = 0$  (Fyodovov *et al.*, 1987b); na região sombreada, as diversas fases são matematicamente estáveis, correspondendo a mínimos locais da energia livre (a bola preta sugere a existência de um ponto tricrítico, abaixo do qual uma linha de transição de primeira ordem, no interior da região sombreada, está presente). As linhas pontilhadas correspondem ao limite de estabilidade da solução com simetria entre réplicas (linhas AT). A nomenclatura utilizada para designar as diversas fases é a mesma da figura 4.1.

Os resultados de nossas análises numéricas estão resumidas nas figuras 4.5 e 4.6. Para  $J'_0 = J_0 = 0.5$  e  $J'_0 = 0.3$ ,  $J_0 = 0.7$ , todas as linhas de transições são contínuas, enquanto que, para  $J'_0 = 0.7$ ,  $J_0 = 0.3$ , encontramos evidências numéricas de uma transição de primeira ordem (ver figura 4.6). Na figura 4.6, para  $\sigma = 0$ , em uma dada faixa de campos magnéticos e baixas temperaturas (região sombreada), verificamos um comportamento típico de uma transição de primeira ordem, com uma convergência numérica para mais de uma solução, dependendo das condições iniciais utilizadas; as coordenadas do ponto tricrítico (ponto onde as linhas de transição contínua e de primeira ordem se encontram)

são:  $T' \approx 0.5901$  e  $H' \approx 0.202$ . Neste caso, as linhas AT apresentam um salto através da região sombreada (Fyodorov *et al.*, 1987b). Os principais efeitos da aleatoriedade no campo magnético ( $\sigma > 0$ ) são enfraquecer a transição de primeira ordem, bem como, diminuir a fase antiferromagnética. Notamos que para uma largura no campo aleatório suficientemente grande (como por exemplo,  $\sigma = J$  na figura 4.6), a transição de primeira ordem pode desaparecer completamente. Comparando as figuras 4.5 e 4.6 verificamos que diferentes escolhas de  $J_0$  e  $J'_0$  (satisfazendo  $J_0 + J'_0 = 1$ ) podem alterar radicalmente o diagrama de fases para o caso  $\sigma = 0$  (Fyodorov *et al.*, 1987b); entretanto, para um campo aleatório com uma largura suficientemente grande ( $\sigma \sim J$ ), diferentes escolhas de  $J_0$  e  $J'_0$  levam a diagramas de fases qualitativamente idênticos. Para outras distribuições de probabilidades, como por exemplo, a bimodal, os diagramas de fases podem exibir comportamentos diferentes com relação aos aqui apresentados, com a possibilidade de existência de pontos tricríticos no diagrama temperatura *versus* interação média (Vieira *et al.*, 1999b).

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo, estudamos o vidro de spins de Ising com favorecimento antiferromagnético, na presença de campos magnéticos uniforme e aleatório obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussiana. Introduzimos uma generalização do modelo SK para duas subredes, com interações antiferromagnéticas entre os spins inter-subredes, enquanto que para os spins intra-subredes, tais interações foram consideradas nulas (Korenblit e Shender, 1985; Fyodorov *et al.*, 1987a) ou ferromagnéticas (Fyodorov *et al.*, 1987b; Takayama, 1988).

De acordo com nossa análise numérica, o principal efeito do campo aleatório gaussiano no vidro de spins antiferromagnético é diminuir a fase antiferromagnética; além disso, nos casos onde existe uma linha de transição de primeira ordem, o campo aleatório também provoca uma redução na extensão desta linha. Para aleatoriedades suficientemente grandes, as fronteiras críticas de primeira ordem são transformadas em fronteiras contínuas; para aleatoriedades ainda maiores, as fases antiferromagnéticas são destruídas.



A destruição da linha de transição de primeira ordem em  $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$ , devido à presença de campos aleatórios, foi observada recentemente (Kushauer e Kleemann, 1995).

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesta tese estudamos vidros de spins, no limite de interações de alcance infinito, através do método das réplicas. Discutimos detalhadamente a solução com simetria entre réplicas para cada modelo apresentado.

No capítulo 2, investigamos o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de um campo magnético uniforme e dos dois campos de anisotropia uniaxiais de ordem mais baixa,  $D_1$  e  $D_2$  (acoplados respectivamente, às potências  $S_1^2$  e  $S_1^4$  da componente de spin na direção  $\vec{I}$ ). Apresentamos diagramas de fases em diversos planos. Observamos que para campo magnético nulo, o diagrama de fases no plano temperatura *versus* média das interações pode ser distinto ou análogo ao do modelo SK, dependendo da magnitude dos campos de anisotropia. Mostramos, no caso  $J_0 = h = 0$ , diagramas no plano  $D_1$  (campo de anisotropia de ordem mais baixa) *versus* temperatura, para diversos valores do campo de anisotropia de segunda ordem  $D_2$ . Para  $D_2 = 0$  nosso diagrama de fases está em acordo com trabalho anteriores, exceto por uma pequena reentrância da fase de vidro de spins longitudinal (VS1). Quando  $D_2 = 0.1D_1$ , a fase vidro de spins mista (VS2) é reduzida com relação ao caso  $D_2 = 0$ , enquanto que para  $D_2 = -0.1D_1$ , observamos um aumento na fase VS2. O caso  $D_2 = -0.2D_1$  apresenta um comportamento qualitativamente distinto daquele com  $D_2 = 0$ , com a fase VS2 se estendendo ao longo de todo o eixo de temperaturas, de tal forma que não encontramos mais a fase VS1 a temperatura nula. Na presença de um campo magnético uniforme, a linha GT no plano campo magnético *versus* temperatura, associada ao ordenamento do parâmetro de vidro de spins transversal, apre-

senta novas características devido aos campos de anisotropias uniaxiais. Em particular, obtivemos uma transição de fases reentrante, representando um resultado inovador para os vidros de spins  $m$ -vetoriais.

No capítulo 3 estudamos o comportamento da linha GT para o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de um campo magnético uniforme e de um campo de anisotropia que favorece os eixos cartesianos. Mostramos que o caso  $m = 2$  corresponde a duas anisotropias uniaxiais competitivas, análogas às estudadas no capítulo 2. Para  $m = 3$  (com  $D > 0$ ), não constatamos transição de fases reentrante, como observada no caso das anisotropias uniaxiais; constatamos um deslocamento da linha GT no sentido da região de baixas temperaturas, favorecendo o ordenamento longitudinal.

No capítulo 4 investigamos uma generalização do modelo SK com duas subredes, na presença de campos magnéticos uniforme e aleatório obedecendo uma distribuição de probabilidades gaussianas. Consideramos interações entre os spins inter-subredes antiferromagnéticas, enquanto que as dos spins intra-subredes podendo ser nulas ou ferromagnéticas. Para uma dada escolha de unidades reduzidas, mostramos que o diagrama de fases no plano temperatura *versus* interação média, na ausência do campo aleatório, é análogo ao do modelo SK com favorecimento ferromagnético, desde que troquemos a fase ferromagnética por uma antiferromagnética. Da nossa análise numérica, para os diagramas de fases no plano temperatura *versus* campo magnético, verificamos que os principais efeitos do campo aleatório gaussiano no vidro de spins de Ising são diminuir a extensão da fase antiferromagnética, enquanto que nos casos onde existe uma linha de transições de primeira ordem, o campo aleatório faz com que esta linha seja reduzida. Para aleatoriedades suficientemente grandes, as fronteiras críticas de primeira ordem são totalmente transformadas em fronteiras contínuas; para aleatoriedades ainda maiores, as fases antiferromagnéticas são destruídas.

Esperamos que alguns dos nossos resultados teóricos possam ser aplicados, pelos menos qualitativamente, a sistemas reais. Em particular, podemos ressaltar as seguintes confrontações :

i) A reentrância encontrada na linha GT a baixas temperaturas, para os modelos  $m$ -vetoriais na presença de campos de anisotropias uniaxiais, representa um resultado

inédito, para o nosso conhecimento. Tal reentrância pode estar associada a resultados experimentais que apontam, no plano campo magnético *versus* temperatura, um comportamento reentrante a baixas temperaturas (Barbara *et al.*, 1981; Barbara e Malozemoff, 1983; Keener e Weissman, 1996);

ii) A conversão da fronteira crítica de primeira ordem em contínua, devido à introdução de um campo magnético aleatório, pode explicar um efeito similar verificado no antiferromagneto diluído  $\text{Fe}_x\text{Mg}_{1-x}\text{Cl}_2$  (Kushauer e Kleemann, 1995).

Como problemas em aberto, relacionados com os modelos estudados nesta tese, podemos mencionar:

i) O estudo, ainda na aproximação de simetria entre réplicas, do vidro de spins  $m$ -vetorial na presença simultânea de um campo magnético e de campos de anisotropias cúbica e uniaxial. Em particular, a investigação do comportamento da linha de Gabay-Toulouse frente aos campos de anisotropia.

ii) o tratamento do modelo SK na presença de um campo magnético e aleatório obedecendo outras distribuições de probabilidades, como por exemplo, bimodal (Vieira *et al.*, 1999b), Lorentziana e exponencial;

iii) A investigação destes sistemas dentro do procedimento de quebra de simetria entre réplicas.

# Apêndice A

## Comportamento em Baixas Temperaturas da Linha Gabay-Toulouse

Neste apêndice consideraremos a linha GT [ver equações (2.25)-(2.27)] no limite de baixas temperaturas e campos magnéticos altos  $h \gg |D_1|, |D_2|$ . Utilizando a mudança de variáveis

$$u_1 = \frac{Ta_1 - h}{J\sqrt{q_1}} \quad ,$$

a equação da linha GT [equação (2.25)] pode ser reescrita na forma,

$$(m-1)^2 \frac{T}{J} = \frac{C(m)}{\sqrt{q_1}} \exp \left[ -\frac{(h/J)^2}{2q_1} \right] \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde

$$C(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{P_{20}}{P_{00}} \right]^2 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Em baixas temperaturas, é fácil mostrar que

$$x \simeq 1 + \varepsilon_1 T \quad ,$$

$$q_1 \simeq m + \varepsilon_2 T \quad .$$

Vamos nos restringir ao caso em que  $D_1 \gg |D_2|$ ; como uma primeira aproximação, desprezaremos as contribuições do campo de anisotropia  $D_2$ . Assim, podemos escrever  $C(m)$  como

$$C(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 \exp(a_1 b_1) (m - S_1^2)^{(m-1)/2}}{\int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 \exp(a_1 b_1) (m - S_1^2)^{(m-3)/2}} \right]^2 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Utilizando a forma integral das funções de Bessel, ou seja

$$I_\nu(Z) = \frac{(1/2Z)^\nu}{\pi^{1/2} \Gamma[\nu + 1/2]} \int_{-1}^1 dt (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{\pm Zt} \quad \text{Re } |\nu| > -1/2 \quad , \quad (\text{A.4})$$

podemos escrever (A.3) como,

$$C(m) = \frac{2m(m-1)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da_1}{a_1^2} \left[ \frac{I_{\frac{m}{2}}(\sqrt{m}a_1)}{I_{(\frac{m}{2}-1)}(\sqrt{m}a_1)} \right]^2 \quad , \quad (\text{A.5})$$

ou ainda

$$C(m) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (m+1)(m-1)^2 \quad ; \quad (h \rightarrow \infty, T \rightarrow 0) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) em (A.1), temos

$$\frac{T}{J} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{(m+1)}{\sqrt{m}} \exp \left[ -\frac{(h/J)^2}{2m} \right] \quad . \quad (\text{A.7})$$

## Apêndice B

# Expansões em Altas Temperaturas para o Vidro de Spins $m$ -Vetorial

Neste apêndice desenvolveremos expansões em séries de potências, no limite de altas temperaturas, para o vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de campos de anisotropia uniaxiais. Consideraremos os casos  $J_0 = 0$  ( $h \neq 0$ ) e  $h = 0$  ( $J_0 \neq 0$ ). No primeiro caso, trataremos o limite de campos baixos ( $h \ll J$ ;  $D_1, D_2 \ll J$ ) enquanto que no segundo, analisaremos as proximidades do ponto multicrítico, assim como a fronteira P-F1, para  $D_1 \ll J$  e  $D_2 = 0$ .

### B.1 Caso ( $J_0 = 0$ ; $h \neq 0$ )

Consideremos o limite de altas temperaturas ( $\beta = 1/T$  pequeno) e campos baixos ( $h \ll |D_1|, |D_2| \ll J$ ); vamos supor  $x \sim q_1$ , assim como  $a_1, b_1$  e  $c$  pequenos. Utilizando tais hipóteses, temos

$$\begin{aligned} \exp(a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4) &= 1 + (a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4) + \frac{1}{2!} (a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} (a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4)^3 + \frac{1}{4!} (a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4)^4 \\ &+ \frac{1}{5!} (a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4)^5 + \frac{1}{6!} (a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4)^6 \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Consideremos as funções  $P_{nt}$  definidas por,

$$P_{nt} = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 S_1^t \left[ \exp \left( a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^4 \right) \right] (m - S_1^2)^{(m-3+n)/2} \quad , \quad (\text{B.2})$$

com

$$a_1 = \beta J q_1^{1/2} u_1 + \beta h \quad ; \quad b_1 = \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} (mx - q_1) \quad ; \quad c = \beta D_2 \quad . \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.1) em (B.2), obtemos

$$\begin{aligned} P_{00} = & H_0 + b_1 H_2 + c H_4 + \frac{1}{2} a_1^2 H_2 + \frac{1}{2} b_1^2 H_4 + \frac{1}{2} a_1^2 b_1 H_4 + \frac{1}{6} b_1^3 H_6 \\ & + b_1 c H_6 + \frac{1}{2} c^2 H_8 + \frac{1}{24} a_1^4 H_4 + \frac{1}{4} a_1^2 b_1^2 H_6 + \frac{1}{2} b_1^2 c H_6 + \dots \quad , \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{01} = & a_1 H_2 + a_1 b_1 H_4 + \frac{1}{6} a_1^3 H_4 + \frac{1}{2} a_1 b_1^2 H_6 + \frac{1}{6} a_1^3 b_1 H_6 + b_1 c H_6 \\ & + \frac{1}{6} a_1 b_1^3 H_8 + \frac{1}{120} a_1^5 H_6 + \dots \quad , \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{02} = & H_2 + b_1 H_4 + \frac{1}{2} a_1^2 H_4 + \frac{1}{2} b_1^2 H_6 + \frac{1}{2} a_1^2 b_1 H_6 + \frac{1}{6} b_1^3 H_8 + \frac{1}{24} a_1^4 H_6 \\ & + \frac{1}{4} a_1^2 b_1^2 H_8 + c H_6 + \frac{1}{2} b_1^2 c H_8 + b_1 c H_8 + \frac{1}{2} c^2 H_{10} + \dots \quad , \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

onde as integrais  $H_k$  são definidas por,

$$H_k = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} dS_1 S_1^k (m - S_1^2)^{(m-3)/2} \quad . \quad (\text{B.7})$$

Utilizando,

$$\int_0^a dx x^k (a^n - x^n)^p = \frac{a^{(k+1+np)} \Gamma[(k+1)/n] \Gamma[(p+1)]}{n \Gamma[(k+1)/n + (p+1)]} \quad (\text{B.8})$$

obtemos,

$$\frac{H_2}{H_0} = 1 \quad ; \quad \frac{H_4}{H_0} = \frac{3m}{m+2} \quad ; \quad \frac{H_6}{H_0} = \frac{15m^2}{(m+2)(m+4)}$$



$$\frac{H_8}{H_0} = \frac{105m^3}{(m+2)(m+4)(m+6)} \quad ; \quad \frac{H_{10}}{H_0} = \frac{945m^4}{(m+2)(m+4)(m+6)(m+8)}$$

Com estes resultados calculamos as razões  $P_{01}/P_{00}$  e  $P_{02}/P_{00}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{P_{01}}{P_{00}} = & a_1 + \frac{2(m-1)}{m+2} a_1 b_1 - \frac{a_1^3}{m+2} + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)} a_1 b_1^2 \\ & - \frac{8(m-1)}{(m+2)(m+4)} a_1^3 b_1 - \frac{(6m^2+5m-12)}{2(m+2)(m+4)} a_1^5 b_1 \\ & + \frac{12m(m-1)}{(m+2)(m+4)} b_1 c + \frac{2}{(m+2)(m+4)} a_1^5 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_{01}}{P_{00}}\right)^2 = & a_1^2 + \frac{4(m-1)}{m+2} a_1^2 b_1 + \frac{24m(m-1)}{(m+2)(m+4)} a_1^2 c + \frac{12(m-1)(m^2+m-4)}{(m+2)^2(m+4)} a_1^2 b_1^2 \\ & - \frac{2a_1^4}{m+2} - \frac{4(5m^2+7m-12)}{(m+2)^2(m+4)} a_1^4 b_1 - \frac{24m(m-1)}{(m+2)^2(m+4)} a_1^4 c \\ & + \frac{(5m+12)}{(m+2)^2(m+4)} a_1^6 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} m - \frac{P_{20}}{P_{00}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{00}}\right) = & 1 + \frac{2(m-1)}{m+2} b_1 + \frac{(m-1)}{m+2} a_1^2 + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)} b_1^2 \\ & + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)} a_1^2 b_1 - \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+4)} a_1^4 + \frac{12m(m-1)}{(m+2)(m+4)} c \\ & + \frac{12m(m-1)(3m^2+m-12)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)} a_1^2 c + \frac{24m(m-1)(3m^2+m-12)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)} b_1 c \\ & + \frac{48m^2(m-1)(8m^2+7m-36)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)(m+8)} c^2 + \dots \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Lembrando que as equações para os parâmetros  $x$  e  $q_1$ , bem como a linha GT, são definidas por,

$$\frac{H_8}{H_0} = \frac{105m^3}{(m+2)(m+4)(m+6)} \quad ; \quad \frac{H_{10}}{H_0} = \frac{945m^4}{(m+2)(m+4)(m+6)(m+8)}$$

Com estes resultados calculamos as razões  $P_{01}/P_{00}$  e  $P_{02}/P_{00}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{P_{01}}{P_{00}} = & a_1 + \frac{2(m-1)}{m+2}a_1b_1 - \frac{a_1^3}{m+2} + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)}a_1b_1^2 \\ & - \frac{8(m-1)}{(m+2)(m+4)}a_1^3b_1 - \frac{(6m^2+5m-12)}{2(m+2)(m+4)}a_1^5b_1 \\ & + \frac{12m(m-1)}{(m+2)(m+4)}b_1c + \frac{2}{(m+2)(m+4)}a_1^5 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_{01}}{P_{00}}\right)^2 = & a_1^2 + \frac{4(m-1)}{m+2}a_1^2b_1 + \frac{24m(m-1)}{(m+2)(m+4)}a_1^2c + \frac{12(m-1)(m^2+m-4)}{(m+2)^2(m+4)}a_1^2b_1^2 \\ & - \frac{2a_1^4}{m+2} - \frac{4(5m^2+7m-12)}{(m+2)^2(m+4)}a_1^4b_1 - \frac{24m(m-1)}{(m+2)^2(m+4)}a_1^4c \\ & + \frac{(5m+12)}{(m+2)^2(m+4)}a_1^6 + \dots \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} m - \frac{P_{20}}{P_{00}} = & \left(\frac{P_{02}}{P_{00}}\right) = 1 + \frac{2(m-1)}{m+2}b_1 + \frac{(m-1)}{m+2}a_1^2 + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)}b_1^2 \\ & + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)}a_1^2b_1 - \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+4)}a_1^4 + \frac{12m(m-1)}{(m+2)(m+4)}c \\ & + \frac{12m(m-1)(3m^2+m-12)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)}a_1^2c + \frac{24m(m-1)(3m^2+m-12)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)}b_1c \\ & + \frac{48m^2(m-1)(8m^2+7m-36)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)(m+8)}c^2 + \dots \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Lembrando que as equações para os parâmetros  $x$  e  $q_1$ , bem como a linha GT, são definidas por,

$$(m-1)^2 \left(\frac{T}{J}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u_1^2/2) \left[m - \frac{P_{02}}{P_{00}}\right]^2, \quad (\text{B.12})$$

$$q_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u_1^2/2) \left[\frac{P_{01}}{P_{00}}\right]^2, \quad (\text{B.13})$$

$$1 + (m-1)x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u_1^2/2) \left[\frac{P_{02}}{P_{00}}\right], \quad (\text{B.14})$$

podemos usar os resultados acima para obter

$$\begin{aligned} q_1 = & (\beta J)^2 q_1 + \frac{2m(m-1)}{m+2} (\beta J)^4 x q_1 + \frac{4(m-1)}{m+2} (\beta J)^3 \frac{D_1}{J} q_1 \\ & + \frac{24m(m-1)}{m+2} (\beta J)^3 \frac{D_2}{J} q_1 - 2(\beta J)^4 q_1^2 + (\beta J)^2 \left(\frac{h}{J}\right)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} x = & \frac{m}{m+2} (\beta J)^2 x + \frac{2}{m+2} \beta J \frac{D_1}{J} + \frac{12m}{(m+2)(m+4)} \beta J \frac{D_2}{J} \\ & + \frac{(\beta J)^2}{m+2} \left(\frac{h}{J}\right)^2 + \frac{m^2(m-2)}{(m+2)(m+4)} (\beta J)^4 x^2 - \frac{(\beta J)^4}{m+2} q_1^2 \\ & + \frac{4m(m-2)}{(m+2)(m+4)} (\beta J)^3 x \frac{D_1}{J} + \frac{12m^2(3m^2+m-12)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)} (\beta J)^3 x \frac{D_2}{J} \\ & + \frac{24m(3m^2+m-12)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)} (\beta J)^2 \frac{D_1}{J} \frac{D_2}{J} + \frac{4(m-2)}{(m+2)(m+4)} (\beta J)^2 \left(\frac{D_1}{J}\right)^2 \\ & + \frac{48m^2(8m^2+7m-36)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)(m+8)} (\beta J)^2 \left(\frac{D_2}{J}\right)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\left(\frac{T}{J}\right)^2 = 1 - \frac{2m}{m+2} (\beta J)^2 x - \frac{4}{m+2} \beta J \frac{D_1}{J} - \frac{24}{(m+2)(m+4)} \beta J \frac{D_2}{J}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m^2(2m^2 - m - 12)}{(m+2)^2(m+4)}(\beta J)^4 x^2 + \frac{(2m^2 + 14m + 24)}{(m+2)^2(m+4)}(\beta J)^4 q_1^2 - \frac{2(\beta J)^2}{m+2} \left(\frac{h}{J}\right)^2 \\
& -\frac{4m(2m^2 - m - 12)}{(m+2)^2(m+4)}(\beta J)^3 x \frac{D_1}{J} - \frac{72m^2(m^2 - 6)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)}(\beta J)^3 x \frac{D_2}{J} \\
& -\frac{144m(m^2 - 6)}{(m+2)^2(m+4)(m+6)}(\beta J)^2 \frac{D_1}{J} \frac{D_2}{J} - \frac{4(2m^2 - m - 12)}{(m+2)^2(m+4)}(\beta J)^2 \left(\frac{D_1}{J}\right)^2 \\
& -\frac{48m^2(16m^3 + 75m^2 - 58m - 432)}{(m+2)^2(m+4)^2(m+6)(m+8)}(\beta J)^2 \left(\frac{D_2}{J}\right)^2 + \dots \quad . \quad (B.17)
\end{aligned}$$

Usando as equações acima, podemos determinar a temperatura onde a linha GT encontra o eixo  $h = 0$ . Vamos supor soluções do tipo,

$$q_1 = \gamma_1 \frac{D_1}{J} + \gamma_2 \frac{D_2}{J} + \gamma_3 \left| \frac{h}{J} \right| + \gamma_4 \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \gamma_5 \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \gamma_6 \left( \frac{h}{J} \right)^2 \quad , \quad (B.18)$$

$$x = \alpha_1 \frac{D_1}{J} + \alpha_2 \frac{D_2}{J} + \alpha_3 \left| \frac{h}{J} \right| + \alpha_4 \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \alpha_5 \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \alpha_6 \left( \frac{h}{J} \right)^2 \quad , \quad (B.19)$$

$$\frac{T}{J} = 1 + \delta_1 \frac{D_1}{J} + \delta_2 \frac{D_2}{J} + \delta_3 \left| \frac{h}{J} \right| + \delta_4 \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \delta_5 \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \delta_6 \left( \frac{h}{J} \right)^2 \quad . \quad (B.20)$$

Substituindo estas equações em (B.15)-(B.17) e resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$\begin{aligned}
x = & \frac{D_1}{J} + \frac{6m}{m+4} \frac{D_2}{J} - \frac{m}{\sqrt{2}} \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \frac{1}{4} \left( \frac{h}{J} \right)^2 + \\
& -\frac{(18m^3 + 36m^2 - 48m + 12)}{\sqrt{2}(m+2)(m+4)} \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| + \dots \quad , \quad (B.21)
\end{aligned}$$

$$q_1 = m \frac{D_1}{J} + \frac{(18m^3 + 36m^2 - 48m + 12)}{(m+2)(m+4)} \frac{D_2}{J} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{h}{J} \right| + \dots \quad , \quad (B.22)$$

$$\frac{T}{J} = \frac{\tilde{T}}{J} + \frac{(m^4 + 8m^3 + 22m^2 + 24m)}{\sqrt{2}(m+2)^2(m+4)} \frac{D_1}{J} \left| \frac{h}{J} \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(18m^5 + 108m^4 + 204m^3 + 36m^2 - 240m + 72) D_2}{\sqrt{2}(m+2)^3(m+4)} \frac{D_2}{J} \left| \frac{h}{J} \right| \\
& - \frac{(m^2 + 4m + 2)}{4(m+2)^2} \left( \frac{h}{J} \right)^2 + \dots \quad , \quad (B.23)
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{T}$  é a temperatura onde a linha GT encontra o eixo  $h = 0$ ,

$$\frac{\tilde{T}}{J} = 1 - \frac{D_1}{J} - \frac{(6m^2 + 12)}{(m+2)(m+4)} \frac{D_2}{J} + \dots \quad . \quad (B.24)$$

Com as expansões até as ordens consideradas, não é possível determinar os coeficientes  $\gamma_4$ ,  $\gamma_5$  e  $\gamma_6$ ; para tal, é necessário expandir a equação para o parâmetro  $q_1$  até uma ordem superior.

## B.2 Caso ( $J_0 \neq 0$ ; $h = 0$ ; $D_2 = 0$ )

A seguir, nos restringiremos às proximidades do ponto multicrítico (ponto onde as fases F2, F3, VS1 e VS2 da figura 2.2 se encontram), assim como à fronteira P-F1, para o caso  $D_1 \ll J$  e  $D_2 = 0$ . Um tratamento análogo ao da seção anterior será feito para a magnetização,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u_1^2/2) \frac{P_{01}}{P_{00}} \quad , \quad (B.25)$$

onde  $P_{01}/P_{00}$  é dado pela equação (B.9), com

$$\begin{aligned}
a_1 & = \beta J q_1^{1/2} u_1 + \beta J_0 M \quad , \\
b_1 & = \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} (m x - q_1) \quad , \\
c & = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Temos então, a expansão para a magnetização

$$\begin{aligned}
M = & \beta J_0 M + \frac{2(m-1)}{(m+2)} \beta J \beta J_0 \left( \frac{D_1}{J} \right) M + \frac{m(m-1)}{(m+2)} (\beta J)^2 \beta J_0 x M \\
& - (\beta J)^2 (\beta J_0) q_1 M + \frac{(m+5)}{(m+2)} (\beta J)^4 \beta J_0 q_1^2 M + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)} (\beta J)^4 \beta J_0 x^2 q_1 \\
& - \frac{2m(m-1)}{(m+2)} (\beta J)^4 \beta J_0 x q_1 M + \frac{4m(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)} (\beta J)^3 \beta J_0 \frac{D_1}{J} x M \\
& - \frac{4(m-1)}{(m+2)} (\beta J)^3 \beta J_0 \frac{D_1}{J} q_1 M + \frac{4(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+4)} (\beta J)^2 \beta J_0 \left( \frac{D_1}{J} \right)^2 M \\
& + \dots \quad . \tag{B.26}
\end{aligned}$$

Para  $D_1 \ll J$  a fase VS1 (ver figura 2.2) ocupa uma faixa estreita de temperaturas; nas proximidades do ponto multicrítico (encontro das fases F2, F3, VS1 e VS2) podemos então considerar o parâmetro de vidro de spins transverso como sendo nulo ( $q = 0$ ), enquanto que os demais parâmetros ( $x$ ,  $M$ , e  $q_1$ ) pequenos. Assim, as coordenadas do ponto multicrítico serão dadas por  $\tilde{T}$  [ver equação (B.24)] e por um dado  $J_0 = \tilde{J}_0$ . Dividindo (B.26) por  $M$ , considerando  $\beta J \cong \tilde{J}_0/\tilde{T}$  e utilizando as equações (B.21) e (B.22) (com as devidas trocas  $h \rightarrow J_0 M$ ), encontramos

$$\frac{\tilde{J}_0}{J} \cong 1 + \frac{3m^2}{(m+2)^2} \left( \frac{D_1}{J} \right)^2 \quad . \tag{B.27}$$

## Apêndice C

# Expansões em Baixas Temperaturas para o Vidro de Spins $m$ -Vetorial

Neste apêndice, mostraremos os principais resultados das expansões em baixas temperaturas, para o ordenamento transversal de vidro de spins (fronteira crítica VS1-VS2) do vidro de spins  $m$ -vetorial na presença de campos de anisotropias uniaxiais. Nossos cálculos serão restritos aos casos em que  $m = 3$ ,  $J_0 = 0$  e  $h = 0$ , aplicando-se às figuras 2.8-2.10. As equações relevantes para a realização das expansões são (trabalhamos com  $\beta = 1/T$ , ou seja,  $k_B = 1$ )

$$q_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1^2/2} \left[ \frac{P_{01}}{P_{00}} \right]^2, \quad (\text{C.1})$$

$$1 + 2x = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1^2/2} \left[ \frac{P_{02}}{P_{00}} \right], \quad (\text{C.2})$$

$$\left( \frac{T}{J} \right)^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1^2/2} \left[ 3 - \frac{P_{02}}{P_{00}} \right]^2, \quad (\text{C.3})$$

onde

$$P_{0t} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dS_1 S_1^t e^{(a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c S_1^3)}, \quad (\text{C.4})$$

com

$$a_1 = \beta J q_1^{1/2} u_1; \quad b_1 = \beta D_1 + \frac{(\beta J)^2}{2} (3x - q_1), \quad c = \beta D_2. \quad (\text{C.5})$$

Temos ainda que

$$P_{0t} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dS_1 S_1^t e^{(b_1 S_1^2 + c S_1^4)} \exp\left(\frac{J\sqrt{q_1}}{T} u_1 S_1\right) .$$

Desmembrando a integral (C.4) em duas partes [a primeira com o intervalo de integração  $(-\sqrt{3}, 0)$ , enquanto que a segunda para  $(0, \sqrt{3}]$  e efetuando a mudança de variáveis  $S_1 \rightarrow -S_1$  na primeira delas, podemos reescrever as funções  $P_{0t}$  como

$$P_{00} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp\left[\left(\frac{D_1}{T} + \frac{B}{T}\right) S_1^2 + \frac{D_2}{T} S_1^4\right] \cosh\left(\frac{J\sqrt{q_1} u_1 S_1}{T}\right) , \quad (C.6)$$

$$P_{01} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 S_1 \exp\left[\left(\frac{D_1}{T} + \frac{B}{T}\right) S_1^2 + \frac{D_2}{T} S_1^4\right] \sinh\left(\frac{J\sqrt{q_1} u_1 S_1}{T}\right) , \quad (C.7)$$

$$P_{02} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 S_1^2 \exp\left[\left(\frac{D_1}{T} + \frac{B}{T}\right) S_1^2 + \frac{D_2}{T} S_1^4\right] \cosh\left(\frac{J\sqrt{q_1} u_1 S_1}{T}\right) , \quad (C.8)$$

com

$$B = \frac{J^2}{2T}(3x - q_1) . \quad (C.9)$$

Definindo

$$g(S_1) = (D_1 + B)S_1^2 + D_2 S_1^4 , \quad (C.10)$$

e supondo que  $g(S_1) \geq 0$ , constatamos que o máximo da função  $g(S_1)$  ocorre em  $S_1^* = \sqrt{3}$ . Podemos obter a forma assintótica da função  $P_{00}(u_1)$  no limite  $T \rightarrow 0$ , aproximando  $\cosh(J\sqrt{q_1} u_1 S_1/T) \simeq \frac{1}{2} \exp(J\sqrt{q_1} |u_1| S_1/T)$ , de modo que

$$P_{00}(u_1) = \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp\left[\frac{G(S_1)}{T}\right] , \quad (C.11)$$

$$G(S_1) = g(S_1) + J\sqrt{q_1} |u_1| S_1 . \quad (C.12)$$

Agora, podemos aplicar o método de Laplace para o máximo na borda (de Bruijn, 1981),

$$P_{00}(u_1) \cong 2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp\left[\frac{G(S_1^*)}{T} + \frac{G'(S_1^*)(S_1 - S_1^*)}{T}\right] . \quad (C.13)$$



Fazendo a seguinte mudança de variáveis,

$$z = -\frac{G'(S_1^*)(S_1 - S_1^*)}{T} \implies dS_1 = -\frac{T}{G'(S_1^*)} dz \quad , \quad (\text{C.14})$$

$$P_{00}(u_1) \cong 2 \frac{T}{G'(S_1^*)} \exp \left[ \frac{G(S_1^*)}{T} \right] \int_0^{G'(S_1^*)S_1^*/T} e^{-z} dz \quad . \quad (\text{C.15})$$

Mas no limite  $T \rightarrow 0$  ,  $\implies G'(S_1^*)S_1^*/T \rightarrow \infty$ , logo

$$P_{00}(u_1) \cong 2 \frac{T}{G'(S_1^*)} \exp \left[ \frac{G(S_1^*)}{T} \right] \quad . \quad (\text{C.16})$$

As expressões para as funções  $P_{01}(u_1)$  e  $P_{02}(u_1)$  são mais complicadas, devido aos termos  $S_1$  e  $S_1^2$  em seus integrandos. No entanto, estamos interessados nas razões  $P_{01}/P_{00}$  e  $P_{02}/P_{00}$  no limite  $T \rightarrow 0$ . Chamando  $S_1 = S_1^* + (S_1 - S_1^*)$ , podemos escrever  $P_{01}$  como

$$\begin{aligned} P_{01}(u_1) = & 2\sqrt{3} \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \sinh \left( \frac{J\sqrt{q_1}u_1 S_1}{T} \right) \\ & + 2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (S_1 - S_1^*) \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \sinh \left( \frac{J\sqrt{q_1}u_1 S_1}{T} \right) \quad . \quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

A segunda integral na expressão acima é proporcional a  $P_{00}(u_1)T$  (como veremos depois). No limite  $T \rightarrow 0$  a razão  $P_{01}/P_{00}$  pode ser escrita na forma

$$\frac{P_{01}(u_1)}{P_{00}(u_1)} \cong \sqrt{3} \frac{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \sinh \left[ \frac{(J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1}{T} \right]}{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \cosh \left[ \frac{(J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1}{T} \right]} + CT \quad , \quad (\text{C.18})$$

onde a constante de proporcionalidade  $C$  será determinada mais adiante. Quadrando a expressão acima obtemos,

$$\begin{aligned} \left( \frac{P_{01}(u_1)}{P_{00}(u_1)} \right)^2 = & 3 \left[ \frac{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \sinh \left[ \frac{(J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1}{T} \right]}{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \cosh \left[ \frac{(J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1}{T} \right]} \right]^2 + 2\sqrt{3}C \\ & \times \left[ \frac{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \sinh \left[ \frac{(J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1}{T} \right]}{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \cosh \left[ \frac{(J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1}{T} \right]} \right] T + O(T^2) \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

No segundo termo da equação acima podemos aproximar  $\sinh \left[ (J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1 \right]$  e  $\cosh \left[ (J\sqrt{q_1}u_1/T)S_1 \right]$  por  $\frac{1}{2} \exp \left[ (J\sqrt{q_1}|u_1|/T)S_1 \right]$  (desprezando o termo com argumento negativo). Com esta aproximação a razão das integrais no segundo termo é igual a unidade. Já no primeiro termo, a contribuição relevante vem do intervalo  $(S_1^* - \Delta S_1, S_1^*)$  com  $\Delta S_1$  um pequeno intervalo ( $\Delta S_1 \rightarrow 0$ ) abaixo de  $S_1^* = \sqrt{3}$ . Sendo esta contribuição relevante dada por,

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (\dots)}{\int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (\dots)} \right]^2 = \lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta S_1 e^{g(S_1^*)/T} \sinh \left( \frac{J\sqrt{q_1}S_1^* u_1}{T} \right)}{\Delta S_1 e^{g(S_1^*)/T} \cosh \left( \frac{J\sqrt{q_1}S_1^* u_1}{T} \right)} \right]^2 = \tanh^2 \left( \frac{J\sqrt{q_1}S_1^* u_1}{T} \right) .$$

Portanto,

$$\left( \frac{P_{01}(u_1)}{P_{00}(u_1)} \right)^2 \cong 3 \tanh^2 \left( \frac{J\sqrt{q_1}S_1^* u_1}{T} \right) + 2\sqrt{3}CT + O(T^2) . \quad (C.20)$$

Substituindo (C.20) em (C.1), temos

$$q_1 \cong 6 \int_0^\infty \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u_1^2/2} \tanh^2 \left( \frac{J\sqrt{q_1}S_1^* u_1}{T} \right) + 2\sqrt{3}CT + O(T^2) . \quad (C.21)$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis,  $u = (J\sqrt{q_1}S_1^*/T)u_1$ , a equação para o parâmetro  $q_1$  no limite  $T \rightarrow 0$  resulta em,

$$q_1 \cong 3 - 2 \left( \frac{J}{\sqrt{2\pi}} - \sqrt{3}C \right) T + O(T^2) . \quad (C.22)$$

A seguir, vamos determinar a constante de proporcionalidade  $C$ . Voltando à equação (C.17), a segunda integral pode ser aproximada por

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (S_1 - S_1^*) \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \sinh \left( \frac{J\sqrt{q_1}u_1 S_1}{T} \right) \cong \exp \left[ \frac{G(S_1^*)}{T} \right] \times \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (S_1 - S_1^*) \exp \left[ \frac{G'(S_1^*)(S_1 - S_1^*)}{T} \right] , \quad (C.23)$$

e usando (C.13) ficamos com

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (S_1 - S_1^*) e^{g(S_1)/T} \exp \left[ (J\sqrt{q_1}|u_1|/T)S_1 \right] \cong -\frac{T}{G'(S_1^*)} P_{00}(u_1) . \quad (C.24)$$

Portanto,

$$C = -2 \int_0^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u_1^2/2}}{G'(S_1^*)} \quad , \quad (\text{C.25})$$

onde

$$G'(S_1^*) \equiv G'(\sqrt{3}) = \sqrt{3} [2(D_1 + B) + 12D_2 + Ju_1] \quad .$$

Definindo (em  $T = 0$ )

$$b_c = \left( \frac{D_1}{J} + \frac{B}{J} \right) + 6 \frac{D_2}{J} \quad , \quad (\text{C.26})$$

ficamos com

$$C_c = -\frac{2}{J\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u_1^2/2}}{(2b_c + u_1)} \quad . \quad (\text{C.27})$$

O próximo passo consiste em determinar a razão  $P_{02}/P_{00}$ . De maneira análoga ao desenvolvimento anterior, podemos expressar  $P_{02}$  como

$$P_{02} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 [(S_1 - S_1^*) + S_1^*]^2 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \cosh \left( \frac{J\sqrt{q_1}u_1 S_1}{T} \right) \quad , \quad (\text{C.28})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} P_{02} \cong & 2S_1^{*2} \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \cosh \left( \frac{J\sqrt{q_1}u_1 S_1}{T} \right) \\ & + 4S_1^* \int_0^{\sqrt{3}} dS_1 (S_1 - S_1^*) \exp \left[ \frac{g(S_1)}{T} \right] \cosh \left( \frac{J\sqrt{q_1}u_1 S_1}{T} \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Ambas integrais na equação acima são proporcionais a  $P_{00}(u_1)$ , a constante de proporcionalidade sendo independente de  $T$  na primeira integral, e com dependência em  $T$  na segunda; logo

$$P_{02} \cong 3P_{00} - 2\sqrt{3} \frac{T}{G'(S_1^*)} P_{00} + O(T^2) \quad , \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{P_{02}}{P_{00}} \cong 3 - \frac{2\sqrt{3}}{G'(S_1^*)} T + O(T^2) \quad . \quad (\text{C.31})$$

Substituindo (C.31) em (C.2), temos

$$1 + 2x \cong 3 - 4\sqrt{3}T \int_0^{\infty} \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u_1^2/2}}{G'(S_1^*)} \quad . \quad (\text{C.32})$$

Usando (C.25), ainda podemos escrever a equação para  $x$  como

$$x \cong 1 + \sqrt{3}CT + O(T^2) \quad . \quad (C.33)$$

Substituindo (C.31) em (C.3), temos

$$\left(\frac{T}{J}\right)^2 \cong 6T^2 \int_0^\infty \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u_1^2/2}}{[G'(S_1^*)]^2} + O(T^3) \quad . \quad (C.34)$$

Para  $T = 0$ , a condição crítica fica então,

$$1 \cong 6J^2 \int_0^\infty \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u_1^2/2}}{[G'(S_1^*)]^2} + \dots \quad . \quad (C.35)$$

Substituindo (C.33) e (C.22) em (C.9), temos

$$B_c = \frac{J^3}{\sqrt{2\pi}} + \frac{J^2\sqrt{3}}{2}C_c \quad . \quad (C.36)$$

Agora, para determinar  $b_c$ , usamos

$$2 \int_0^\infty \frac{du_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u_1^2/2}}{(2b_c + u_1)^2} = 1 \quad \implies \quad b_c = 0.262840\dots \quad . \quad (C.37)$$

Substituindo  $b_c = 0.26284$  em (C.27) obtemos a constante crítica  $C_c = -0.52958$ ; em seguida substituindo este valor em (C.36) ficamos com  $B_c = -0.05969$ .

Considerando  $D_2 = \gamma D_1$ , a equação (C.26) nos leva a

$$D_{1c} = \frac{b_{1c} - B_c}{1 + 6\gamma} \cong \frac{0.323}{1 + 6\gamma} \quad . \quad (C.38)$$

A equação (C.38) nos fornece o valor de  $D_1$  para o qual a fronteira crítica VS1-VS2 toca o eixo  $T = 0$ . Em particular para  $\gamma = 0$ , reproduzimos o valor  $D_{1c} \cong 0.323$  já obtido anteriormente [Cragg e Sherrington (1982); Roberts e Bray (1982)]. Vemos que  $D_{1c}$  diminui à medida que  $\gamma$  aumenta e que  $D_{1c} \rightarrow \infty$ , para  $\gamma = -1/6$ . A análise acima não é válida para  $\gamma < -1/6$ , pois neste caso, a fronteira VS1-VS2 não toca o eixo  $T = 0$ .

## Apêndice D

# Análise de Estabilidade da Solução com Simetria entre Réplicas para o Vidro de Spins Antiferromagnético

Neste apêndice analisaremos a estabilidade da solução com simetria entre réplicas para o vidro de spins de Ising com favorecimento antiferromagnético estudado no capítulo 4. A análise de estabilidade (de Almeida e Thouless, 1978) para o presente modelo é análoga à efetuada para o modelo SK com favorecimento antiferromagnético (Korenblit e Shender, 1985). O bloco da matriz de estabilidade  $G$  responsável pela instabilidade AT possui elementos de matriz,

$$G_{p,p'}^{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_p^{\alpha\beta} \partial q_{p'}^{\gamma\delta}} \quad ; \quad p, p' = 1, A, B \quad , \quad (D.1)$$

com

$$\begin{aligned} g(m_A^\alpha, m_B^\beta, m^\alpha, q_A^{\alpha\beta}, q_B^{\alpha\beta}, q_1^{\alpha\beta}) = & - \left[ \frac{(\beta J)^2}{2} + \frac{(\beta J')^2}{2} + (\beta\sigma)^2 \right] n - \frac{\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 \\ & + \frac{(\beta J_0 + \beta J'_0)}{2} \sum_{\alpha} \left[ (m_A^\alpha)^2 + (m_B^\alpha)^2 \right] + \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q_1^{\alpha\beta})^2 + \frac{(\beta J')^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q_A^{\alpha\beta})^2 \\ & - \frac{(\beta J)^2}{2} \sum_{(\alpha\beta)} (q_B^{\alpha\beta})^2 - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp\{H_{eff}^A\} - \ln \text{Tr}_{\alpha} \exp\{H_{eff}^B\} \quad , \quad (D.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{eff}^{A,B} = & \beta H \sum_{\alpha} S_{\alpha} + (\beta\sigma)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} + (\beta J'_0 + \beta J_0) \sum_{\alpha} m_{A,B}^{\alpha} S^{\alpha} - \beta J_0 \sum_{\alpha} m^{\alpha} S^{\alpha} \\
& + [(\beta J')^2 - (\beta J)^2] \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} q_{A,B}^{\alpha\beta} + (\beta J)^2 \sum_{(\alpha\beta)} S^{\alpha} S^{\beta} q_1^{\alpha\beta} . \quad (D.3)
\end{aligned}$$

Nas equações acima,  $m_{A,B}^{\alpha}$  e  $q_{A,B}^{\alpha\beta}$  representam, respectivamente, os parâmetros do tipo magnetização e de vidro de spins nas subredes  $A$  e  $B$ ; em analogia com Korenblit e Shender (1985),

$$m^{\alpha} = (m_A^{\alpha} + m_B^{\alpha}) \quad ; \quad q_1^{\alpha\beta} = (q_A^{\alpha\beta} + q_B^{\alpha\beta}) \quad . \quad (D.4)$$

Calculando as derivadas segundas na solução com simetria entre réplicas,  $\left. \frac{\partial^2 g}{\partial q_p^{\alpha\beta} \partial q_p^{\gamma\delta}} \right|_{SR}$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_1^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} = -(\beta J)^4 \left[ \langle \text{tgh}^4 \mathcal{E}_A(z) \rangle + \langle \text{tgh}^4 \mathcal{E}_B(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_1^{\alpha\delta}} \Big|_{SR} = -(\beta J)^4 \left[ \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle + \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_1^{\alpha\beta}} \Big|_{SR} = (\beta J)^2 - (\beta J)^4 \left[ 2 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_A^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} = - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right)^2 \left[ \langle \text{tgh}^4 \mathcal{E}_A(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_A^{\alpha\delta}} \Big|_{SR} = - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right)^2 \left[ \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_A^{\alpha\beta}} \Big|_{SR} = \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right) \left\{ 1 - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right) \left[ 1 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2 \right] \right\} ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_B^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} = - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right)^2 \left[ \langle \text{tgh}^4 \mathcal{E}_B(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_B^{\alpha\delta}} \Big|_{SR} = - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right)^2 \left[ \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2 \right] ,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_B^{\alpha\beta}} \Big|_{SR} &= ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) \{1 - ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [1 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2]\} \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_A^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_1^{\gamma\delta}} = -(\beta J)^2 ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [\langle \text{tgh}^4 \mathcal{E}_A(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2] \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_A^{\alpha\delta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_1^{\alpha\delta}} = -(\beta J)^2 ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [\langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2] \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_A^{\alpha\beta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_1^{\alpha\beta}} = -(\beta J)^2 ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [1 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_A(z) \rangle^2] \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_B^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_1^{\gamma\delta}} = -(\beta J)^2 ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [\langle \text{tgh}^4 \mathcal{E}_B(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2] \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_B^{\alpha\delta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_1^{\alpha\delta}} = -(\beta J)^2 ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [\langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2] \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_1^{\alpha\beta} \partial q_B^{\alpha\beta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_1^{\alpha\beta}} = -(\beta J)^2 ((\beta J')^2 - (\beta J)^2) [1 - \langle \text{tgh}^2 \mathcal{E}_B(z) \rangle^2] \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_B^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_B^{\alpha\delta}} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_A^{\alpha\beta} \partial q_B^{\alpha\beta}} = 0 \quad , \\
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_A^{\gamma\delta}} \Big|_{SR} &= \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_A^{\alpha\delta}} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_B^{\alpha\beta} \partial q_A^{\alpha\beta}} = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

onde consideramos acima os índices  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  todos distintos entre si, enquanto que

$$\mathcal{E}_{A,B} = \beta \left[ H + J'_0 m_{A,B} - J_0 m_{B,A} + (J'^2 q_{A,B} + J^2 q_{B,A} + \sigma^2)^{1/2} z \right] \quad , \quad (D.5)$$

e

$$\langle (\dots) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} (\dots) \exp(-z^2/2) \quad . \quad (D.6)$$

Utilizando as simetrias dos elementos acima, a matriz de estabilidade  $\mathbf{G}$  pode então ser representada por

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} , \quad (\text{D.7})$$

onde

$$G_{pp'} = (\beta J)^2 \left[ G_{q_p, q_{p'}}^{\alpha\beta, \gamma\delta} - 2G_{q_p, q_{p'}}^{\alpha\beta, \alpha\delta} + G_{q_p, q_{p'}}^{\alpha\beta, \alpha\beta} \right] \Big|_{SR} , \quad (\text{D.8})$$

ou seja

$$G_{11} = \left[ 1 - (\beta J)^2 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle - (\beta J)^2 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \right] \quad (\text{D.9})$$

$$G_{12} = G_{21} = - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \quad (\text{D.10})$$

$$G_{13} = G_{31} = - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \quad (\text{D.11})$$

$$G_{22} = \left( (\beta J') - (\beta J)^2 \right) \left\{ 1 - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \right\} \quad (\text{D.12})$$

$$G_{23} = G_{32} = 0 , \quad (\text{D.13})$$

$$G_{33} = \left( (\beta J') - (\beta J)^2 \right) \left\{ 1 - \left( (\beta J')^2 - (\beta J)^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \right\} . \quad (\text{D.14})$$

A instabilidade da solução com simetria entre réplicas surge quando um dos autovalores da matriz definida em (D.7) torna-se negativo. Da equação de autovalores

$$\det[G\lambda - 1] = 0 , \quad (\text{D.15})$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - [G_{11} + G_{22} + G_{33}]\lambda^2 + [G_{11}G_{22} + G_{11}G_{33} + G_{22}G_{33} - (G_{12})^2 - (G_{13})^2]\lambda \\ & - [G_{11}G_{22}G_{33} - (G_{12})^2G_{33} - (G_{13})^2G_{22}] = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$



Substituindo as equações (D.9)-(D.14) na expressão acima, obtemos

$$\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda - d = 0 \quad , \quad (D.17)$$

com

$$\begin{aligned} b &= 3 - (\beta J')^2 \left[ \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle + \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \right] \quad , \\ c &= 3 - 2(\beta J')^2 \left[ \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle + \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \right] - \left( (\beta J)^2 - (\beta J')^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \quad , \\ d &= 1 - (\beta J')^2 \left[ \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle + \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \right] - \left( (\beta J)^2 - (\beta J')^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \quad . \end{aligned}$$

A equação cúbica ainda pode ser escrita como

$$(\lambda - 1) \left[ \lambda^2 + (1 - b)\lambda + (1 - b + c) \right] = 0 \quad , \quad (D.18)$$

cujas raízes são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad , \\ \lambda_2 &= 1 - \frac{(\beta J')^2}{2} \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle + \sqrt{\Delta} \quad , \\ \lambda_3 &= 1 - \frac{(\beta J')^2}{2} \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle - \sqrt{\Delta} \quad , \end{aligned}$$

$$\Delta = (\beta J)^4 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle + \frac{(\beta J')^2}{4} \left[ \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle - \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \right]^2 \quad .$$

A fronteira de instabilidade (linha  $\Lambda T$ ) é determinada pelo autovalor  $\lambda_3$ , já que  $\lambda_1$  é sempre positivo e  $\lambda_2 > \lambda_3$ . A solução com simetria entre réplicas é estável para  $\lambda_3 > 0$ , tornando-se instável quando  $\lambda_3 < 0$ , definindo assim a fronteira de instabilidade

$$1 - (\beta J')^2 \left[ \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle + \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \right] + \left( (\beta J')^2 + (\beta J)^2 \right) \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle = 0 \quad ,$$

ou ainda

$$\left[ T^2 - J'^2 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \right] \left[ T^2 - J'^2 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \right] + J^4 \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle = 0 \quad . \quad (D.19)$$

Quando as interações entre os spins intra-subredes são nulas ( $J' = J'_0 = 0$ ), a linha de instabilidade torna-se

$$\left( \frac{T}{J} \right)^4 = \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \quad . \quad (D.20)$$

# Apêndice E

## Fronteira

### Paramagnética-Antiferromagnética para o Vidro de Spins Antiferromagnético

Neste apêndice determinaremos a equação da fronteira entre as fases Paramagnética e Antiferromagnética para o vidro de spins de Ising com favorecimento antiferromagnético, na presença de um campo magnético externo e de um campo magnético aleatório obedecendo uma distribuição de probabilidades Gaussiana. Tal cálculo pode ser efetuado através de um estudo da estabilidade da solução paramagnética (dentro da solução com simetria entre réplicas). Lembrando que os parâmetros de ordem são dados por (ver capítulo 4)

$$m_{A,B} = \langle \tanh \mathcal{E}_{A,B} \rangle \quad ; \quad q_{A,B} = \langle \tanh^2 \mathcal{E}_{A,B} \rangle \quad ,$$

podemos definir novas funções

$$K_1(m_A, m_B, q_A, q_B) = m_A - \langle \tanh \mathcal{E}_A \rangle \quad , \quad (\text{E.1})$$

$$K_2(m_A, m_B, q_A, q_B) = m_B - \langle \tanh \mathcal{E}_B \rangle \quad , \quad (\text{E.2})$$

$$K_3(m_A, m_B, q_A, q_B) = q_A - \langle \tanh^2 \mathcal{E}_A \rangle \quad , \quad (\text{E.3})$$

$$K_4(m_A, m_B, q_A, q_B) = q_B - \langle \tanh^2 \mathcal{E}_B \rangle \quad . \quad (\text{E.4})$$

Substituindo

$$\begin{aligned} m_A &= \tilde{m}_A + \delta m_A & ; & & m_B &= \tilde{m}_B + \delta m_B & , \\ q_A &= \tilde{q}_A + \delta q_A & ; & & q_B &= \tilde{q}_B + \delta q_B & , \end{aligned}$$

em (E.1)-(E.4), e expandindo em série de Taylor em torno de  $\delta m_{A,B} = \delta q_{A,B} = 0$ , até termos de primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} K_i(m_A, m_B, q_A, q_B) &= K_i(\tilde{m}_A + \delta m_A, \dots, \tilde{q}_B + \delta q_B) = K_i(\tilde{m}_A, \tilde{m}_B, \tilde{q}_A, \tilde{q}_B) \\ &+ \left. \frac{\partial K_i}{\partial m_A} \right|_0 \delta m_A + \left. \frac{\partial K_i}{\partial m_B} \right|_0 \delta m_B + \left. \frac{\partial K_i}{\partial q_A} \right|_0 \delta q_A + \left. \frac{\partial K_i}{\partial q_B} \right|_0 \delta q_B + \dots = 0 \quad , \end{aligned}$$

onde  $(\partial K_i / \partial m_{A,B})|_0$  e  $(\partial K_i / \partial q_{A,B})|_0$  representam derivadas calculadas em  $m_{A,B} = \tilde{m}_{A,B}$  e  $q_{A,B} = \tilde{q}_{A,B}$ . Por definição, temos que  $K_i(\tilde{m}_A, \tilde{m}_B, \tilde{q}_A, \tilde{q}_B) = 0$  e então ficamos com

$$\left. \frac{\partial K_i}{\partial m_A} \right|_0 \delta m_A + \left. \frac{\partial K_i}{\partial m_B} \right|_0 \delta m_B + \left. \frac{\partial K_i}{\partial q_A} \right|_0 \delta q_A + \left. \frac{\partial K_i}{\partial q_B} \right|_0 \delta q_B = 0 \quad . \quad (\text{E.5})$$

A fronteira entre as fases paramagnética e antiferromagnética pode ser obtida através da análise da matriz Jacobiana

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial m_A} & \frac{\partial K_1}{\partial m_B} & \frac{\partial K_1}{\partial q_A} & \frac{\partial K_1}{\partial q_B} \\ \frac{\partial K_2}{\partial m_A} & \frac{\partial K_2}{\partial m_B} & \frac{\partial K_2}{\partial q_A} & \frac{\partial K_2}{\partial q_B} \\ \frac{\partial K_3}{\partial m_A} & \frac{\partial K_3}{\partial m_B} & \frac{\partial K_3}{\partial q_A} & \frac{\partial K_3}{\partial q_B} \\ \frac{\partial K_4}{\partial m_B} & \frac{\partial K_4}{\partial m_B} & \frac{\partial K_4}{\partial q_A} & \frac{\partial K_4}{\partial q_B} \end{pmatrix} .$$

Efetuando as derivadas,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 - \beta J'_0 a & \beta J_0 a & (\beta J')^2 V_A & (\beta J)^2 V_A \\ \beta J_0 b & 1 - \beta J'_0 b & (\beta J)^2 V_B & (\beta J')^2 V_B \\ -2\beta J'_0 V_A & 2\beta J_0 V_A & 1 + (\beta J')^2 W_A & (\beta J)^2 W_A \\ 2\beta J_0 V_B & -2\beta J'_0 V_B & (\beta J)^2 W_B & 1 + (\beta J')^2 W_B \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

onde

$$a = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E}_A \rangle \quad ; \quad b = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E}_B \rangle \quad , \quad (\text{E.7})$$

$$V_A = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E}_A \tanh \mathcal{E}_A \rangle \quad ; \quad V_B = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E}_B \tanh \mathcal{E}_B \rangle \quad , \quad (\text{E.8})$$

$$W_A = 2\langle \text{sech}^2 \mathcal{E}_A \rangle - 3\langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_A \rangle \quad , \quad W_B = 2\langle \text{sech}^2 \mathcal{E}_B \rangle - 3\langle \text{sech}^4 \mathcal{E}_B \rangle \quad . \quad (\text{E.9})$$

A fronteira crítica desejada pode ser obtida através do determinante  $\det(\Gamma) = 0$ , com  $m_A = m_B = m$ ,  $q_A = q_B = q$ , o que resulta em  $a = b$ ,  $V_A = V_B = V$  e  $W_A = W_B = W$ . Ficamos então com

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{J'_0}{T}a & \frac{J_0}{T}a & \frac{J'^2}{T^2}V & \frac{J^2}{T^2}V \\ \frac{J_0}{T}a & 1 - \frac{J'_0}{T}a & \frac{J^2}{T^2}V & \frac{J'^2}{T^2}V \\ -2\frac{J'_0}{T}V & 2\frac{J_0}{T}V & 1 + \frac{J'^2}{T^2}W & \frac{J^2}{T^2}W \\ 2\frac{J_0}{T}V & -2\frac{J'_0}{T}V & \frac{J^2}{T^2}W & 1 + \frac{J'^2}{T^2}W \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (\text{E.10})$$

e resolvendo este determinante,

$$\left[ 1 - \frac{(J'_0 + J_0)}{T}a \right] \left[ 1 + \frac{(J'^2 - J^2)}{T^2}W \right] + 2\frac{(J'^2 - J^2)(J'_0 + J_0)}{T^3}V^2 = 0 \quad , \quad (\text{E.11})$$

onde

$$a = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \rangle \quad , \quad (\text{E.12})$$

$$V = \langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \tanh \mathcal{E} \rangle \quad , \quad (\text{E.13})$$

$$W = 2\langle \text{sech}^2 \mathcal{E} \rangle - 3\langle \text{sech}^4 \mathcal{E} \rangle \quad , \quad (\text{E.14})$$

$$\mathcal{E} = \beta \left[ H + (J'_0 - J_0)m + \left( (J'^2 + J^2)q + \sigma^2 \right)^{1/2} z \right] \quad . \quad (\text{E.15})$$

# Referências

- Abramowitz, M. e I.A. Stegun (1965), *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York).
- Barbara, B., A.P. Malozemoff e Y. Imry (1981), *Physica B* **108**, 1289.
- Barbara, B. e A.P. Malozemoff (1983), *J. Less-Common Metals*, **94**, 45.
- Belanger, D.P. (1992), in *Recent Progress in Random Magnets*, edited by D.H. Ryan (Singapore: World Scientific), 277-308.
- Belanger, D.P., W.E. Murray, Jr., F.C. Montenegro, A.R. King, V. Jaccarino, e R.W. Erwin (1991), *Phys. Rev. B* **44**, 2161.
- Berg, B.A., U.E. Hansmann e T. Celik (1994), *Phys. Rev. B* **50**, 15444.
- Bertrand, D., A.R. Fert, M.C. Schmidt, F. Bensamka, e S. Legrand (1982), *J. Phys. C* **15**, L883.
- Binder, K. e A.P. Young (1986), *Rev. Mod. Phys.* **58**, 801.
- Blandin, A., M. Gabay e T. Garel (1980), *J. Phys. C* **13**, 403.
- Bray, A.J. e M.A. Moore (1980), *J. Phys. C* **13**, L469.
- Bray, A.J. e M.A. Moore (1978), *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1068.
- Bray, A.J. e M.A. Moore (1979), *J. Phys. C* **12**, 79.
- Bray, A.J. e M.A. Moore (1984), *J. Phys. C* **17**, L463.
- Bray, A.J. e L. Viana (1983), *J. Phys. C* **16**, 4679
- Cannella, V. e J.A. Mydosh (1972), *Phys. Rev. B* **6**, 4220.
- Cardy, J.L. (1984), *Phys. Rev. B* **29**, 505.
- Ciria, J. C., G. Parisi e F. Ritort (1993), *J. Phys. A* **26**, 6731.
- Chikazama, S., T. Sato e Y. Miyako (1979), *J. Phys. Soc. Jpn* **47**, 335.
- Chowdhury, D. (1986), *Spin Glasses and Other Frustrated Systems*

(Singapore: World Scientific).

- Caracciolo, S., G. Parisi, S. Patarnello e N. Surlas (1990a), *Europhys. Lett.* **11**, 783.
- Caracciolo, S., G. Parisi, S. Patarnello e N. Surlas (1990b), *J. Phys. (Paris)* **51**, 1877.
- Cragg, D.M., e D. Sherrington (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1190.
- Cragg, D.M., D. Sherrington e M. Gabay (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 158.
- Cullity, B.D. (1972), *Introduction to Magnetic Materials* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts).
- De Dominicis, C., e I. Kondor (1983), *Phys. Rev. B* **27**, 606.
- de Almeida, J.R.L., e D.J. Thouless (1978), *J. Phys. A* **11**, 983.
- de Almeida, J.R.L., R.G. Jones, J.M. Kosterlitz e D.J. Thouless (1978), *J. Phys. C* **11**, L871.
- de Bruijn, N.G. (1981), *Asymptotic Methods in Analysis* (Dover Publications, Inc. New York).
- Edwards, S.F. e P.W. Anderson (1975), *J. Phys. F* **5**, 965.
- Elderfield, D. e D. Sherrington (1982), *J. Phys. A* **15**, L437.
- Elderfield, D. e D. Sherrington (1983a), *J. Phys. C* **16**, L497.
- Elderfield, D. e D. Sherrington (1983b), *J. Phys. C* **16**, 4865.
- Fischer, K.H. e J.A. Hertz (1991), *Spin Glasses* (Cambridge University Press, London).
- Fisher, D.S. e D.A. Huse, (1986), *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1601.
- Fisher, D.S. e D.A. Huse, (1988a), *Phys. Rev. B* **38**, 386.
- Fisher, D.S. e D.A. Huse, (1988b), *J. Phys. A* **20**, L1005.
- Fishman, S. e A. Aharony (1979), *J. Phys. C* **12**, L729.
- Fyodorov, Y.V., I.Y. Korenblit e E.F. Shender (1987a), *J. Phys. C* **20**, 1835
- Fyodorov, Y.V., I.Y. Korenblit e E.F. Shender (1987b), *Europhys. Lett.* **4**, 827
- Gabay, M. e G. Toulouse (1981), *Phys. Rev. Lett.* **47**, 201.
- Goldbart, P. e D. Sherrington (1985), *J. Phys. C* **18** L1923.
- Goldbart, P. e D. Elderfield (1985), *J. Phys. C* **16** L497.
- Grannan, E.R. e R.E. Hetzel, (1991), *Phys. Rev. Lett.* **67**, 907.
- Imry, Y. e S.K. Ma (1975), *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1399.

- Kasuya, T. (1956), Prog. Theor. Phys. **55**, 45.
- Keener, C.D. e M.B. Weissman (1996), J. Magn. Magn. Mater. **152**, 317.
- Kincaid, J.M., E.G.D. Cohen (1975), Phys. Rev. **22**, 57
- Kirkpatrick, S. e D. Sherrington (1978), Phys. Rev. B **17**, 4384.
- Korenblit, I.Y. e E.F. Shender (1985), Zh. Eksp. Teor. Fiz. **89**,  
 [Sov. Phys. JETP **62**, (1985), 1030].
- Kushauer, J. e W. Kleemann (1995), J. Magn. Magn. Mater. **140-144**, 1551.
- Lundgren, L., P. Svedlindh e O. Beckman (1982), Phys. Rev. B **26**, 3990.
- Ma, Y., C. Gong e Z. Li (1991), Phys. Rev. B **43**, 8665.
- Mézard, M., G. Parisi e M.A. Virasoro (1987), *Spin Glass Theory and Beyond*  
 (Singapore: World Scientific)
- Mézard, M., G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse e M. Virasoro  
 (1984), Phys. Rev. Lett. **52**, 1156.
- McMillan, W.L. (1984), Phys. Rev. B **30**, 476.
- McMillan, W.L. (1985), Phys. Rev. B **31**, 340.
- Montenegro, F.C., A.R. King, V. Jaccarino, S.J. Han, e D.P. Belanger  
 (1991), Phys. Rev. B **44**, 2155.
- Nagata, S., P.H. Keesom e H.R. Harrison (1979), Phys. Rev. B **19**, 1633.
- Nobre, F.D. e D. Sherrington (1986), J. Phys. C **19**, L181.
- Nobre, F.D. e D. Sherrington (1989), J. Phys. A **22**, 2825.
- Nogueira, E. Jr., F.D. Nobre, S. Coutinho e J.R.L. de Almeida (1996),  
 Phys. Rev. E **53**, 5742.
- Nogueira, E. Jr., F.D. Nobre, F.A. da Costa e S. Coutinho (1998),  
 Phys. Rev. E **57**, 5079.
- Parisi, G. (1979), Phys. Rev. Lett. **43**, 1741.
- Parisi, G. (1980a), J. Phys. A **13**, 1101.
- Parisi, G. (1980b), J. Phys. A **13**, 1887.
- Parisi, G., G. Toulouse (1980c), J. Phys. (France) Lett. **41**, L361
- Parisi, G. (1983), Phys. Rev. Lett. **50**, 1946.
- Parisi, G. e F. Ritort, (1993), J. Phys. A **26**, 6711.

- Pytte, E. e J. Rudnick (1979), *Phys. Rev. B* **19**, 3603.
- Raposo, E.P., M.D. Coutinho-Filho e F.C. Montenegro (1995), *Europhys. Lett.* **29**, 507.
- Raposo, E.P. e M.D. Coutinho-Filho (1998), *Phys. Rev. B* **57**, 3495.
- Reger, J.D., R.N. Bhatt e A.P. Young (1990), *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1854.
- Roberts, S.A. e A.J. Bray (1982), *J. Phys. C* **15**, L527.
- Ruderman, M.A. e C. Kittel (1954), *Phys. Rev.* **42**, 99.
- Sherrington, D. e S. Kirkpatrick (1975), *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1792.
- Soares, R.F., F.D. Nobre e J.R.L. de Almeida (1994), *Phys. Rev. B* **50**, 6151.
- Takayama, H. (1988), *Prog. Theor. Phys.* **80**, 827.
- Thouless, D.J., J.R.L. de Almeida e J.M. Kosterlitz (1980), *J. Phys. C* **13**, 3271.
- Viana, L. e A.J. Bray (1983), *J. Phys. C* **16**, 6817.
- van Enter, A.C.D. (1990), *J. Stat. Phys.* **60**, 275.
- Vieira, S.R., F.D. Nobre e F.A. da Costa (1998), *Phys. Lett. A* **250**, 288.
- Vieira, S.R., F.D. Nobre e F.A. da Costa, "*m-Vector Spin Glasses in the Presence of Uniaxial Anisotropies*", preprint (1999a).
- Vieira, S.R., F.D. Nobre e C.S.O. Yokoi, "*Effects of Random Fields in an Antiferromagnetic Ising Spin-Glass*", preprint (1999b).
- Wenger, L. E. e P.H. Keesom (1976), *Phys. Rev. B* **13**, 4053.
- Yoshizawa, H. S. Mitsuda, H. Aruga e A. Ito (1987), *Phys. Rev Lett.* **59**, 2364.
- Yoshizawa, H., S. Mitsuda, H. Aruga e A. Ito (1989), *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 1416.
- Yoshizawa, H., H. Mori, H. Kawano, H. Aruga-Katori, S. Mitsuda e A. Ito (1994), *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 3145.
- Yosida, K. (1957), *Phys. Rev.* **106**, 893.
- Young, A.P. (1997), Ed., *Spin Glasses and Random Fields* (World Scientific, Singapore).
- zen Wong, P., S. von Molnar, T.T.M. Palstra, J.A. Mydosh, H. Yoshizawa, S.M. Shapiro, e A. Ito (1985a), *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2043.
- zen Wong, P., H. Yoshizawa e S.M. Shapiro (1985b), *J. Appl. Phys.* **57**, 3462.