



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E MATEMÁTICA APLICADA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SISTEMAS E COMPUTAÇÃO
DOUTORADO ACADÊMICO EM SISTEMAS E COMPUTAÇÃO



Funções Mistura Generalizada e Aplicações

Antonio Diego Silva Farias

Orientador: Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago

Coorientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal

Natal - RN

2018

Antonio Diego Silva Farias

Funções Mistura Generalizada e Aplicações

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação.

Área de Concentração: **Teoria da Computação**

Orientador: **Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago**

Coorientador: **Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal**

Natal - RN

2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Farias, Antonio Diego Silva.

Funções mistura generalizada e aplicações / Antonio Diego Silva Farias. - 2018.

133 f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Sistemas e Computação. Natal, RN, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago.

Coorientador: Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bedregal.

1. Funções de Agregação - Tese. 2. Funções OWA - Tese. 3. Funções Mistura - Tese. 4. Funções Mistura Generalizada - aplicação - Tese. 5. Funções Mistura Generalizada Limitada - Tese. 6. Funções DYOWA - Tese. I. Santiago, Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes. II. Bedregal, Prof. Dr. Benjamín René Callejas. III. Título.

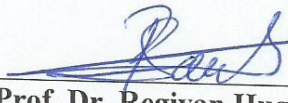
RN/UF/BCZM

CDU 517.518.26

ANTONIO DIEGO SILVA FARIAS

Funções Mistura Generalizada e Aplicações

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de doutor em Ciência da Computação e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação do Departamento de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

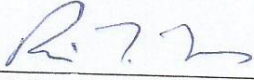


Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago – UFRN
Orientador

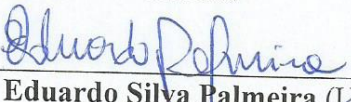


Prof. Dr. Benjamin Rene Callejas Bedregal – UFRN
Coorientador

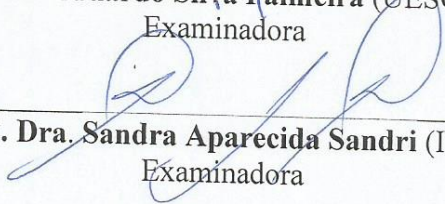
Banca Examinadora



Prof. Dr. Ronei Marcos De Moraes (UFPB)
Presidente



Prof. Dr. Eduardo Silva Palmeira (UESC-BA)
Examinadora



Prof.^a Dra. Sandra Aparecida Sandri (INPE)
Examinadora

Junho, 2018

Dedico este trabalho,

Aos meus pais Viltamar e Cleilsia.

Aos meus irmãos Denis e Diane.

À minha esposa Clécida.

Ao meu filho Diego Gabriel.

À todos meus familiares.

À todos que me apoiaram.

Agradecimentos

À Deus pela vida e todas as oportunidades concebidas.

Aos meus pais, Francisco Viltamar Gomes Farias e Cleilsia Maria Silva Farias, por todo o esforço realizado para me proporcionar uma educação de qualidade, pelos incentivos, amor e dedicação ofertados durante toda minha vida.

À minha esposa, Clécida Maria Bezerra Bessa, e ao meu filho, Diego Gabriel Bessa Farias, pela dedicação, paciência, amor e incentivos, que mesmo diante das adversidades e incontáveis horas de estrada, estiveram sempre presentes durante todo o trajeto percorrido até aqui.

Aos meus irmãos, Denis Silva Farias e Diane Maria Silva Farias, pelo apoio e incentivo de sempre, e também a todos os meus tios e tias, primos e primas, avôs e avós, sogro e sogra, cunhados e cunhadas e outras pessoas próximas a minha família.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Regivan Hugo Nunes Santiago, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Benjamín René Callejas Bederal, por terem aceito o desafio de orientar os meus trabalhos, pelos ensinamentos, atenção e valiosas contribuições apontadas ao longo dessa etapa.

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, ao Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET/UFRN, ao Departamento de Matemática Aplicada - DIMAp/UFRN, ao Grupo de Pesquisas Lógica, Linguagem, Informação - LoLITA/UFRN, Teoria e Aplicações e ao Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Computação - PPgSC/UFRN e a todos os amigos deste programa, especialmente aos meus amigos Claudio Andrés Callejas Bedregal, Valdigeis da Silva Costa e a Prof. Dra. Anne Magaly de Paula Canuto, que contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Ronei Marcos de Moraes, pela participação nas bancas de qualificação e defesa, e aos professores Dr. Eduardo Silva Palmeira, Dra. Sandra Aparecida Sandri e Dra.

Elisabeth Ferreira Gouveia Goldberg por também terem aceitado o convite de participação na banca da defesa deste trabalho.

À Universidade Federal do Ceará - UFC, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PGMAT/UFC, demais instituições e professores que cooperaram com a minha formação acadêmica.

Por fim, à Universidade Federal Rural do Semi-Árido, ao Centro Multidisciplinar de Paudalhos, ao Departamento de Ciências Exatas e Naturais e a todos os meus colegas desta grandiosa instituição de ensino, pesquisa e extensão, especialmente aos meus amigos Otávio Paulino Lavor, Josenildo Ferreira Galdino, Bruno Fontes de Sousa, Mônica Paula de Souza, Eudes Leite Lima (que já fez parte desta instituição) e Paulo Henrique das Chagas Silva, os quais doaram um pouco de seu tempo possibilitando o afastamento das minhas atividades laborais para iniciar minhas pesquisas.

RESUMO

Na literatura é bastante comum encontrar problemas que necessitam de mecanismos eficazes em realizar a tarefa de combinar entradas de uma mesma natureza em um valor do mesmo tipo que as entradas. As *funções de agregação*, como as “*Médias Ponderadas Ordenadas*” (*Ordered Weighted Averaging - OWA*), são modelos matemáticos eficientes em resolver esses problemas. Entretanto, outros tipos de funções, que não necessitam da *condição de monotonicidade* obrigatória para as funções de agregação, também podem ser utilizadas, como por exemplo, as “*Pré-agregações*” (*Pre-aggregations*), as funções “*Mistura (Mixture)*” e “*Mistura Generalizada*” (*Generalized Mixture - GM*). Neste trabalho, apresenta-se um estudo detalhado sobre as funções mistura generalizada, que são uma ampliação do conceito de função OWA e diferentemente das OWAs, possuem pesos capazes de se adaptar a cada vetor de entradas dessa função. Além disso, propõe-se uma extensão para as funções mistura generalizada denominadas funções “*Mistura Generalizada Limitada*” (*Bounded Generalized Mixture - BGM*). Em continuidade, introduz-se algumas classes de funções de média ponderada com pesos dinâmicos e domínios de reticulados: as funções “*OWA dinâmicas*” (*Dynamic Ordered Weighted Averaging - DYOWA*), as funções OWA e OWA fundamentadas por ordens admissíveis e as funções “*Reticulares de Mistura*” - LGM. Por fim, apresenta-se duas aplicações para as funções mistura generalizada: um método de redução de imagens e uma estratégia de combinação de múltiplos algoritmos de comitês classificadores.

Palavras-chave: Funções de Agregação, Funções de Pré-agregação, Funções OWA, Integrais de Choquet, Lógica Fuzzy, Funções Mistura, Funções Mistura Generalizada, Funções Mistura Generalizada Limitada, t-normas, t-conormas, Funções DYOWA, Ordens Parciais, Reticulados, Redução de Imagens, Comitês Classificadores.

ABSTRACT

In the literature it is quite common to find problems that need efficient mechanisms in accomplishing the task of combining entries of the same nature of the inputs values. The *aggregation functions*, such as the *Ordered Weighted Averaging* - OWA, are efficient mathematical models for solving these problems. However, other types of functions, which do not require the mandatory monotonicity condition for aggregation functions, can also be used, as for example, *Pre-aggregations*, *Mixture* and *Generalized Mixture* - GM functions. In this work, is presented a detailed study on the generalized mixture functions, which are an extension of the concept concept of OWA, but unlike of OWAs, have weights capable of adapting to each input vector of this Function. In addition, it is proposed an extension to the generalized mixture functions called Functions Generalized Bounded Generalized Mixture (BGM). Later, we introduce some class of weighted averaging functions with dynamic weights and lattice domains: Dynamic Ordered Weighted Averaging (DYOWA) the OWA and OWA functions based on admissible orders and the Mixed Reticle functions - LGM. Finally, two applications for generalized mixture functions are presented: a method of image reduction and a strategy of combining multiple algorithms of classifier ensembles.

Keywords: Aggregation Functions, Preaggregation Functions, OWA Functions, Choquet Integrals, Fuzzy Logic, Mixture Functions, Generalized Mixture Functions, Bounded Generalized Mixture Functions, t-norms, t-conorms, DYOWA Functions, Partial Ordered Sets, Lattices.

Sumário

Lista de símbolos

Lista de abreviaturas e siglas

Lista de tabelas

Lista de figuras

1	INTRODUÇÃO	p. 1
2	Agregações e Pré-agregações	p. 7
2.1	Tipos de Função de Agregação	p. 9
2.1.1	Funções de agregação do tipo média	p. 9
2.1.1.1	Funções OWA	p. 10
2.1.1.2	Integrais de Choquet	p. 14
2.1.2	Funções de agregação conjuntivas	p. 16
2.1.3	Funções de agregação disjuntivas	p. 19
2.2	Pré-agregações	p. 23
2.2.1	Funções mistura	p. 25
2.3	Algumas Propriedades	p. 27
2.4	Considerações Finais	p. 30

3	Ordens Parciais, Reticulados e Funções $LMOWA$	p. 31
3.1	Conjuntos Parcialmente Ordenados	p. 32
3.1.1	Diagramas de Hasse	p. 33
3.2	Reticulados	p. 46
3.2.1	Propriedades	p. 47
3.3	Agregações, t-normas e t-conormas em Reticulados	p. 50
3.4	Funções $LMOWA$	p. 53
3.5	Considerações Finais	p. 58
4	Funções Mistura Generalizada	p. 60
4.1	Funções Mistura Generalizada Limitada	p. 65
4.2	Propriedades das Funções Mistura Generalizada e Generalizada Limitada	p. 66
4.2.1	Monotonicidade direcional	p. 72
4.3	Funções H_{Θ}	p. 75
4.3.1	Propriedades da função H	p. 78
4.4	Considerações Finais	p. 83
5	Funções Mistura para Reticulados Limitados	p. 84
5.1	Funções $DYOWA$	p. 84
5.1.1	Propriedades das funções $DYOWA$	p. 88
5.1.2	Funções $DYOWA$ fundamentadas por ordens admissíveis	p. 93
5.1.3	Funções de média ponderada ordenada fundamentadas por ordens admissíveis	p. 95
5.1.4	Funções Reticulares de Mistura Generalizada	p. 98

5.2	Considerações Finais	p. 100
6	Aplicações	p. 102
6.1	O Processo de Redução de Imagens Baseado em Funções Mistura Generalizada	p. 102
6.1.1	Metodologia utilizada	p. 106
6.1.2	Resultados obtidos	p. 107
6.2	Combinando Múltiplos Algoritmos de Comitês Classificadores usando Funções Mistura Generalizada	p. 111
6.2.1	Metodologia utilizada	p. 117
6.2.2	Resultados obtidos	p. 119
6.3	Considerações Finais	p. 123
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	p. 125
7.1	Trabalhos Futuros	p. 127
	Referências	p. 129

Lista de símbolos

ϕ_X - Função de pertinência do conjunto *fuzzy* X

$x_{(k)}$ - k -ésimo maior valor dentre x_1, \dots, x_n

$x_{[k]}$ - k -ésimo menor valor dentre x_1, \dots, x_n

\mathbf{w} - Um vetor n -dimensional $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$

\vec{r} - Um vetor direcional n -dimensional

$\tilde{\mathbf{a}}$ - Um elemento de L^n

\mathbf{w}^R - Reverso do vetor $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, ou seja, o vetor $\mathbf{w}^R = (w_n, \dots, w_1)$

w_k - k -ésima coordenada do vetor $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$

\mathcal{N} - Conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$

$2^{\mathcal{N}}$ - Conjunto das partes de \mathcal{N}

$\mathcal{P}(X)$ - Conjunto das partes de X

$\#X$ - Cardinalidade do conjunto X

μ - Medida *fuzzy discreta*

μ_{\top} - Maior medida *fuzzy discreta*

μ_{\perp} - Menor medida *fuzzy discreta*

μ_{x_0} - Medida *fuzzy discreta* de Dirac

N - Uma negação *fuzzy*

A - Uma função de agregação

A^N - Dual da função A

T ou \otimes - Uma t-norma

T_M - t-norma do mínimo

T_P - t-norma do produto

T_L - t-norma de Łukasiewicz

T_D - t-norma produto drástico

S ou \oplus - Uma t-conorma

\otimes - Uma t-norma estendida associativamente para n coordenadas

S_M - t-conorma do máximo

T_P - t-conorma soma probabilística

T_L - t-conorma de Łukasiewicz

T_D - t-coconoma soma drástico

S ou \oplus - Uma t-conorma

\oplus - Uma t-conorma estendida associativamente para n coordenadas

$\stackrel{def}{=}$ - Igual por definição

$\lfloor a \rfloor$ - Maior número inteiro menor que a

$\neg P$ - Negação da asserção P

\mathbb{N} - Conjunto dos números naturais

\mathbb{N}^+ - Conjunto dos números naturais positivos

\mathbb{Z} - Conjunto dos números inteiros

\mathbb{Q} - Conjunto dos números racionais

\mathbb{R} - Conjunto dos números reais

\mathbb{C} - Conjunto dos números complexos

$sup(S)$ ou $\bigvee S$ - Supremo do conjunto S

\bigvee - Operador supremo binário

$inf(S)$ ou $\bigwedge S$ - Ínfimo do conjunto S

\bigwedge - Operador ínfimo binário

\leq - Uma relação de ordem

\leq_L - Uma relação de ordem no conjunto L

\leq_{div} - Ordem da divisão em \mathbb{N}

\leq_{KM} - Ordem de Kulisch-Miranker

\leq_{XY} - Ordem de Xu-Yager

\sqsubseteq - Ordem ponto a ponto de funções

\perp_L - Menor elemento de uma ordem L

\top_L - Maior elemento de uma ordem L

Lista de abreviaturas e siglas

min - Função mínimo

max - Função máximo

$arit$ - Função média aritmética

$geom$ - Função média geométrica

$pond_{w_1, \dots, w_n}$ - Função média ponderada com pesos w_1, \dots, w_n

$slim$ - Função soma limitada

$prod$ - Função produto

$medi$ - Função mediana

OWA - Função de média ponderada ordenada (*ordered weighted averaging*)

OWA_w - Função OWA com vetor de pesos w

OWA_{w^R} - Função OWA com vetor de pesos w^R

OWA_w^R - Função OWA reversa com vetor de pesos w

cOWA - Função OWA centrada

$OWA_w^{\preceq_L}$ - Função OWA fundamentada pela ordem admissível \preceq_L e vetor de pesos w

C_μ - Integral discreta de Choquet com medida μ

MIX - Função mistura

MIX_{w_1, \dots, w_n} - Função mistura com vetor de pesos w

FFP - Família finita de funções de pesos

FFPr - Família finita de funções de pesos relaxada

dFFP - Família distributiva de funções de pesos

GM - Função mistura generalizada

BGM - Função mistura generalizada limitada

\mathcal{LM} - Função de Lizasoain-Moreno

$\mathcal{LM}OWA$ - Função OWA de Lizasoain-Moreno

DYOWA - Função OWA dinâmica

$DYOWA_{\Gamma}$ - Função OWA dinâmica com dFFP Γ

$DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L}$ - Função OWA dinâmica fundamentada pela ordem admissível \preceq_L e dFFP Γ

LGM - Função reticular de mistura

LGM_{Γ} - Função reticular de mistura com dFFP Γ

Lista de tabelas

- 1 Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por clonagem de *pixels* com vizinhanças 2×2 p. 107
- 2 Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bilinear com vizinhanças 2×2 p. 108
- 3 Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bicúbica com vizinhanças 2×2 p. 108
- 4 Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por clonagem de *pixels* com vizinhanças 4×4 p. 109
- 5 Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bilinear com vizinhanças 4×4 p. 109
- 6 Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bicúbica com vizinhanças 4×4 p. 110
- 7 Contagem das funções GM que obtiveram maior similaridade - vizinhança 2×2 p. 111
- 8 Contagem das funções GM que obtiveram maior similaridade - vizinhança 4×4 p. 111
- 9 Bases de dados utilizadas p. 117
- 10 Resultados (precisão \pm desvio padrão) para cada comitê com os métodos de combinação propostos e os tradicionais. p. 119

- 11 Resultados do teste estatístico pareado, no formato $x - y - z$, em que x = número de ganhos dos métodos de linha, y = número de empates e z = número de perdas dos métodos de linha. p. 121
- 12 Comparação entre os resultados obtidos pelos métodos de classificação descritos na primeira linha. p. 123
- 13 Tempo de execução de cada método para os diferentes tamanhos de comitês classificadores. p. 123

Lista de figuras

1	Procedimento para calcular os valores de saída da função OWA.	p. 11
2	Diagrama de Hasse de $\langle P, \leq \rangle$	p. 34
3	Diagrama de Hasse.	p. 34
4	Diagrama de Hasse para $\langle \mathbb{N}, \leq_{div} \rangle$	p. 35
5	Diagrama de Hasse da ordem dual.	p. 35
6	Diagrama de Hasse para \mathbb{N}	p. 36
7	Diagrama de Hasse para $\langle X, \leq_0 \rangle$	p. 36
8	Diagramas de Hasse para $\langle X, \leq_1 \rangle$ e $\langle X, \leq_2 \rangle$	p. 41
9	Diagrama de Hasse.	p. 43
10	Procedimento para calcular os valores de saída da função GM.	p. 61
11	Diagrama de classes de funções.	p. 67
12	Distribuição dos pesos da função H_{min} para $\mathbf{x} = (0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 1)$. . .	p. 75
13	Distribuição dos pesos da função H_{arit} para $\mathbf{x} = (0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 1)$. . .	p. 76
14	Distribuição dos pesos da função H_{max} para $\mathbf{x} = (0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 1)$. . .	p. 76
15	Distribuição dos pesos da função H para $\mathbf{x} = (0.1, 0.25, 0.3, 0.1)$	p. 77
16	Distribuição dos pesos da função H para $\mathbf{x} = (0.33, 0.30, 0, 0.25)$	p. 77
17	Exemplo de imagem em escala de cinza.	p. 103
18	Exemplo de imagem em RGB.	p. 103

19	Exemplo de redução de imagem em escala 3×3	p. 105
20	Ilustração do processo de redução de imagens usando a função <i>min</i>	p. 105
21	Ilustração do processo de ampliação de imagens pelo método de clonagem de <i>pixels</i>	p. 106
22	Ilustração da estrutura modular de um comitê classificador	p. 112
23	Ilustração da estrutura modular de um comitê classificador	p. 113

1 INTRODUÇÃO

Na segunda metade do século XX, buscavam-se formas de generalizar a noção de pertinência dos conjuntos clássicos, que permitia, em sua lógica, apenas pertinências bivalentes (verdadeiro/falso). Uma dessas extensões foi proposta por Lotfi A. Zadeh, em (ZADEH, 1965), que introduziu o conceito de *conjunto difuso* (ou *conjunto fuzzy*), caracterizando a pertinência dos elementos de um *conjunto fuzzy*, X , por meio de uma função de pertinência, $\phi : X \rightarrow [0, 1]$, que atribui a cada objeto de X um grau de adesão nesse conjunto. Outras importantes exemplos de teorias que também generalizaram a noção clássica de conjuntos são a *teoria das categorias* (MENEZES; HEUSLER, 2001) e as *teoria das capacidades de Choquet* (CHOQUET, 1953).

Além disso, Zadeh, em (ZADEH, 1965), estendeu os operadores usuais da teoria dos conjuntos clássicos à teoria dos conjuntos difusos, como por exemplo:

- A **união** de dois conjuntos de *fuzzy* A e B com funções de pertinência μ_A e μ_B , respectivamente, é um conjunto $C = A \cup B$ caracterizado pela função $\phi_C(x) = \max(\phi_A(x), \phi_B(x))$;
- A **intersecção** de dois conjuntos de *fuzzy* A e B é um conjunto $C = A \cap B$ caracterizado pela função $\phi_C(x) = \min(\phi_A(x), \phi_B(x))$;

Após esses conceitos iniciais, a área evoluiu para o estudo da lógica que definiu os operadores e as relações conjuntistas, dando origem ao termo *lógica difusa* (ou *lógica fuzzy*) e aos operadores de conjunção e disjunção *fuzzy*:

$$\phi_A(x) \vee \phi_B(x) = \max(\phi_A(x), \phi_B(x)) \text{ e } \phi_A(x) \wedge \phi_B(x) = \min(\phi_A(x), \phi_B(x))$$

Depois disso, percebeu-se que as funções *max* e *min* dos operadores de conjunção e disjunção eram casos particulares de *funções de agregação*, que podem ser utilizadas em uma grande gama de aplicações, tendo em vista sua capacidade de combinar conjuntos finitos de informações de uma mesma natureza (as entradas da função) em únicos dados com o mesmo tipo das entradas (as saídas da função), que resumem as informações contidas nos atributos de entradas da função. A definição de função de agregação encontra-se no Capítulo 2.

Essa vocação das funções agregações para aplicações, como em processamento de imagens, em problemas de tomada de decisão e em métodos de agrupamento baseados em problemas de classificação, tem atraído o interesse de muitos pesquisadores. Como fruto dessas pesquisas, sugeriram as *t-normas* e as *t-conormas* (SCHWEIZER; SKLAR, 1958, 1960, 1961, 1963), que modelam, respectivamente, as conjunções e as disjunções da lógica *fuzzy*, e as “*médias ponderadas ordenadas*” (*ordered weighted averaging* - OWA), introduzidas por Ronald R. Yager em (YAGER, 1988). As definições dessas funções também podem ser encontradas no Capítulo 2.

As funções OWA, como indicado no nome *ordered weighted averaging*, são médias ponderadas cujos pesos estáticos (constantes) são associados às amplitudes de suas instâncias de entrada, determinando assim, a influência de cada uma dessas entradas para o cálculo de saída da função. Essa importante característica das funções OWA tem possibilitado uma ampla gama de aplicações para essas funções, como pode ser visto por exemplo, em (YAGER, 2006; ZHOU et al., 2008; CHENG; WANG; WU, 2009; PATERNAIN et al., 2015). Além disso, pode-se encontrar na literatura, diversas generalizações para essas funções, como destacadamente, as funções *LMOWA* de Lizasoain e Moreno (LIZASOAIN; MORENO, 2013), que também são médias ponderadas ordenadas com pesos estáticos e estão definidas no Capítulo 3.

A condição estática dos pesos das funções OWA e *LMOWA* impõe uma limitação a essas funções, tendo em vista que os mesmos pesos devem ser utilizados em todas as avaliações realizadas por elas. Uma alternativa para minimizar essa limitação é a substituição desses pesos estáticos por pesos dinâmicos (variáveis), como ocorre nas **funções mistura**, cuja definição encontra-se no Capítulo 2.

Ao perceberem que os pesos dinâmicos das funções mistura não são sensíveis a variação de todo o conjunto de entradas, Pereira e Pasi, em (PEREIRA; PASI, 1999), introduziram as *funções mistura generalizada* (ou *generalized mixture - GM*), que são funções $GM : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ da forma

$$GM(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i,$$

onde $\left\{ f_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1] : i = 1, 2, \dots, n \text{ e } \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ em } [0, 1]^n \right\}$, constitui uma *Família de Funções de Pesos - FFP*, e ainda constataram que essas funções podem não atender a condição de monotonicidade das agregações.

Essa limitação, da monotonicidade, pode ter gerado o desinteresse no estudo das funções mistura generalizada. No entanto, em trabalhos mais recentes, tem-se verificado que a condição de monotonicidade pode ser substituída por *monotonicidade fraca*, proposta em (WILKIN; BELIAKOV, 2014), ou *monotonicidade direcional*, introduzida em (BUSTINCE et al., 2015).

Esse novo contexto motivou diversas pesquisas sobre funções que não necessitam da monotonicidade, como as *pré-agregações*, que foram introduzidas em (LUCCA et al., 2016) e devem satisfazer a monotonicidade direcional, conforme definição disposta no Capítulo 2. Assim, retomou-se o interesse de estudar as funções mistura generalizada, resultando nos seguintes trabalhos que originaram esta tese:

- “*A method of image reduction and noise reduction based on a generalization of ordered weighted averaging functions*” (FARIAS et al., 2016);
- “*Some properties of generalized mixture functions*” (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2016);
- “*Interval-valued generalized mixture functions*” (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018b);
- “*The image reduction process based on generalized mixture functions*” (FARIAS et al., 2016b);
- “*Combining multiple algorithms in an ensemble of classifiers using generalized mixture functions*” (COSTA et al., 2018).

Esta tese dedica-se ao estudo de funções de média ponderada com pesos dinâmicos. O Capítulo 4 explora as funções mistura generalizada, contemplando propriedades, aplicações e extensões não apresentadas em (PEREIRA; PASI, 1999; PEREIRA, 2000; PEREIRA; RIBEIRO, 2003). Uma dessas extensões para as funções mistura generalizada será alcançada através da flexibilização da condição $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) = 1$ para $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \leq 1$, introduzindo-se assim, as funções *Mistura Generalizada Limitada* (*Bounded Generalized Mixture - BGM*), que deram origem aos seguintes trabalhos:

- “*Funções mistura generalizadas construídas via funções mistura generalizada limitada*” (FARIAS et al., 2016a);
- “*Constructing Generalized Mixture Functions from Bounded Generalized Mixture Functions*” (FARIAS et al., 2017);
- “*Bounded generalized mixture functions*” (FARIAS et al., 2018);
- “*Directional and ordered directional monotonicity of generalized and bounded generalized mixture functions*” (FARIAS et al., 2018).

Dando continuidade a este trabalho, no Capítulo 5, introduz-se algumas classes de funções de média ponderada com pesos dinâmicos em domínios de reticulados limitados, que são uma generalização do intervalo $[0, 1]$. Inicia-se este Capítulo propondo-se as funções *OWAs dinâmicas* (ou *dynamic OWAs - DYOWAs*), que generalizam as noções de média ordenada ponderada das funções *LMOWA* e *OWA*. Em seguida, utiliza-se ordens admissíveis para, converter o domínio de reticulado limitado das funções *DYOWA* e *LMOWA* em uma ordem linear limitada possibilitando, inserir novas e mais robustas noções de *LMOWA* e *DYOWA*. Por fim, propõe-se o conceito de *função reticular de mistura generalizada - LGM*, que são funções mistura generalizada em reticulados limitados.

Finalizando esta tese, no Capítulo 6, apresenta-se duas aplicações para as funções mistura generalizada com a utilização de uma classe especial de funções *GM*. Essas aplicação são: (1) Uma processo de redução de imagens e (2) um método de combinação de algoritmos de comitês classificadores.

Dessa forma, destaca-se que os objetivos desta tese são:

- Estender as funções *mistura generalizada* para *mistura generalizada limitada* - BGM;
- Ampliar as funções *LMOWA* para OWA dinâmica (DYOWA);
- Propor uma forma mais robusta para as funções *LMOWA* e DYOWA;
- Introduzir o conceito de *função reticular de mistura generalizada* - LGM;
- Comprovar a relevância dessas funções por meio de duas aplicações para as funções *mistura generalizada*.

Para isso, estruturou-se este tese da seguinte forma:

Capítulo 1. Introdução: Faz uma apresentação sobre os assuntos relacionados nesta tese, bem como das contribuições, dos objetivos e dos capítulos que estruturam este trabalho.

Capítulo 2. Agregações e Pré-agregações: Expõe uma discussão detalhada acerca de conceitos preliminares aos desdobramentos contidos nos capítulos subsequentes.

Capítulo 3. Ordens Parciais e Reticulados: Traz uma exposição sobre conjuntos parcialmente ordenados e reticulados e apresenta alguns tipos de funções que podem ser consideradas nesses domínios, tais como: agregações, t-normas, t-conormas e *LMOWA*s.

Capítulo 4. Funções Mistura Generalizada: Apresenta o conceito de função mistura generalizada, propõe a ampliação dessa funções para mistura generalizada limitada, mostra propriedades desses dois tipos funções, e aponta algumas funções GM que serão utilizadas nas aplicações do capítulo 6.

Capítulo 5. Funções Reticulares de Mistura: Propõe a generalização das funções *LMOWA* para DYOWA, apresenta exemplos e especificidades das funções propostas, propõe formas mais robustas de *LMOWA*, DYOWA com a fundamentação das ordens admissíveis e introduz as funções reticulares de mistura.

Capítulo 6. Aplicações: Aplica para as funções mistura generalizada em um método de redução de imagens e em um método de combinação de algoritmos em comitês classificadores.

Capítulo 7. Conclusões e Trabalhos Futuros: Apresenta as conclusões e as pretensões para trabalhos futuro.

2 Agregações e Pré-agregações

As funções de agregação (ou *aggregation functions* no inglês), de acordo com (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016), têm como proposta combinar entradas de uma mesma natureza, como por exemplo, graus de pertinência de conjuntos *fuzzy* (ou graus de preferência ou forças de uma evidência) em um único valor do mesmo tipo que as entradas. Ainda como menciona (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016), essas funções são utilizadas para modelar os conectivos da lógica *fuzzy* e também podem ser utilizadas em problemas de tomada de decisão, em sistemas baseados em regras e outros. De maneira mais geral, elas têm o papel de resumir vários valores num único valor representativo — e.g. valores são resumidos pela média aritmética. Algumas aplicações das funções de agregação podem ser encontradas, por exemplo, na medicina (JOSEPH; SINGH; MANIKANDAN, 2014; MIHAJLOVIC et al., 2011; WOO et al., 2009; MANOKAR et al., 2012), no processamento digital de imagens (PATERNAIN et al., 2015; BELIAKOV; BUSTINCE; PATERNAIN, 2012; DIGHE; SHRIRAM, 2012; FARIAS et al., 2016b), na engenharia (LIANG; XU, 2014) e em outras áreas (FARIAS et al., 2016c, 2016; COSTA et al., 2018).

Neste capítulo apresenta-se um tipo particular de função de agregação, cujas entradas são valores pertencentes ao intervalo $[0, 1]$. No entanto, essas funções podem ser estudadas de pontos de vista mais amplos, como será mostrado no Capítulo 3.

Definição 2.1 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função de agregação é uma função de $n > 1$ argumentos que aplica o (n -dimensional) cubo no intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$, $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, com as seguintes propriedades:*

$$(A1) \quad A(0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ e } A(1, 1, \dots, 1) = 1; \text{ e}$$

$$(A2) \quad A(x_1, \dots, x_n) \leq A(y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ sempre que } x_i \leq y_i \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

A propriedade (A1) é denominada *condições de fronteira* (ou *boundary conditions*), enquanto que a propriedade (A2) é chamada *condição de monotonicidade* ou *isotonicidade*. Abaixo apresenta-se alguns exemplos de funções de agregação.

Exemplo 2.1. São funções de agregação em $[0, 1]$:

1. A função mínimo:

$$\min(x_1, \dots, x_n) = y, \text{ onde } y \text{ é o menor valor de } \{x_1, \dots, x_n\}$$

2. A função máximo:

$$\max(x_1, \dots, x_n) = y, \text{ onde } y \text{ é o maior valor de } \{x_1, \dots, x_n\}$$

3. A função média aritmética:

$$\text{arit}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

4. A função média aritmética ponderada:

$$\text{pond}_{w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n) = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n,$$

onde w_1, \dots, w_n são valores em $[0, 1]$ com $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

5. A função produto:

$$\text{prod}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

6. A função mediana:

$$\text{medi}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & \text{se } n = 2k \text{ é par} \\ x_{(k)}, & \text{se } n = 2k - 1 \text{ é ímpar} \end{cases},$$

onde $x_{(k)}$ é o k -ésimo maior valor dentre x_1, \dots, x_n .

Outros exemplos de funções de agregação podem ser encontrados em (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016; GRABISCH et al., 2009; DUBOIS; PRADE, 2004). Além disso, pode-se definir uma forma mais geral de função agregação em $[0, 1]$, conforme abaixo:

Definição 2.2 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função de agregação estendida é uma aplicação*

$$F : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1],$$

tal que a restrição dessa aplicação ao domínio $[0, 1]^n$, para $n \in \mathbb{N}$ fixo, é uma função de agregação n -ária, com a convenção $F(x) = x$ para $n = 1$.

Observação 2.1. *Todas as funções de agregação apresentadas no Exemplo 2.1, podem ser tratadas como funções de agregação estendidas.*

2.1 Tipos de Função de Agregação

As funções de agregação são classificadas em quatro classes (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016):

- As funções de agregação do **tipo média** (*averaging aggregation functions*);
- As funções de agregação **conjuntivas** (*conjunctive aggregation functions*);
- As funções de agregação **disjuntivas** (*disjunctive aggregation functions*); e
- As funções de agregação **mistas** (*mixed aggregation functions*).

As funções de agregação mistas não possuem relação com esta pesquisa, e por esse motivo, não será apresentada uma discussão detalhada sobre elas, que são caracterizadas como funções de agregação que não pertencem a nenhuma das outras três classes.

2.1.1 Funções de agregação do tipo média

“As médias são as formas mais comuns de combinar entradas. São comumente usadas na votação multicritério e em tomada de decisão, construindo várias pontuações de desempenho, análises estatísticas, etc. A regra básica é que a pontuação total não pode ser superior ou inferior a qualquer uma das entradas. O valor agregado é visto como algum tipo de valor representativo de todas as entradas” (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016, p. 39).

Definição 2.3 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função de agregação $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é do tipo média se para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tem-se*

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n)$$

As funções mínimo, máximo, média aritmética, média ponderada e mediana são exemplos de funções de agregação do tipo média. Além dessas funções clássicas, existem importantes funções de agregação do tipo média, que são: (1) as funções *média ponderada ordenada* (*ordered weighted averaging* - OWA), e (2) as Integrais de Choquet.

2.1.1.1 Funções OWA

Em algumas aplicações, todas as entradas são equivalentes e a importância de uma entrada é determinada pelo seu valor. Por exemplo, quando um robô navega por obstáculos usando vários sensores, a maior entrada (o obstáculo mais próximo) é o mais importante. OWA são funções de agregação simétricas que alocam pesos de acordo com o valor de entrada. Assim, as OWA_s enfatizam entradas de maior, menor ou médio alcance (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016, p. 68).

Definição 2.4 ((YAGER, 1988)). *Dado um vetor de pesos n -dimensional, isto é um $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ com $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, a função $OWA_{\mathbf{w}} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é definida por*

$$OWA_{\mathbf{w}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)},$$

onde $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ é uma ordenação decrescente do vetor de entradas (x_1, \dots, x_n) , e chamada de função **média ponderada ordenada** (*ordered weighted averaging* - OWA).

Para calcular os valores de saída de uma função OWA deve-se seguir o procedimento indicado na Figura 1.

Exemplo 2.2. *Se $n = 4$ e $\mathbf{w} = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$, então para a entrada $(0, 1, 0.2, 0.5)$ tem-se $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}) = (1, 0.5, 0.2, 0)$ e assim,*

$$OWA_{\mathbf{w}}(0, 1, 0.2, 0.5) \stackrel{def}{=} 0.1 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0 = 0.26$$

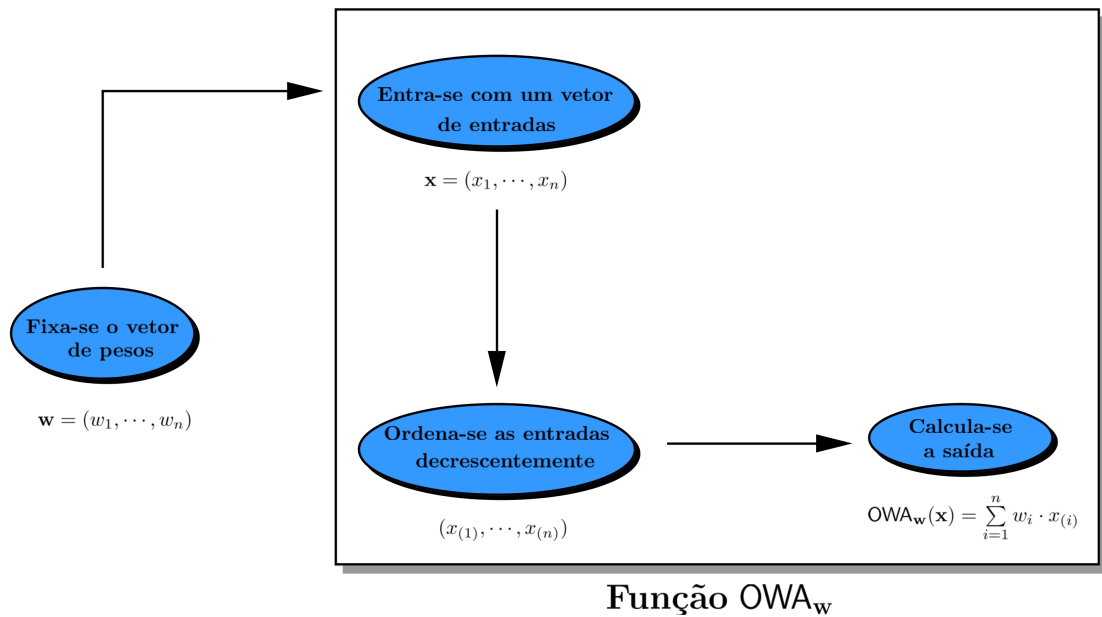


Figura 1: Procedimento para calcular os valores de saída da função OWA.

Proposição 2.1. *Seja $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ com $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Então, a função OWA_w é uma função de agregação do tipo média.*

Demonstração. Basta notar que, por definição, $x_n \leq x_{(n-1)} \leq \dots \leq x_{(i)} \leq \dots \leq x_{(2)} \leq x_1$.

Assim,

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq OWA_w(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n),$$

pois

$$x_{(n)} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{(n)} \leq \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{(i)} \leq \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{(1)} = x_{(1)},$$

em que:

$$x_n = \min(x_1, \dots, x_n) \text{ e } x_{(1)} = \max(x_1, \dots, x_n)$$

Além disso, OWAs satisfazem (A1) e (A2). □

As OWAs tem um comportamento paramétrico. De acordo com o vetor de pesos ela pode simular outras funções de agregação. Por exemplo:

Exemplo 2.3.

1. Se $\mathbf{w} = (0, \dots, 0, 1)$, então $OWA_{\mathbf{w}} = \min$;
2. Se $\mathbf{w} = (1, \dots, 0, 0)$, então $OWA_{\mathbf{w}} = \max$;
3. Se $\mathbf{w} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, então $OWA_{\mathbf{w}} = \text{arit}$;
4. Se $w_i = 0$, para todo $i \neq k$ e $w_k = 1$, então $OWA_{\mathbf{w}}(x_1, \dots, x_n) = x_{(k)}$, ou seja, é a k -ésima maior entrada, é chamada *OWA estática*;
5. A função mediana é também uma instância da função *OWA*, cujos pesos são definidos por:
 - (a) se $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}^+$, então define-se $w_i = 0$ para todo $i \neq k$ e $i \neq k + 1$, e $w_k = w_{k+1} = \frac{1}{2}$;
 - (b) se $n = 2k - 1$, para algum $k \in \mathbb{N}^+$, então define-se $w_i = 0$ para todo $i \neq k$ e $w_k = 1$.

Exemplo 2.4. Uma função média aritmética ponderada, quando difere de *arit*, ou seja, nos casos em que $w_i \neq w_j$ para algum $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, não é uma função *OWA*, pois:

$$\text{pond}_{w_1, \dots, w_n}(\mathbf{x}) = w_i \text{ e } \text{pond}_{w_1, \dots, w_n}(\mathbf{y}) = w_j,$$

onde $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ é o vetor que tem 1 na coordenada i e zero nas demais coordenadas e $\mathbf{y} \in [0, 1]^n$ tem 1 na coordenada j e zero nas demais coordenadas. Por outro lado,

$$OWA_{w_1, w_2, \dots, w_n}(\mathbf{x}) = w_1 = OWA_{w_1, w_2, \dots, w_n}(\mathbf{y}).$$

Definição 2.5 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). Dada uma função $OWA_{\mathbf{w}}$, com $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, pode-se inverter a ordem do vetor \mathbf{w} para $\mathbf{w}^R = (w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$. A função *OWA* obtida a partir desse novo vetor \mathbf{w}^R , ou seja, $OWA_{\mathbf{w}^R}$, é chamada de *OWA reversa* e é denotada por $OWA_{\mathbf{w}}^R$.

Exemplo 2.5. Para $n = 3$ e $\mathbf{w} = (0.2, 0.3, 0.5)$ tem-se:

$$OWA_{\mathbf{w}}(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\text{def}}{=} 0.2x_{(1)} + 0.3x_{(2)} + 0.5x_{(3)},$$

enquanto que

$$OWA_{\mathbf{w}}^R(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\text{def}}{=} 0.5x_{(1)} + 0.3x_{(2)} + 0.2x_{(3)}.$$

Aplicando essas duas funções às entradas $\mathbf{x} = (0.5, 1, 0.2)$ tem-se

$$OWA_{\mathbf{w}}(0.5, 1, 0.2) \stackrel{\text{def}}{=} 0.2 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.45$$

e

$$OWA_{\mathbf{w}}^R(0.5, 1, 0.2) \stackrel{\text{def}}{=} 0.5 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.69$$

Dentre os exemplos de OWA já descritos anteriormente (Exemplo 2.4), tem-se que:

- $\min^R = \max$;
- $\max^R = \min$;
- $\text{arit}^R = \text{arit}$;
- $\text{medi}^R = \text{medi}$.

Note que tanto a *mediana* quanto a *média aritmética* são exemplos de OWA que satisfazem $OWA^R = OWA$. Para que isso ocorra, os pesos devem ser distribuídos de forma simétrica, pois:

1. Aplicando OWA^R e OWA ao vetor $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)$, obtêm-se

$$w_1 \stackrel{\text{def}}{=} OWA_{\mathbf{w}}(1, 0, \dots, 0) \stackrel{\text{def}}{=} OWA_{\mathbf{w}}^R(1, 0, \dots, 0) \stackrel{\text{def}}{=} w_n$$

2. Aplicando OWA^R e OWA ao vetor $\mathbf{x} = (1, 1, 0, \dots, 0)$, observa-se que

$$w_1 + w_2 = w_{n-1} + w_n \implies w_2 = w_n$$

3. Por indução, conclui-se que $w_1 = w_n, w_2 = w_{n-1}, \dots, w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = w_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Outras funções que satisfazem a propriedade $OWA^R = OWA$ são:

Definição 2.6. (YAGER, 2006) *Dados os seguintes pesos:*

- (i) Se $n = 2k$, então $w_i = \frac{2(2i-1)}{n^2}$, para $1 \leq j \leq k$, e $w_i = w_{n-i+1}$, para $k+1 \leq i \leq n$.
- (ii) Se $n = 2k-1$, então $w_i = \frac{2(2j-1)}{n^2}$, para $1 \leq i \leq k-1$ e $w_i = w_{n-i+1}$, para $k+1 \leq i \leq n$, enquanto que $w_k = 1 - 2 \sum_{j=1}^{k-1} w_j$. As funções OWA definidas a partir dos pesos acima são chamadas de **OWA's centradas** e denotados por **cOWA**.

2.1.1.2 Integrais de Choquet

As integrais de Choquet são uma importantíssima família de funções de agregação, introduzidas por Choquet (CHOQUET, 1953) que, além de generalizar as funções OWA de Yager, também generalizam a integral de Lebesgue, que por sua vez é uma forma de integral mais ampla que a integral de Riemann.

Definição 2.7 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma medida discreta fuzzy é uma função $\mu : 2^{\mathcal{N}} \rightarrow [0, 1]$, onde $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ e $2^{\mathcal{N}}$ é o conjunto das partes de \mathcal{N} , tal que:*

$$M1: \mu(X) \leq \mu(Y) \text{ sempre que } X \subseteq Y;$$

$$M2: \mu(\emptyset) = 0 \text{ e } \mu(\mathcal{N}) = 1.$$

Exemplo 2.6. *As funções abaixo são exemplos de medidas discreta fuzzy.*

$$1. \mu_{\perp}(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } X = \mathcal{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$2. \mu_{\top}(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } X = \emptyset \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não é difícil mostrar que μ_{\perp} e μ_{\top} são medidas fuzzy. Além disso, μ_{\perp} e μ_{\top} são, respectivamente, a menor e a maior medida fuzzy, ou seja, se μ é uma medida discreta fuzzy, então:

$$\mu_{\perp}(X) \leq \mu(X) \leq \mu_{\top}(X), \forall X \in 2^{\mathcal{N}}$$

Exemplo 2.7. Também são exemplos de medidas discreta fuzzy as seguintes funções:

1. $\mu(X) = \frac{\#X}{n}$, onde $\#X$ representa a cardinalidade (ou número de elementos) do conjunto X . Essa medida representa a probabilidade de um evento num espaço equiprovável finito;
2. $\mu_m(X) = \left(\frac{\#X}{n}\right)^m$, onde $m \in \mathbb{R}$;
3. A medida de Dirac $\mu_{x_0}(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in X \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$, onde $x_0 \in \mathcal{N}$;

Agora, pode-se definir o conceito de integral de Choquet, conforme abaixo:

Definição 2.8 ((CHOQUET, 1953)). Seja $\mu : 2^{\mathcal{N}} \rightarrow [0, 1]$ uma medida discreta fuzzy. A **integral discreta de Choquet** relacionada à medida μ é a função $\mathbf{C}_\mu : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\mathbf{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_{[i]} [\mu(\{j \in \mathcal{N} : x_j \geq x_{[i]}\}) - \mu(\{j \in \mathcal{N} : x_j \geq x_{[i+1]}\})],$$

onde $(x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}) = \text{Sort}(x_1, \dots, x_n)$ é uma ordenação crescente do vetor (x_1, x_2, \dots, x_n) e $x_{[n+1]} = 0$ por convenção.

A integral de Choquet também pode ser calculada pela seguinte expressão simplificada:

$$\mathbf{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [x_{[i]} - x_{[i-1]}] \mu(G_i),$$

onde convencionou-se que $x_{[0]} = 0$ e além disso, $G_i = \{[i], [i+1], \dots, [n]\}$.

Considerando as medidas fuzzy definidas no Exemplo 2.7 tem-se:

Exemplo 2.8.

1. $\mathbf{C}_{\mu_\perp}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} [x_{[1]} - x_{[0]}] \mu_\perp(G_1) + [x_{[2]} - x_{[1]}] \mu_\perp(G_2) + \dots + [x_{[n]} - x_{[n-1]}] \mu_\perp(G_n)$.

Observando que $\mu_\perp(G_1) = 1$, $\mu_\perp(G_j) = 0$ e para qualquer $j > 1$ tem-se:

$$\mathbf{C}_{\mu_\perp}(x_1, \dots, x_n) = x_{[1]} = \max(x_1, \dots, x_n)$$

De modo análogo, pode-se provar que:

$$\mathbf{C}_{\mu_\top}(x_1, \dots, x_n) = x_{[n]} = \min(x_1, \dots, x_n)$$

Agora, considerando-se as medidas fuzzy definidas no Exemplo 2.8 obtêm-se:

Exemplo 2.9.

1. Para medida fuzzy $\mu(X) = \frac{\#X}{n}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n [(x_{[i]} - x_{[i-1]})\mu(G_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_{[i]} - x_{[i-1]})\mu(\{[i], [i+1], \dots, [n]\})] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(x_{[i]} - x_{[i-1]}) \left(\frac{n-i+1}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

2. Quando $\mu_m(X) = \left(\frac{\#X}{n}\right)^m$ observa-se, de modo análogo ao que foi feito no caso anterior,

$$\mathcal{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left[(x_{[i]} - x_{[i-1]}) \left(\frac{n-i+1}{n} \right)^m \right]$$

3. Já para medida de Dirac, $\mu_{x_0}(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in X \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$, constata-se que

$$\mathcal{C}_{\mu_{x_0}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_0 \notin \{x_1, \dots, x_n\} \\ x_{[1]}, & \text{se } x_{[1]} = x_0 \\ x_{[1]} - x_{[k]}, & \text{se } k > 1 \text{ e } x_{[k]} = x_0 \end{cases}$$

Em (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016), os autores fazem uma discussão bem mais detalhada sobre as integrais de Choquet. Aqui, é importante ressaltar que as integrais de Choquet são funções de agregação do tipo média que generalizam a noção de OWA, conforme (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016, p. 150).

2.1.2 Funções de agregação conjuntivas

Algumas importantes funções de agregação como o produto, são funções limitadas superiormente pelo operador mínimo. Essas são denominadas funções de agregação conjuntivas.

Definição 2.9 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função de agregação $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é do tipo conjuntiva se, para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tem-se*

$$A(x_1, \dots, x_n) \leq \min(x_1, \dots, x_n)$$

Além das funções mínimo e produto, tem-se que também são funções de agregação conjuntivas:

Exemplo 2.10.

1. $A_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{prod}(x_1, \dots, x_n), & \text{se } x_1, \dots, x_n \leq \alpha \\ \min(x_1, \dots, x_n), & \text{caso contrário} \end{cases}$, onde $\alpha \in [0, 1]$ é fixado;
2. $A(x_1, \dots, x_n) = [\min(x_1, \dots, x_n)]^k$, com $k \in \mathbb{N}$ $k > 1$.
3. $A(x_1, \dots, x_n) = \frac{A_1(x_1, \dots, x_n) + A_2(x_1, \dots, x_n)}{2}$, onde A_1 e A_2 são duas agregações conjuntivas;

Exemplo 2.11. *Não são funções de agregação conjuntivas as seguintes funções:*

1. $\max(x_1, \dots, x_n)$;
2. $\text{arit}(x_1, \dots, x_n)$;
3. $\text{pond}_{w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n)$, quando w_1, \dots, w_n são pesos não nulos;
4. $\text{OWA}_w(x_1, \dots, x_n)$, a menos que $w_1 = 1$.

Uma importante variedade de funções de agregação bidimensionais, denominadas de **t-normas**, foram introduzidas por (MENGER, 1942), que estudava uma forma de generalizar a desigualdade triangular dos espaços métricos para os espaços métricos probabilísticos. Elas constituem uma ampla classe de funções de agregação do tipo conjuntiva.

Desde Menger, vários outros autores apresentaram formas alternativas de definir t-normas. No entanto, a definição mais utilizada na atualidade foi dada por Schweizer e Sklar nos artigos (SCHWEIZER; SKLAR, 1958, 1960, 1963), e é apresentada a seguir.

Definição 2.10 ((SCHWEIZER; SKLAR, 1958)). *Uma norma triangular ou simplesmente uma t-norma é uma função $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, tal que para quaisquer $x, y, z \in [0, 1]$ as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- | | | |
|------|--|----------------------------|
| (T1) | $T(x, y) = T(y, x)$ | (Comutatividade) |
| (T2) | $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ | (Associatividade) |
| (T3) | $T(x, y) \leq T(x, z)$ sempre que $y \leq z$ | (Monotonicidade à direita) |
| (T4) | $T(x, 1) = x$ | (Condição de Fronteira) |

Antes de apresentar exemplos de **t-normas**, é importante notar duas outras propriedades que estas funções apresentam que são consequências imediatas dos axiomas (T1), (T2), (T3) e (T4):

- Combinando os axiomas (T1) e (T3) pode-se concluir que t-normas são funções satisfazem a propriedade da monotonicidade;
- De (T4) constata-se que t-normas satisfazem a condição de fronteira $T(1, 1) = 1$. Além disso, $T(0, 0) = 0$, visto que $T(0, 1) = 0$, por (T4) e $T(0, 0) \leq T(0, 1)$, por (T3);
- Pelas propriedades (T1) e (T4) tem-se que $T(1, y) = y$ para qualquer $y \in [0, 1]$;
- Como t-normas são funções monotônicas e satisfazem as condições de fronteira, imediatamente conclui-se que t-normas são funções de agregação.

Com base nestas observações, é possível caracterizar as t-normas como funções de agregação bidimensionais que satisfazem as propriedades da comutatividade, da associatividade e satisfazem a condição de fronteira (T4).

Exemplo 2.12. *São exemplos clássicos de t-norma:*

1. A t-norma do mínimo $T_M(x, y) = \min(x, y)$;
2. A t-norma do produto $T_P(x, y) = x \cdot y$;
3. A t-norma de Łukasiewicz $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$;

$$4. \text{ O produto drástico } T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outros exemplos importantes são famílias de t-normas como as de Schweizer-Sklar, de Hamacher, de Yager e de Sugeno-Weber podem ser encontradas em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000). Além disso, em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000) o leitor pode encontrar uma discussão bem mais aprofundada sobre t-normas. Aqui, é importante mencionar as seguintes propriedades que toda t-norma satisfaz:

Proposição 2.2 ((KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000)). *Seja $T : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma t-norma. Então:*

1. $T(x, y) \leq \min(x, y)$ para quaisquer $x, y \in [0, 1]$;
2. $T_D(x, y) \leq T(x, y)$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

Observa-se ainda que a Proposição 2.2 garante que para qualquer t-norma T tem-se a seguinte desigualdade:

$$T_D(x, y) \leq T(x, y) \leq \min(x, y), \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

Isso mostra que o produto drástico e o mínimo são, respectivamente, a menor e a maior t-norma.

Além das t-normas, outros exemplos de famílias de funções de agregação conjuntiva são as **t-subnormas**, cuja definição pode ser encontrada em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000, p. 8), e as **cópulas** (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016; ALSINA; FRANK; SCHWEIZER, 2006).

2.1.3 Funções de agregação disjuntivas

As agregações disjuntivas são funções de agregação limitados inferiormente pelo operador máximo, ou seja:

Definição 2.11 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função de agregação $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é do tipo **disjuntiva** se para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tem-se*

$$\max(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$$

Exemplo 2.13. *São agregações disjuntivas:*

1. $A(x_1, \dots, x_n) = \text{prod}(1 - x_1, \dots, 1 - x_n)$;

2. $A_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{prod}(1 - x_1, \dots, 1 - x_n), & \text{se } x_1, \dots, x_n \geq \alpha \\ \max(x_1, \dots, x_n), & \text{caso contrário} \end{cases}$, onde $\alpha \in [0, 1]$ é fixado;

3. $A(x_1, \dots, x_n) = [\max(x_1, \dots, x_n)]^k$ com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$;

4. $A(x_1, \dots, x_n) = \frac{A_1(x_1, \dots, x_n) + A_2(x_1, \dots, x_n)}{2}$, onde A_1 e A_2 são duas agregações disjuntivas.

Exemplos de funções de agregação que não são disjuntivas são: $\min(x_1, \dots, x_n)$, $\text{arit}(x_1, \dots, x_n)$, $\text{pond}_{w_1, \dots, w_n}$ (quando os pesos não são nulos) e OWA_w (a menos quando $w_1 = w_2 = \dots = w_{n-1} = 0$ e $w_n = 1$). Além disso, dada qualquer função de agregação conjuntiva $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, pode-se construir a partir de A uma função de agregação disjuntiva, como o **dual** de A , a exemplo das leis de De Morgan da teoria clássica dos conjuntos.

Definição 2.12 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)).

1. Uma **negação fuzzy** é uma função decrescente $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;

2. Sejam $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma negação fuzzy e $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma função. O **dual** de A com respeito a negação N é a função $A^N : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$A^N(x_1, \dots, x_n) = N(A(N(x_1), \dots, N(x_n))).$$

Não é difícil provar que o dual de uma função de agregação conjuntiva é uma função de agregação disjuntiva, e reciprocamente, o dual de uma função de agregação disjuntiva é uma

função de agregação conjuntiva. Além disso, correlacionando com o conceito de negação da lógica clássica, em que $\neg\neg P = P$, onde P é uma asserção da lógica clássica, tem-se o conceito de **negação forte**, que é apresentado abaixo:

Definição 2.13 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma negação fuzzy $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é chamada de **negação forte** se $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.*

Algumas propriedades interessantes sobre a dualidade são apresentadas abaixo:

1. Se N é um negação forte, então $(A^N)^N = A$;
2. O dual do operador máximo é o operador mínimo;
3. O dual do operador mínimo é o operador máximo;
4. O dual da média aritmética é a própria média aritmética.

Uma classe de exemplos de funções de agregação disjuntivas são as t-conormas, estabelecidas por (SCHWEIZER; SKLAR, 1961) como o dual de uma t-norma. No entanto, a definição apresentada abaixo (que a mais utilizada na literatura) é independente da dualização, como apresentado em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000).

Definição 2.14 ((SCHWEIZER; SKLAR, 1961)). *Uma **conorma triangular** ou simplesmente **t-conorma** é uma função $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, tal que para quaisquer $x, y, z \in [0, 1]$ as propriedades (T1)-(T3) são satisfeitas e também:*

$$(S4) \quad S(x, 0) = x \quad (\text{Condição de Fronteira})$$

Abaixo apresenta-se algumas propriedades que as t-conormas apresentam:

- t-conormas são funções que satisfazem a propriedade da monotonicidade, como consequência dos axiomas (T1) e (T3);
- Por (S4) tem-se que $S(0, 0) = 0$, e além disso, $S(1, 1) = 1$, visto que $S(1, 1) \geq S(1, 0) = 1$;

- Pelas propriedades (T1) e (S4) observa-se que $S(0, y) = y$ para todo $y \in [0, 1]$;
- Como t-conormas são funções monotônicas e satisfazem as condições de fronteira (A1), conclui-se que t-conormas são funções de agregação.

Com base nessas observações, pode-se caracterizar as t-conormas como funções de agregação bidimensionais que satisfazem as propriedades da comutatividade, da associatividade e a condição de fronteira (S4), que é o mesmo que dizer que tem 0 como elemento neutro.

Exemplo 2.14. *Alguns exemplos de t-conormas são:*

1. A t-conorma do máximo $S_M(x, y) = \max(x, y)$;
2. A soma probabilística $S_P(x, y) = x + y - xy$;
3. A t-conorma de Łukasiewicz ou soma limitada $S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$;
4. A soma drástica $S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \max(x, y), & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Mais exemplos de t-conormas e um maior aprofundamento sobre esse tópico podem ser encontrados em (KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000). Na Proposição abaixo, serão apresentadas duas propriedades que devem ser ressaltadas:

Proposição 2.3 ((KLEMENT; MESIAR; PAP, 2000)). *Seja $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma t-conorma.*

Então:

1. $\max(x, y) \leq S(x, y)$ para quaisquer $x, y \in [0, 1]$;
2. $S(x, y) \leq S_D(x, y)$ para todos $x, y \in [0, 1]$.

Observando-se que $S_M(x, y) \leq S(x, y) \leq S_D(x, y)$, $\forall x, y \in [0, 1]$, verifica-se que a t-conorma do máximo é a menor de todas as t-conormas, enquanto que a soma drástica é a maior de todas as t-conormas. Além disso, outros exemplos de famílias de agregações disjuntivas são as **t-subconormas** (Glebova, 2016), e o **dual de cópulas** (ALSINA; FRANK; SCHWEIZER, 2006; BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016).

2.2 Pré-agregações

No início deste capítulo foi mencionado que as funções de agregação possuem uma ampla capacidade de aplicabilidade, nas mais diversas áreas do conhecimento. No entanto, as propriedades solicitadas em sua definição deixam de lado funções como a *moda*, que também são muito utilizadas em aplicações, fazendo o papel de uma função de agregação (num sentido mais amplo). Por esse motivo, (LUCCA et al., 2016) introduziram uma nova classe de funções, denominadas de **pré-agregações** como uma alternativa de generalizar as funções de agregação.

O ponto de partida para o trabalho de (LUCCA et al., 2016) foram os enfraquecimentos da monotonicidade propostas por (WILKIN; BELIAKOV, 2015), que definiu a **monotonicidade fraca**, e por (BUSTINCE et al., 2015), que introduziu a **monotonicidade direcional**.

Definição 2.15 ((BUSTINCE et al., 2015)). *Sejam $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ uma função e $\vec{r} = (a_1, \dots, a_n)$ um vetor de números reais. Diz-se que F é \vec{r} -crescente (ou \vec{r} -monotônica) se:*

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq F(x_1 + ta_1, \dots, x_n + ta_n),$$

para todos $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ e $t > 0$ escolhidos de forma que $(x_1 + ta_1, \dots, x_n + ta_n) \in [0, 1]^n$.

Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ satisfaz a propriedade da monotonicidade direcional, se é \vec{r} -crescente para alguma direção \vec{r} , enquanto que para satisfazer a monotonicidade fraca, basta ser $(1, \dots, 1)$ -crescente. Já as pré-agregações são caracterizadas como funções $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que satisfazem as condições (P1) e (P2) descritas abaixo:

Definição 2.16 ((LUCCA et al., 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é chamada de **pré-agregação** se:*

$$(P1) \ F(0, \dots, 0) = 0 \text{ e } F(1, \dots, 1) = 1, \text{ e}$$

(P2) *satisfaz a monotonicidade direcional, i.e., F é \vec{r} -crescente para alguma direção \vec{r} .*

Exemplo 2.15. *Funções de agregação são exemplos de pré-agregações \vec{r} -crescentes para todo vetor direcional \vec{r} .*

Exemplo 2.16. A função $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$A(x, y) = \begin{cases} x(1 - x), & \text{se } y \leq 3/4 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma pré-agregação $(0, \alpha)$ -crescente, para todo $\alpha > 0$, mas não é uma função de agregação, tendo em vista que não é $(1, 0)$ -crescente. Para $x = 0.5$, $y = 0.5$ e $t = 1$ tem-se:

$$A(0.5, 0.5) = 0.25 \geq A(0.5 + 0.1 \cdot 1, 0.5 + 0.1 \cdot 0) = A(0.6, 0.5) = 0.24$$

É importante notar que, como bem destacou (LUCCA et al., 2016, p.3), as funções n -árias que são direcionalmente monotônicas, constituem uma classe mais ampla que a das funções de agregação. Por exemplo, implicações fuzzy (que não são funções de agregação, mas a partir das quais pode-se construir agregações amplamente utilizadas em aplicações (BUSTINCE; PAGOLA; BARRENECHEA, 2007)), são funções $(-1, 1)$ -monotônicas, como mostrou (BUSTINCE; BURILLO; SORIA, 2003).

Alguns exemplos de pré-agregações, que serão exibidos na sequência, são apresentados em (LUCCA et al., 2016). Além disso, esses autores também demonstraram formas de construir pré-agregações.

Exemplo 2.17.

1. A função $\text{moda}(x_1, \dots, x_n) = \min_{x \in M}(x)$ é uma pré-agregação $(1, \dots, 1)$ -crescente, onde

$$M = \{x_j : j = \max_{i=1}^n n_i\} \text{ e } n_i = \#\{k; 1 \leq k \leq n \text{ e } x_k = x_i\};$$

2. $F(x, y) = x - [\max(0, x - y)]^2$ é uma pré-agregação $(0, 1)$ -crescente;

3. $A(x, y) = \begin{cases} x(1 - y), & \text{se } y \leq 3/4 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é uma pré-agregação $(0, b)$ -crescente para qualquer $b > 0$, mas não é (a, b) -monotônica para $a > 0$;

4. $B(x, y) = \begin{cases} y(1 - x), & \text{se } x \leq 3/4 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é uma pré-agregação $(a, 0)$ -crescente para qualquer $a > 0$, mas não é (a, b) -crescente para $b > 0$.

Observação 2.2. *Por simplicidade, chama-se uma pré-agregação \vec{r} -crescente de \vec{r} -pré-agregação.*

Algumas formas de construir pré-agregações, demonstradas em (LUCCA et al., 2016), são:

1. Se $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é uma função de agregação e $F_1, \dots, F_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ são \vec{r} -pré-agregações, então $A(F_1, \dots, F_n) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$A(F_1, \dots, F_n)(x_1, \dots, x_n) = A(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

é uma \vec{r} -pré-agregação. Por exemplo, Se $F_1, F_2 : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ são \vec{r} -pré-agregações, então $\frac{F_1+F_2}{2}$ e F_1F_2 também são \vec{r} -pré-agregações.

2. O dual de uma \vec{r} -pré-agregação $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ com respeito a $N(x) = 1 - x$ é uma \vec{r} -pré-agregação.

No que segue, apresenta-se um tipo de função que também é utilizada na literatura para fazer o papel das agregações no entanto, não são necessariamente funções de agregação.

2.2.1 Funções mistura

As funções mistura, assim como as funções OWA de Yager, são médias ponderadas mas, diferentemente das funções de Yager, possuem pesos dinâmicos. Essa dinamicidade possibilita um melhor ajuste dos pesos, uma vez que para cada entrada pode-se realizar uma escolha mais adequada para pesos que serão associados à elas, possibilitando que esses pesos sejam atribuídos às entradas durante a execução dos algoritmos, o que não ocorre no caso das OWAs.

Definição 2.17 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Sejam $w_1, \dots, w_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ funções denominadas **funções de peso**. A função $MIX_{w_1, \dots, w_n} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:*

$$MIX_{w_1, \dots, w_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i(x_i)}$$

é denominada **função mistura** associada às funções de peso w_1, \dots, w_n (BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016).

É importante destacar que as funções mistura são uma generalização das funções OWA, que assim como as pré-agregações, podem não satisfazer a condição de monotonicidade.. Condições de monotonicidade para as funções mistura foram estabelecidas em (PEREIRA; RIBEIRO, 2003), dentre essas:

Proposição 2.4. (PEREIRA; PASI, 1999) *Se para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tem-se que w_i é diferenciável, monotônica e $w'_i(t) \leq w(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, então MIX_{w_1, \dots, w_n} satisfaz a propriedade da monotonicidade, ou seja, MIX_{w_1, \dots, w_n} é uma função de agregação.*

Um exemplo de função mistura que não satisfaz a propriedade da monotonicidade está dada no exemplo abaixo:

Exemplo 2.18. Defina $w_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x_i = 0 \\ x_i, & \text{caso contrário} \end{cases}$. No caso em que $n = 3$ tem-se:

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y = z = 0 \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta função não satisfaz a propriedade da monotonicidade, pois $MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.1) = 0.375$, enquanto que $MIX_{w_1, w_2, w_3}(0.5, 0.2, 0.2) = 0.367$. Assim, MIX_{w_1, w_2, w_3} não é uma agregação.

Outro exemplo de função mistura que não satisfaz a propriedade da monotonicidade é:

Exemplo 2.19. Sejam $w_1 = \frac{1}{3}$ e w_2, w_3 definidos no Exemplo 2.22. Então

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(x, y, z) = \frac{\frac{x}{3} + y^2 + z^2}{\frac{1}{3} + y + z}$$

Novamente, MIX_{w_1, w_2, w_3} não satisfaz a propriedade da monotonicidade, pois

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(1, 0.2, 0.1) = 0.2948 \text{ e } MIX_{w_1, w_2, w_3}(1, 0.2, 0.15) = 0.2932$$

Logo, MIX_{w_1, w_2, w_3} também não é uma função de agregação. No entanto, MIX_{w_1, w_2, w_3} é uma $(1, 0, 0)$ -pré-agregação, pois para $t > 0$ tem-se que

$$MIX_{w_1, w_2, w_3}(x + t, y, z) = \frac{\frac{x+t}{3} + y^2 + z^2}{\frac{1}{3} + y + z}$$

$$\geq \frac{\frac{x}{3} + y^2 + z^2}{\frac{1}{3} + y + z} = \text{MIX}_{w_1, w_2, w_3}(x, y, z)$$

Uma discussão mais elaborada sobre as funções mistura e sua relação com a monotonicidade direcional, pode ser encontrada em (SPIRKOVÁ et al., 2018).

2.3 Algumas Propriedades

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades que as funções de agregação e também pré-agregações podem satisfazer, no intuito de investigar quais dessas serão satisfeitas pelas funções que serão apresentadas nos capítulos subsequentes.

Definição 2.18 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é dita idempotente se para todo $x \in [0, 1]$ tem-se que*

$$F(x, \dots, x) = x$$

Exemplo 2.20. *Exemplos de funções idempotentes são: \min , \max , arit , geom e OWAs .*

Obviamente, nem toda função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é idempotente, como por exemplo: prod , min^k e max^k , para $k \neq 1$.

Definição 2.19 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é simétrica se para toda permutação $P : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tem-se que*

$$F(x_{P(1)}, \dots, x_{P(n)}) = F(x_1, \dots, x_n)$$

Exemplo 2.21. *As funções OWA , além de t -normas e t -conormas, são exemplos de funções simétricas.*

Observação 2.3. *Uma função $\text{pond}_{w_1, \dots, w_n}$ não satisfaz a propriedade da simetria quando os pesos são distintos.*

Definição 2.20 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ possui um elemento neutro se existe um $e \in [0, 1]$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ tem-se:*

$$F(t, e, \dots, e) = F(e, \dots, e, t, e, \dots, e) = F(e, \dots, e, t) = t$$

Exemplo 2.22.

1. *arit* não possui elemento neutro;
2. Se $(w_1, \dots, w_n) \neq (0, \dots, 0)$, então OWA_w não possui elemento neutro;
3. Se T é uma t -norma, então T tem 1 como elemento neutro;
4. Se S é uma t -conorma, então S tem 0 como elemento neutro.

Definição 2.21 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ possui um elemento de absorção se existe um $a \in [0, 1]$ tal que para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ com a em uma de suas coordenadas:*

$$F(\mathbf{x}) = a$$

1. 0 é o elemento de absorção de qualquer t -norma;
2. 1 é o elemento de absorção de qualquer t -conorma;
3. *arit* não possui elementos de absorção;
4. Se $(w_1, \dots, w_n) \neq (0, \dots, 0)$, então $pond_{w_1, \dots, w_n}$ e OWA_w também não possuem elementos de absorção.

Definição 2.22 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ possui um divisor de zero se existe um $a \in (0, 1)$ tal que para todo $\mathbf{x} \in (0, 1]^n$ com a em uma de suas coordenadas obtém-se:*

$$F(\mathbf{x}) = 0$$

Definição 2.23 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). *Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ possui um divisor de um se existe um $a \in (0, 1)$ tal que para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ com a em uma de suas coordenadas obtém-se:*

$$F(\mathbf{x}) = 1$$

Exemplo 2.23. *A funções \min , \max , arit , pond , geom e $OWAs$ não possuem divisores de zero nem divisores de um. De modo mais geral, nenhuma função de agregação do tipo media tem divisor de zero ou tem divisor de um.*

Exemplo 2.24.

- A função $F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) = (1, 1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ possui infinitos divisores de zero, que são todos os valores $a \in (0, 1]$;
- A função $F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$ possui infinitos divisores de um, que são todos os valores $a \in (0, 1]$

Definição 2.24 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é **estável por translações** se para todo $\lambda \in [-1, 1]$ e para qualquer $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, com $(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \in [0, 1]^n$, tem-se:

$$F(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) = F(x_1, \dots, x_n) + \lambda$$

Exemplo 2.25. As funções *min*, *max*, *arit*, *pond* e OWA_w são exemplos de funções estáveis por translações, enquanto que, *geom*, *prod*, min^k e max^n ($k \neq 1$) não são estáveis por translações.

Definição 2.25 ((BELIAKOV; BUSTINCE; CALVO, 2016)). Uma função $F : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é **homogênea** se para todos $\lambda, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ observa-se que:

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda F(x_1, \dots, x_n)$$

Exemplo 2.26. As funções *min*, *max*, *arit*, *pond* e OWA_w são também exemplos de funções homogêneas, enquanto que, *geom*, *prod*, min^k e max^n ($k \neq 1$) não são funções homogêneas.

Note-se que todos os conceitos abordados neste capítulo envolvem funções cujas entradas e saídas são pertencentes ao intervalo unitário $[0, 1]$, e obviamente, tudo do que foi definido pode ser naturalmente estendido para funções de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ em $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Na verdade, tudo que foi apresentado neste capítulo pode ser generalizado para funções cujos domínios são reticulados, como será feito nos Capítulos 3 e 5.

2.4 Considerações Finais

Neste capítulo discutiu-se sobre três classes de funções, a saber:

1. As agregações, que são funções que recebem como entradas valores em $[0, 1]^n$, retornam como saída um valor em $[0, 1]$ e satisfazem as condições de fronteira e monotonicidade;
 - (a) Foram apresentados alguns exemplos e propriedades;
 - (b) Mostrou-se que as agregações podem ser divididas em quatro classes: conjuntiva, disjuntiva, média e mista;
 - (c) Exibiu-se ainda uma discussão sobre algumas famílias de funções de agregação, como as OWA de (YAGER, 1988) e as integrais de Choquet, que pertencem a classe das agregações do tipo média.

2. As pré-agregações, que diferem das agregações no quesito monotonicidade, que é substituído por monotonicidade direcional.
 - (a) Apresentou-se a definição e exemplos dessas funções;
 - (b) Exibiu-se formas de se obter pré-agregações a partir de outras pré-agregações;
 - (c) Também verificou-se que existem pré-agregações que não podem ser classificadas como uma agregação, como por exemplo, algumas funções mistura.

3. As funções mistura, que são uma generalização das funções OWA de Yager (YAGER, 1988), são médias ponderadas com pesos dinâmicos e nem sempre são agregações ou pré-agregações.

Finalizando este capítulo, discutiu-se sobre algumas propriedades que as agregações, as pré-agregações ou ainda outros tipos de funções podem satisfazer. No próximo capítulo, serão abordados os temas de ordens parciais e reticulados, bem como serão estudadas algumas funções que podem ser consideradas nesses domínios.

3 Ordens Parciais, Reticulados e Funções *LMOWA*

Os números \mathbb{N} , inteiros \mathbb{Z} , racionais \mathbb{Q} , reais \mathbb{R} e complexos \mathbb{C} são dotados de algumas estruturas algébricas básicas. Por exemplo, do ponto de vista da aritmética, todos esses conjuntos são providos de operações como a adição e a multiplicação que satisfazem um gama de propriedades como a comutatividade e a associatividade. Além disso, nesses mesmos conjuntos é possível relacionar pares de elementos através de uma **relação de ordem**, ou seja, dados dois números x, y (naturais, inteiro, reais, ...) pode-se fazer uma “ordenação” entre esses números e então decidir se:

1. x é menor que y , ou
2. y é menor que x , ou
3. x é igual a y .

A junção das propriedades acima é conhecida como **lei da tricotomia**. Além disso, no caso desses conjuntos numéricos, essa “comparação” está fortemente relacionada com a aritmética. A ordem usual do conjunto \mathbb{N} é definida, em (LIMA, 2016), por

$$m < n \iff \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } n = m + p$$

Realizar esse tipo de comparação utilizando-se de uma aritmética nem sempre é possível. Por exemplo, dado um conjunto X pode-se comparar pares de subconjuntos A, B de X e decidir se:

i. $A \subseteq B$, ou

ii. $B \subseteq A$, ou

iii. Nenhuma das opções anteriores.

Note-se que as propriedades acima diferem da tricotomia, pois sempre é possível obter dois subconjuntos que não satisficam o que segue.

Exemplo 3.1. *Seja P um conjunto com três elementos distintos, por exemplo, $P = \{a, b, c\}$. Então, definindo-se a seguinte relação de ordem sobre P*

1. $x \leq x$ para qualquer $x \in P$;

2. $a \leq b$;

3. $a \leq c$.

tem-se uma forma de comparar seus elementos. No entanto, existem elementos que não podem ser comparados entre si, a saber, b e c .

O conjunto de todos os subconjuntos de X , denotado por 2^X , munido da relação \subseteq , assim como o conjunto P do Exemplo 3.1 munido de \leq , são exemplos do que chama-se de **conjunto parcialmente ordenado**.

3.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição 3.1. *Um conjunto X dotado de uma relação binária \leq sobre X é chamado de **conjunto parcialmente ordenado** e o par $\langle X, \leq \rangle$ chama-se **ordem parcial** ou **sistema ordenado** se os seguintes axiomas são satisfeitos para todos $x, y, z \in X$:*

(P1) $x \leq x$ (Reflexividade)

(P2) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (Anti-simetria)

(P3) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (Transitividade)

Para simplificar notações, diz-se simplesmente que $\langle X, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado e que \leq é uma **relação de ordem** em X .

Exemplo 3.2. Se X é um conjunto, então $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ é um sistema ordenado.

Exemplo 3.3. O conjunto \mathbb{N} dos números naturais com a relação

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{N},$$

é um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo 3.4. Seja \mathcal{F} a família de todas as funções de uma variável real, definidas no intervalo $[a, b]$ com

$$f \sqsubseteq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in [a, b]$$

é um conjunto parcialmente ordenado, que cuja relação de ordem é chamada de **ordem pontual** ou **ordem ponto a ponto**.

Exemplo 3.5. Considere \mathbb{Z} com a relação \leq_{div} definida por

$$x \leq_{div} y \iff \frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$$

Então $\langle \mathbb{Z}, \leq_{div} \rangle$ não é um sistema ordenado, pois

$$1 \leq_{div} -1 \text{ e } -1 \leq_{div} 1, \text{ mas } 1 \neq -1$$

Exemplo 3.6. Restringindo-se \leq_{div} para o conjunto dos números naturais, então $\langle \mathbb{N}, \leq_{div} \rangle$ é um sistema ordenado.

3.1.1 Diagramas de Hasse

Um conjunto parcialmente ordenado pode ser representada por meio de um diagrama, denominado **diagrama de Hasse**. Para construir esse diagrama deve-se seguir os seguintes passos:

1. Associe cada elemento $x \in X$ a um ponto p_x do plano cartesiano, de modo que se $x < y$, então a segunda coordenada de p_x é menor que a segunda coordenada de p_y ;

2. Dados $x, y \in X$, construa um segmento de reta ligando p_x a p_y se, e somente se, $x < y$ e não existe $z \in X - \{x, y\}$ tal que $x < z < y$.

Exemplo 3.7. Dados $P = \{a, b, c\}$ e \leq , conforme definido no Exemplo 3.1. Um diagrama de Hasse para $\langle P, \leq \rangle$ pode ser construído definindo $p_a = (1, 1)$, $p_b = (0, 2)$ e $p_c = (3, 2)$, conforme pode ser observado na Figura 2.

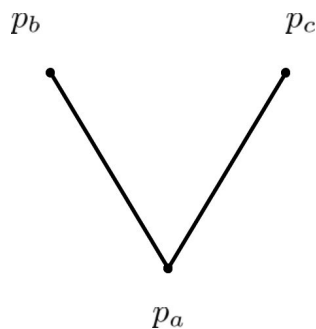


Figura 2: Diagrama de Hasse de $\langle P, \leq \rangle$.

Naturalmente, pode-se identificar cada elemento x com seu representante p_x . Dessa forma, expressa-se o diagrama de Hasse na forma da Figura 3:

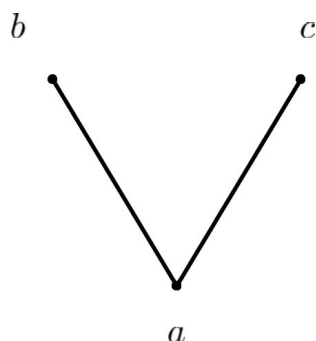


Figura 3: Diagrama de Hasse.

Exemplo 3.8. Um diagrama de Hasse para $\langle \mathbb{N}, \leq_{div} \rangle$ pode ser visualizado na Figura 4:

Definição 3.2. Seja $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. A **ordem reversa** ou **ordem oposta** de \leq é a relação \leq^R definida por:

$$x \leq^R y \iff y \leq x$$

Não é difícil provar que se \leq é uma relação ordem no conjunto X , então \leq^R também o é. Assim, $\langle X, \leq^R \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado, denominada de **ordem dual** de $\langle X, \leq \rangle$. Na Figura 5, pode-se encontrar um exemplo de conjunto parcialmente ordenado e seu dual.

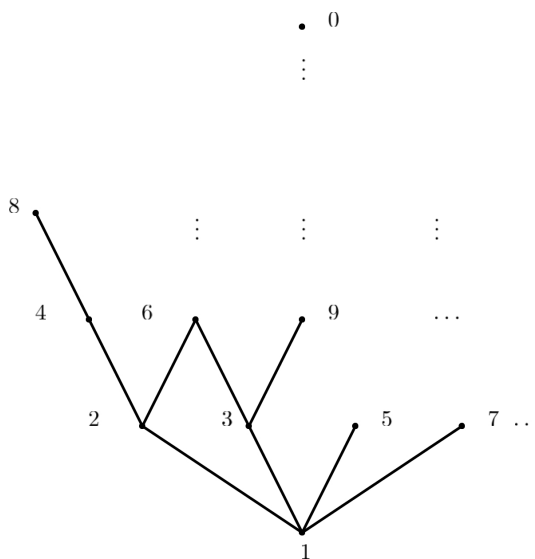


Figura 4: Diagrama de Hasse para $\langle \mathbb{N}, \leq_{div} \rangle$.

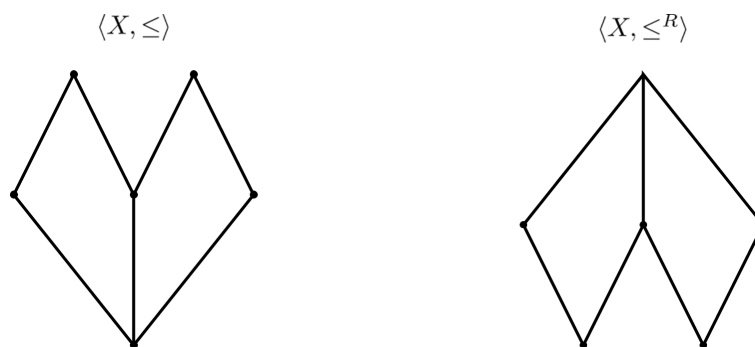


Figura 5: Diagrama de Hasse da ordem dual.

Observando-se o Exemplo 3.9, nota-se que existem pares de números que não podem ser comparados, por exemplo, tomando-se $x = 2$ e $y = 3$ conclui-se que

$$x \not\leq y \text{ e } y \not\leq x$$

Quando isso ocorre, ou seja, quando x e y são dois elementos pertencentes a um conjunto parcialmente ordenado e $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$, diz-se que x e y são **incomparáveis**, e denota-se “ $x \parallel y$ ”. Além disso, quando num conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ tem-se que todo par de elementos $x, y \in X$ são comparáveis, então diz-se $\langle X, \leq \rangle$ é **ordem linear** ou **cadeia**.

Exemplo 3.9. O conjunto parcialmente ordenado definida no Exemplo 3.3 é uma cadeia, cujo diagrama de Hasse está expressado na Figura 6. No entanto, todas as demais ordens definidas anteriormente não são ordens lineares.

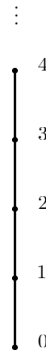


Figura 6: Diagrama de Hasse para \mathbb{N} .

No entanto, nem toda ordem parcial é uma cadeia, como pode ser verificado abaixo.

Exemplo 3.10. *Sejam $X = \{a, b, c, d\}$ e*

$$x \leq_0 y \iff (x, y) \in \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, d), (a, d), (a, c), (c, d)\}$$

Então, $\langle X, \leq \rangle$ não é uma ordem linear, como pode ser observado no seu diagrama de Hasse (Figura 7).

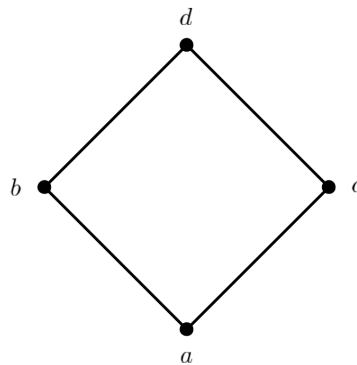


Figura 7: Diagrama de Hasse para $\langle X, \leq_0 \rangle$.

Outro exemplo de sistema parcialmente ordenado que não é uma cadeia é apresentado abaixo.

Exemplo 3.11. *Seja $\mathbb{I}[0, 1]$ o conjunto de todos os intervalos fechados contidos em $[0, 1]$, ou seja,*

$$\mathbb{I}[0, 1] = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

A relação

$$[a, b] \leq_{KM} [c, d] \iff a \leq c \text{ and } b \leq d$$

é uma relação de ordem denominada **ordem de Kulisch-Miranker** (KULISCH; MIRANKER, 1981).

Assim, $L = \langle \mathbb{I}[0, 1], \leq_{KM} \rangle$ é um sistema parcialmente ordenado.

No entanto, em (BUSTINCE et al., 2013) os autores provaram que pode-se refinar a ordem \leq_{KM} para uma ordem linear, originando o conceito de **ordem linear admissível**. Aqui será apresentada uma mais geral de ordem admissível.

Definição 3.3. Se $\langle X, \leq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado, então uma relação de ordem \preceq sobre X é \leq -admissível se:

1. \preceq é uma ordem linear;
2. para todos $x, y \in X$, $x \preceq y$ sempre que $x \leq y$.

Exemplo 3.12. Seja $\mathbb{I}[0, 1]$ o conjunto de todos os subintervalos fechados em $[0, 1]$, isto é,

$$\mathbb{I}[0, 1] = \{[a, b]; 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Considerando-se a ordem de Kulisch-Miranker

$$[a_1, b_1] \leq_{KM} [a_2, b_2] \iff a_1 \leq a_2 \text{ e } b_1 \leq b_2$$

Então, as relações de ordem \preceq_{lex1} e \preceq_{lex2} são \leq_{KM} -admissíveis, onde

$$[a_1, b_1] \preceq_{lex1} [a_2, b_2] \iff a_1 < a_2 \text{ ou } (a_1 = a_2 \text{ e } b_1 \leq b_2)$$

e

$$[a_1, b_1] \preceq_{lex2} [a_2, b_2] \iff b_1 < b_2 \text{ ou } (b_1 = b_2 \text{ e } a_1 \leq a_2)$$

Observação 3.1. Ordens \leq_{KM} -admissíveis foram denominadas simplesmente de ordens admissíveis em (BUSTINCE et al., 2013).

Exemplo 3.13. Considere $\mathbb{I}[0, 1]$, então a ordem de Xu-Yager

$$[a_1, b_1] \leq_{XY} [a_2, b_2] \iff a_1 + b_1 < a_2 + b_2 \text{ ou } (a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \text{ e } b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2)$$

também é uma ordem \leq_{KM} -admissível.

Algumas formas de gerar ordens \leq_{KM} -admissíveis foram provas em (BUSTINCE et al., 2013), como por exemplo:

Proposição 3.1 (Proposição 3.2 de (BUSTINCE et al., 2013)). *Sejam $A, B : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ duas funções de agregação contínuas, tais que para todos $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ com $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$ tem-se*

$$A(a_1, b_1) = A(a_2, b_2) \text{ e } B(a_1, b_1) = B(a_2, b_2) \iff (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

Defina a relação de ordem $\preceq_{A,B}$ em $\mathbb{I}[0, 1]$ por:

$$[a_1, b_1] \preceq_{A,B} [a_2, b_2] \iff A(a_1, b_1) < A(a_2, b_2) \text{ ou } (A(a_1, b_1) = A(a_2, b_2)$$

$$\text{ e } B(a_1, b_1) \leq B(a_2, b_2))$$

Então, $\preceq_{A,B}$ é uma ordem \leq_{KM} -admissível.

Proposição 3.2 (Proposição 3.3 de (BUSTINCE et al., 2013)). *Se $A, B : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ duas funções de agregação contínuas e $\phi, \eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ são automorfismos, então $\leq_{\phi \circ A, \eta \circ B}$ é \leq_{KM} -admissível.*

Proposição 3.3 (Teorema 3.3 de (BUSTINCE et al., 2013)). *Sejam $\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha \neq \beta$. Então de ordem $\preceq_{\alpha, \beta}$ em $\mathbb{I}[0, 1]$*

$$[a_1, b_1] \preceq_{\alpha, \beta} [a_2, b_2] \iff K_\alpha(a_1, b_1) < K_\alpha(a_2, b_2) \text{ ou } (K_\alpha(a_1, b_1) = K_\alpha(a_2, b_2)$$

$$\text{ e } K_\beta(a_1, b_1) \leq K_\beta(a_2, b_2))$$

é \leq_{KM} -admissível, onde $K_\alpha : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é dada por

$$K_\alpha(x, y) = x + \alpha(x - y)$$

Um critério mais geral do que os demonstrados por (BUSTINCE et al., 2013), pode ser estabelecido para qualquer conjunto parcialmente ordenado limitado, conforme mostrado no próximo Teorema.

Teorema 3.1. *Seja $\langle L, \leq_L \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma relação \preceq_L binária em L é uma ordem \leq_L -admissível se, e somente se, existe uma função $f : L^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que:*

(1) $f(a, b) = f(b, a)$ se, e somente se, $a = b$;

(2) $f(a, b) \leq f(b, a)$ sempre que $a \leq b$;

(3) Se $f(a, b) \leq f(b, a)$ e $f(b, c) \leq f(c, b)$, então $f(a, c) \leq f(c, a)$.

Demonstração. Se existe uma função $f : L^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as três propriedades acima, então defina

$$a \preceq_L b \iff f(a, b) \leq f(b, a)$$

Pela propriedade (2) tem-se que $a \preceq_L b$ sempre que $a \leq_L b$ e a relação \preceq_L é uma relação ordem, pois

- $a \preceq_L a$, uma vez que $f(a, a) = f(a, a)$;
- Se $a \preceq_L b$ e $b \preceq_L c$, então $f(a, b) \leq f(b, a)$ e $f(b, c) \leq f(c, b)$. Logo, pela propriedade (3), tem-se que $f(a, c) \leq f(c, a)$ e $a \preceq_L c$;
- Se $a \preceq_L b$ e $b \preceq_L a$, então $f(a, b) \leq f(b, a)$ e $f(b, a) \leq f(a, b)$. Logo, $f(a, b) = f(b, a)$ e pela propriedade (1) tem-se que $a = b$.

A prova da linearidade de \preceq_L segue do fato de que para todos $a, b \in L$ tem-se que $f(a, b) \leq f(b, a)$ ou $f(a, b) \geq f(b, a)$. Assim,

$$a \preceq_L b \text{ ou } b \preceq_L a$$

Reciprocamente, se \preceq_L é uma ordem \leq_L -admissível, então basta definir

$$f(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq_L b \\ 1, & \text{se } b <_L a \\ 0.5, & \text{se } a \preceq_L b \text{ e } a \not\prec_L b \\ 0.9, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e observar que as propriedades (1), (2) e (3) são verificadas.

□

Proposição 3.4. *Seja $\langle L, \leq_L \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função \leq_L -crescente tal que para todos $a, b \in L$ tem-se*

$$g(a) = g(b) \iff a = b,$$

então a relação

$$a \preceq b \Rightarrow g(a) \leq g(b)$$

é uma ordem \leq_L -admissível.

Demonstração. Basta definir $f : L^2 \rightarrow [0, 1]$ por $f(a, b) = g(a) - g(b)$ e aplicar o Teorema 3.1. □

O Teorema 3.1 e a Proposição 3.4 não garante que uma dada ordem pode ser estendida a uma ordem admissível, mas note-se que:

O problema de encontrar uma ordem total compatível a uma dada ordem parcial é prático. Por exemplo, se (P, \leq) for finito, pode ser desejável inserir os dados P em um computador usando uma ordem de entrada (linear) que seja compatível com a ordem parcial.

Para uma ordem parcial finita, é fácil encontrar uma ordem total compatível usando um algoritmo simples chamado **ordenação topológica**, implementado simplesmente pegando um elemento máximo (ou mínimo) em cada estágio. Dessa forma, elementos maiores (ou menores) são inseridos primeiro.¹(ROMAN, 2008, p.21)

Teorema 3.2. *Seja $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Então existe uma ordem total \preceq em X compatível com \leq .*

Demonstração. Ver Teorema 1.2 de (ROMAN, 2008). □

Corolário 3.1. *Se $\langle L, \leq_L \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado, então existe uma função $f : L^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as condições (1), (2) e (3) do Teorema 3.1.*

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 3.1 e 3.2. □

¹Texto original: “The problem of finding a compatible total order for a given partial order is a practical one. For example, if (P, \leq) is finite, it may be desirable to input the data P into a computer using a (linear) input order that is compatible with the partial order.

For a finite poset, it is easy to find a compatible total order using a simple algorithm called **topological sorting**, implemented by simply taking a maximal (or minimal) element at each stage. In this way, larger (or smaller) elements are input first.”

Exemplo 3.14. Considerando $\langle X, \leq_0 \rangle$ definidos no Exemplo 3.10, pode-se construir duas ordens \leq_0 -admissíveis, \leq_1 e \leq_2 , definindo-se as funções

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = a \\ 0.5, & \text{se } x = b \\ 0.7, & \text{se } x = c \\ 1, & \text{se } x = d \end{cases} \quad e \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = a \\ 0.5, & \text{se } x = c \\ 0.7, & \text{se } x = b \\ 1, & \text{se } x = d \end{cases}$$

e atribuindo-se

$$a \leq_1 b \iff f_1(a) \leq f_1(b) \quad e \quad a \leq_2 b \iff f_2(a) \leq f_2(b)$$

Na Figura 8 apresenta-se os diagramas de Hasse das ordens lineares resultantes.

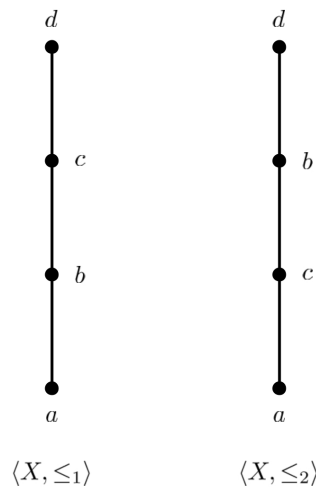


Figura 8: Diagramas de Hasse para $\langle X, \leq_1 \rangle$ e $\langle X, \leq_2 \rangle$.

Num conjunto parcialmente ordenado podem existir alguns elementos notáveis, tais como: máximo (ou *top*), mínimo (ou *bottom*), maximais e minimais.

Definição 3.4. Seja $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Então:

1. $\langle X, \leq \rangle$ possui menor elemento (ou *bottom*) se existe $\perp \in X$ tal que $\perp \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que X é **limitado inferiormente**;
2. $\langle X, \leq \rangle$ possui maior elemento (ou *top*) se existe $\top \in X$ tal que $x \leq \top$ para todo $x \in X$. Neste outro caso, diz-se que X é **limitado superiormente**;

3. Quanto X é limitado inferiormente e superiormente, diz-se que X é **limitado**.

Exemplo 3.15.

1. O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a ordem usual não possui bottom nem top, enquanto que qualquer intervalo fechado $[a, b]$ com a ordem usual possui bottom e top, $\perp = a$ e $\top = b$;
2. $\langle \mathbb{N}, \leq_{div} \rangle$ possui bottom, $\perp = 1$, e top, $\top = 0$;
3. $\langle \mathbb{N}^+, \leq_{div} \rangle$ possui bottom, $\perp = 1$, mas não possui top;
4. $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ possui bottom, $\perp = \emptyset$, e top, $\top = X$.

Proposição 3.5. Seja $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Então:

1. Se X possui top, então esse elemento é único;
2. Se X possui bottom, então esse elemento é único.

Demonstração.

1. Se $a, b \in X$ são dois bottoms de X , então para qualquer $x \in X$ tem-se que

$$a \leq x \text{ e } b \leq x$$

Em particular,

$$a \leq b \text{ e } b \leq a$$

Assim, por anti-simetria, tem-se que $a = b$.

2. Análogo ao caso anterior.

□

Definição 3.5. Seja $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. Diz-se que $a \in X$ é um elemento:

1. **minimal** de $\langle X, \leq \rangle$, se $x \leq a \implies x = a$;
2. **maximal** de $\langle X, \leq \rangle$, se $a \leq x \implies x = a$.

Note-se que o menor elemento de uma ordem, quando existe, é um elemento minimal e de forma semelhante, o maior elemento de uma ordem é um elemento maximal. No entanto, um elemento minimal (maximal) pode não ser o *bottom* (*top*), como mostra o Exemplo 3.12.

Exemplo 3.16. Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; n > 1\}$ e defina a seguinte relação:

$$x \preceq y \iff \frac{y}{x} \in \mathbb{N}$$

Então $\langle X, \preceq \rangle$ é um conjunto parcialmente ordenado que não possui menor nem maior elemento, onde todo número primo é minimal. Na Figura 9 pode-se visualizar um diagrama de Hasse para esse conjunto parcialmente ordenado.

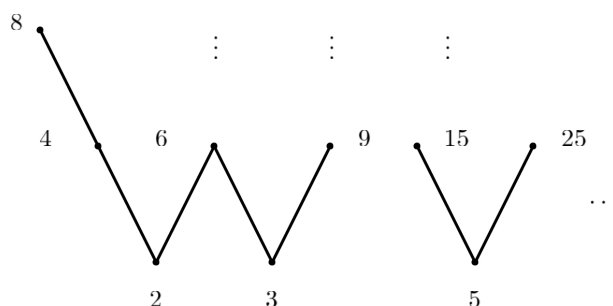


Figura 9: Diagrama de Hasse.

Observação 3.2. O Exemplo 3.15 mostra que uma ordem pode possuir inúmeros elementos minimais (maximais), enquanto o elemento mínimo (máximo), quando existe, é único.

Definição 3.6. Sejam $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e S um subconjunto de X . Então:

1. Um elemento $l \in X$ é uma **cota inferior** de S se para qualquer $x \in S$ tem-se que $l \leq x$;
2. Um elemento $u \in X$ é uma **cota superior** de S se para qualquer $x \in S$ tem-se que $x \leq u$;

Exemplo 3.17. $\langle \mathbb{N}^+, \leq_{div} \rangle$ não possui nem menor e nem maior elemento. No entanto, para os subconjuntos $S_1 = \{2k : k \in \mathbb{N}^+\}$ e $S_2 = \{2, 3, 6\}$, tem-se:

- S_1 possui o número 2 como uma cota inferior (menor elemento de S_1), mas não possui cota superior;
- S_2 possui o número 6 como uma cota superior (maior elemento de S_2), mas não possui cota inferior;
- Os outros múltiplos de 2 e 3 ($12, 18, 24, \dots$) não pertencem a S_2 , mas também são cotas superiores de S_2 .

É importante notar que cotas (inferiores ou superiores) podem existir ou não, e existindo, podem não ser únicas. No Exemplo 3.15, S_1 possui uma única cota inferior, que coincide com seu menor elemento, enquanto que S_2 possui infinitas cotas superiores. No Exemplo 3.16, apresenta-se um caso em que não existem cotas (inferior e superior).

Exemplo 3.18. Considerando-se o intervalo aberto $S = (a, b)$ com ordem usual (\leq) não possui cota inferior nem cota superior.

Muitas vezes é possível encontrar uma **menor cota superior** ou uma maior **cota inferior**, que são chamadas respectivamente de **supremo** e **ínfimo**.

Exemplo 3.19. No Exemplo 3.13, pode-se obter todas as cotas superiores do conjunto S_2 , que formam o conjunto

$$\{6k : k \in \mathbb{N}^+\} = \{6, 12, 18, 24, 30, \dots\}.$$

Obviamente, este conjunto tem 6 como menor elemento, ou seja, o número 6 é **a menor de todas as cotas superiores** de S_2 . Isso dá origem ao seguinte conceito:

Definição 3.7 (Supremo). Sejam $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado, S um subconjunto de X e $x \in X$. x chama-se **supremo** de S sempre que:

1. x é uma cota superior de S ;

2. Se $s \in X$ é uma cota superior de S , então $x \leq s$.

Neste caso, escreve-se $x = \sup(S)$ ou $x = \bigvee S$.

Definição 3.8 (Ínfimo). Sejam $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado, S um subconjunto de X e $y \in X$. y chama-se **ínfimo** de S sempre que:

1. y é uma cota inferior de S ;

2. Se $s \in X$ é uma cota inferior de S , então $s \leq y$.

Neste caso, escreve-se $x = \inf(S)$ ou $x = \bigwedge S$.

Exemplo 3.20. Se considerar-se S_1 e S_2 definidos no Exemplo 3.17, tem-se:

1. $\inf(S_1) = 2$ e S_1 não possui elemento supremo;

2. $\sup(S_2) = 6$ e S_2 não possui elemento ínfimo.

No entanto, tomando S_1 e S_2 como subconjuntos de \mathbb{N}^+ , a situação muda. Em ambos os casos S_1 e S_2 passam a ter supremo e ínfimo.

Exemplo 3.21. Considere $\langle \mathbb{N}^+, \leq_{div} \rangle$ e seja $S = \{2, 3, 4, 6, 8\}$ um subconjunto \mathbb{N}^+ , então:

$$\inf(S) = \text{mdc}(S) = 1 \text{ e } \sup(S) = \text{mmc}(S) = 24$$

Exemplo 3.22. Em \mathbb{R} o supremo e o ínfimo de um intervalo limitado, $I = [a, b]$ ou (a, b) ou $[a, b)$ ou $(a, b]$, são respectivamente os elementos b e a , ou seja:

$$\inf(I) = a \text{ e } \sup(I) = b$$

Proposição 3.6. Sejam $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq B \subseteq X$.

1. Se A e B possuem supremo, então $\sup(A) \leq \sup(B)$;

2. Se A e B possuem ínfimo, então $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Demonstração.

1. Como $A \subseteq B$ e por definição tem-se que $x \leq \sup(B)$, para todo $x \in B$, então $\sup(B)$ é uma cota superior de A .
2. Análogo ao caso anterior.

□

Proposição 3.7. *Sejam $\langle X, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq X$ não-vazio.*

1. *A possui elemento máximo se, e somente se, A possui supremo que coincide com o máximo;*
2. *A possui elemento mínimo se, e somente se, A possui ínfimo que coincide com o mínimo.*

Demonstração. Seguem das definições.

□

3.2 Reticulados

Num conjunto parcialmente ordenado podem existir subconjuntos que não possuem supremo ou ínfimo, como foi mostrado em alguns exemplos deste capítulo, mas em alguns desses sistemas ordenados, existem casos em que todo subconjunto formado por pares de elementos, ou seja, subconjuntos da forma $\{a, b\}$, possuem supremo e ínfimo. Estas ordens são chamadas de reticulados, cuja definição é apresentada abaixo.

Definição 3.9 (Reticulado). *Um **reticulado** é um conjunto parcialmente ordenado $\langle L, \leq \rangle$ tal que:*

(R1) *Se $x, y \in L$, então $\sup(\{x, y\}) \in L$;*

(R2) *Se $x, y \in L$, então $\inf(\{x, y\}) \in L$.*

Exemplo 3.23. $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ é um reticulado com $\sup(\{A, B\}) = A \cup B$ e $\inf(\{A, B\}) = A \cap B$.

Exemplo 3.24. $\langle \mathbb{N}^+, \leq_{div} \rangle$ é um reticulado com

$$\inf(\{a, b\}) = \text{mdc}(a, b) \text{ e } \sup(\{a, b\}) = \text{mmc}(a, b)$$

Exemplo 3.25. Intervalos fechados são reticulados com

$$\inf(\{a, b\}) = \min(a, b) \text{ e } \sup(\{a, b\}) = \max(a, b)$$

Exemplo 3.26. O conjunto de todas as funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ com ordem \sqsubseteq , onde I é um intervalo, é um reticulado com

$$(\inf(\{f, g\}))(x) = \min(f(x), g(x)) \text{ e } (\sup(\{f, g\}))(x) = \max(f(x), g(x)).$$

De modo análogo, os conjuntos:

1. de todas as funções de agregação n -árias;
2. de todas as t -normas;
3. de todas as t -conormas.

também são reticulados com a ordem \sqsubseteq .

Como num reticulado L sempre existem $\sup(\{x, y\})$ e $\inf(\{x, y\})$ e esses elementos são únicos, para quaisquer que sejam $x, y \in L$, pode-se definir duas operação binárias

$$\vee : L \times L \rightarrow L \text{ e } \wedge : L \times L \rightarrow L,$$

simplesmente escrevendo

$$a \vee b = \sup(\{x, y\}) \text{ e } a \wedge b = \inf(\{x, y\})$$

3.2.1 Propriedades

Em um reticulado pode-se verificar uma diversidade de propriedades, das quais apresenta-se apenas as que serão importância neste trabalho.

Teorema 3.3. *Seja $\langle L, \leq, \vee, \wedge \rangle$ um reticulado. As seguintes propriedades são válidas:*

(L1) $x \vee x = x$ e $x \wedge x = x$ (Idempotência);

(L2) $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$ (Comutatividade);

(L3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ e $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (Associatividade);

(L4) $x \vee (x \wedge y) = x$ e $x \wedge (x \vee y) = x$ (Lei da absorção).

Demonstração. Ver Teorema 15.8.1 de (ABE; PAPAVERO, 1991). □

Teorema 3.4. *Seja L um conjunto munido de dois operadores binários \vee e \wedge , os quais satisfazem as L1-L4. Então, a relação*

$$a \leq b \iff a \vee b = a$$

é uma relação de ordem sobre L , e $\langle L, \leq \rangle$ é um reticulado.

Demonstração. Ver Teorema 15.8.2 de (ABE; PAPAVERO, 1991). □

Além dos Teoremas 3.1 e 3.2, é importante destacar que:

(i) Se $x \leq y$ e $z \leq w$, então $x \vee z \leq y \vee w$ e $x \wedge z \leq y \wedge w$;

(ii) Se $x \leq y$, então $x \vee z \leq y \vee z$ e $x \wedge z \leq y \wedge z$;

(iii) $x \vee y = x \wedge y$ se, e somente se, $x = y$;

(iv) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ e $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

Outros conceitos que serão utilizados neste trabalho são:

Definição 3.10. *Um reticulado é limitado, quando possui um menor e um maior elemento.*

Definição 3.11. *Um reticulado tal que todo subconjunto possui supremo e ínfimo é chamado de reticulado completo.*

Todo reticulado completo é também um reticulado limitado. Além disso, alguns exemplos de reticulados completos são apresentados abaixo:

1. Intervalos fechados limitados, onde:

- O menor elemento é o limitante inferior;
- O maior elemento é o limitante superior;
- $a \vee b = \max(a, b)$ e $a \wedge b = \min(a, b)$.

2. $\langle \mathbb{N}, \leq_{div} \rangle$, onde:

- O menor elemento é o número 1;
- O maior elemento é o número 0;
- $x \vee y = mmc(x, y)$ e $x \wedge y = mdc(x, y)$.

3. $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, onde:

- O menor elemento é o subconjunto vazio;
- O maior elemento é o conjunto X ;
- $A \vee B = A \cup B$ e $A \wedge B = A \cap B$.

4. O conjunto das funções de agregação n -árias com a ordem \sqsubseteq , onde:

- O menor elemento é a função $A_{\perp}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 = \dots = x_n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- O maior elemento é a função $A_{\top}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_1 = \dots = x_n = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- $(f \vee g)(x_1, \dots, x_n) = \max(f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n))$ e $(f \wedge g)(x_1, \dots, x_n) = \min(f(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_n))$.

5. O conjunto das t-normas com a ordem \sqsubseteq , onde:

- O menor elemento é a função $T_{\perp}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in [0, 1)^2 \\ \min(x, y), & \text{caso contrário} \end{cases}$;

- O maior elemento é a função $T(x, y) = \min(x, y)$;
- $(T_1 \vee T_2)(x, y) = \max(T_1(x, y), T_2(x, y))$ e $(T_1 \wedge T_2)(x, y) = \min(T_1(x, y), T_2(x, y))$.

6. O conjunto das t-conormas com a ordem \sqsubseteq , onde:

- O menor elemento é a função $S(x, y) = \max(x, y)$;
- O maior elemento é a função $T_{\perp}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \max(x, y), & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- $(S_1 \vee S_2)(x, y) = \max(S_1(x, y), S_2(x, y))$ e $(S_1 \wedge S_2)(x, y) = \min(S_1(x, y), S_2(x, y))$.

Exemplos de reticulados que não completos são:

1. \mathbb{R} ;
2. Intervalos abertos;
3. Intervalos semi-abertos;
4. O conjunto das funções de $[a, b]$ em \mathbb{R} com a ordem \sqsubseteq , pois o subconjunto $S = \{f_{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } f_n(x) = n \forall x \in [a, b]\}$ não possui supremo nem ínfimo.

Um maior aprofundamento sobre ordens parciais e reticulados pode ser encontrado em (BIRKHOFF, 1967; GRATZER, 1978; ABE; PAPAVERO, 1991).

3.3 Agregações, t-normas e t-conormas em Reticulados

No segundo capítulo desta tese discutiu-se sobre funções de agregação com domínio em $[0, 1]^n$ e contradomínio em $[0, 1]$. No entanto, esses domínios podem ser substituídos por reticulados, como pode ser encontrado em (DE BAETS; MESIAR, 1999; PALMEIRA et al., 2014; COOMAN; KERRE, 1994; BEDREGAL; SANTOS; CALLEJAS-BEDREGAL, 2006).

As funções de agregação, por exemplo, são definidas da seguinte maneira:

Definição 3.12 ((DE BAETS; MESIAR, 1999)). *Seja $\langle L, \leq \rangle$ um reticulado limitado. Uma função de agregação é qualquer função monotônica $A : L^n \rightarrow L$ com $A(\perp, \dots, \perp) = \perp$ e $A(\top, \dots, \top) = \top$.*

Exemplo 3.27. *Se $\langle L, \leq \rangle$ é um reticulado limitado, então são funções de agregação:*

1. $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$;
2. $\bigvee(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$;
3. $\bigwedge(x_1, \dots, x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$.

Os conceitos de t-norma e t-conorma também podem ser estendidos para qualquer reticulado limitado (DE BAETS; MESIAR, 1999).

Definição 3.13 ((DE BAETS; MESIAR, 1999)). *Seja $\langle L, \leq \rangle$ um reticulado limitado. Uma função $T : L \times L \rightarrow L$ tal que:*

- (i) $T(x, \top) = x$, para qualquer $x \in L$;
- (ii) $T(x, y) = T(y, x)$, para $x, y \in L$;
- (iii) $T(x, T(y, z)) = T(T(z, y), z)$, sempre que $x, y, z \in L$;
- (iv) $T(x, y) \leq T(x, z)$, quando $y \leq z$.

é chamada de **t-norma**.

Definição 3.14 ((DE BAETS; MESIAR, 1999)). *Seja $\langle L, \leq \rangle$ um reticulado limitado. Uma função $S : L \times L \rightarrow L$ tal que:*

- (i) $S(x, \perp) = x$, para qualquer $x \in L$;
- (ii) $S(x, y) = S(y, x)$, para $x, y \in L$;
- (iii) $S(x, T(y, z)) = S(S(z, y), z)$, sempre que $x, y, z \in L$;

(iv) $S(x, y) \leq S(x, z)$, quando $y \leq z$.

é chamada de **t-conorma**.

Observação 3.3. Neste trabalho, serão utilizadas as seguintes notações:

- O símbolo \otimes será utilizado para denotar uma t-norma e $x \otimes y$ será usado ao invés de $\otimes(x, y)$;
- O símbolo \oplus será utilizado para denotar uma t-conorma e $x \oplus y$ será usado ao invés de $\oplus(x, y)$.

Um estudo bem detalhado sobre as t-normas e t-conormas de reticulados limitados pode ser encontrado em (DE BAETS; MESIAR, 1999). Além disso, todas as propriedades que foram listadas no Capítulo 2, para funções de agregação em $[0, 1]^n$, podem ser estendidas para funções cujos domínios são reticulados, junto com toda uma análise. Aqui, é importante destacar que as t-normas e as t-conormas satisfazem a seguinte Proposição:

Proposição 3.8 ((DE BAETS; MESIAR, 1999)). *Sejam $\otimes, \oplus : L \times L \rightarrow L$ uma t-norma e uma t-conorma, respectivamente, definidas num reticulado limitado L . Então, para todos $a, b, c \in L$ são válidos:*

$$(i) \ a \otimes b \leq_L a \otimes \top_L = a \text{ onde } a = a \oplus \perp_L \leq_L a \oplus b;$$

$$(ii) \ a \otimes b \leq_L a \wedge b \text{ e } a \vee b \leq_L a \oplus b;$$

$$(iii) \ a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c \text{ e } a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c;$$

$$(iv) \ a \otimes \perp_L = \perp_L = \perp_L \otimes a.$$

Além da Proposição 3.5, é importante notar que tanto t-normas quanto t-conormas podem ser estendidas a operadores n -ários, via associatividade, da seguinte maneira:

$$\bigoplus_{i=1}^n x_i = (((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \oplus \cdots \oplus x_{n-1}) \oplus x_n;$$

e

$$\bigotimes_{i=1}^n x_i = (((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) \otimes \cdots) \otimes x_{n-1} \otimes x_n.$$

3.4 Funções \mathcal{LMOWA}

Uma noção generalizada das funções OWA, foi introduzida por (LIZASOAIN; MORENO, 2013), substituindo-se o intervalo $[0, 1]$ das OWA de Yager por um reticulado limitado. Assim como as OWAs de Yager, as funções definidas em (LIZASOAIN; MORENO, 2013) também necessitam de vetores de peso.

Definição 3.15 ((LIZASOAIN; MORENO, 2013)). *Seja $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$ um reticulado limitado equipado com uma t -norma $\otimes : L^2 \rightarrow L$ e uma t -conorma estendida $\oplus : L^n \rightarrow L$. Então, $(w_1, \dots, w_n) \in L^n$ é um **vetor de pesos** em $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$, se*

$$\bigoplus_{i=1}^n w_i = \top_L.$$

Se além disso, tem-se que

$$a \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^n w_i \right) = \bigoplus_{i=1}^n (a \otimes w_i), \text{ para qualquer } a \in L^n,$$

então chama-se $(w_1, \dots, w_n) \in L^n$ de **vetor de pesos distributivo** em $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$.

Exemplo 3.28. *Se L é um reticulado limitado, $x \oplus y = x \vee y$ e $x \otimes y = x \wedge y$, então (w_1, \dots, w_n) é um:*

- (1) *Um vetor de pesos se, e somente se, $w_1 \vee \cdots \vee w_n = \top_L$;*
- (2) *Um vetor de pesos distributivo se, e somente se, satisfaz (1) e $a \wedge (w_1 \vee \cdots \vee w_n) = (a \wedge w_1) \vee \cdots \vee (a \wedge w_n)$, para todo $a \in L$.*

O cálculo do valor de saída de uma função OWA de Yager somente pode ser realizado a partir do ordenamento do vetor n -dimensional de entradas. Infelizmente, esse processo nem sempre será possível em um reticulado limitado, a menos que este seja uma cadeia. Por essa

razão, (LIZASOAIN; MORENO, 2013) definiram uma forma auxiliar de realizar essa ordenação, a partir do seguinte Lema:

Lema 3.1 ((LIZASOAIN; MORENO, 2013)). *Seja L um reticulado limitado. Para qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$, considere os seguintes valores:*

- $b_1 = a_1 \vee \dots \vee a_n$
- $b_2 = [(a_1 \wedge a_2) \vee \dots \vee (a_1 \wedge a_n)] \vee [(a_2 \wedge a_3) \vee \dots \vee (a_2 \wedge a_n)] \vee \dots \vee [a_{n-1} \wedge a_n]$
- $b_3 = \bigvee \{a_1 \wedge a_2 \wedge a_3, a_1 \wedge a_2 \wedge a_4, a_1 \wedge a_2 \wedge a_n, \dots, a_{n-2} \wedge a_{n-1} \wedge a_n\}$
- \vdots
- $b_k = \bigvee_{(j_1, \dots, j_k) \subseteq \{1, \dots, n\}} a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_k}$
- \vdots
- $b_n = a_1 \wedge \dots \wedge a_n.$

Então, $a_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = a_1 \vee \dots \vee a_n$. Se a_1, \dots, a_n são comparáveis entre si, existe uma permutação σ , do conjunto $\{1, \dots, n\}$, tal que $(b_1, \dots, b_n) = (a_{(1)}, \dots, a_{(n)})$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (LIZASOAIN; MORENO, 2013). Ademais, com o intuito de simplificar notações utiliza-se:

Definição 3.16. *Se L é um reticulado completo, então a função $\mathcal{LM} : L^n \rightarrow L^n$ definida por:*

$$\mathcal{LM}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

onde (b_1, b_2, \dots, b_n) é o vetor obtido de acordo com o Lema 3.1, é chamada **função de Lizassoain-Moreno**.

Exemplo 3.29. *Se L é um reticulado completo e $a_1, a_2, a_3, a_4 \in L$, então:*

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 \\ b_2 &= \bigvee \{a_1 \wedge a_2, a_1 \wedge a_3, a_1 \wedge a_4, a_2 \wedge a_3, a_2 \wedge a_4, a_3 \wedge a_4\} \end{aligned}$$

$$b_3 = \bigvee \{a_1 \wedge a_2 \wedge a_3, a_1 \wedge a_2 \wedge a_4, a_1 \wedge a_3 \wedge a_4, a_2 \wedge a_3 \wedge a_4\}$$

$$b_4 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4$$

A função de Lizassoain-Moreno satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 3.9 (Propriedades da função de Lizassoain-Moreno). *Sejam L um reticulado completo e $\mathcal{LM} : L^n \rightarrow L^n$ a função de Lizassoain-Moreno. Então,*

- (i) *Se $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$ é tal que todo par de coordenadas x_i e x_j , com $i \neq j$, é comparável, então $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ para alguma permutação σ no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.*
- (ii) *Se L é uma cadeia, então para todo $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$ existe uma permutação σ no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.*
- (iii) *Se $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, então $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$.*
- (iv) $\mathcal{LM} \circ \mathcal{LM} = \mathcal{LM}$
- (v) *Para toda permutação σ no conjunto $\{1, \dots, n\}$ e para todo $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$, tem-se que $\mathcal{LM}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n)$.*
- (vi) *Se $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in L^n$ são tais que $x_i \leq_L y_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_n)$ e $\mathcal{LM}(y_1, \dots, y_n) = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$, então $b_i \leq_L \bar{b}_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração.

- (i) Segue do Lema 1.
- (ii) Como L é uma cadeia, então todo (x_1, \dots, x_n) satisfaz a hipótese (i). Logo, para cada (x_1, \dots, x_n) existe uma permutação σ tal que $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.
- (iii) Segue da definição da função de Lizassoain-Moreno.

(iv) Como $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_n)$, onde $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ então, por (iii) segue que

$$\mathcal{LM}(\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n)) = \mathcal{LM}(b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n) = \mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$.

(v) Sejam $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_n)$ e $\mathcal{LM}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = (c_1, \dots, c_n)$. Por definição, tem-se que:

$$\begin{aligned} c_k &= \bigvee \{x_{\sigma(j_1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(j_k)} : \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}\} \\ &= \bigvee \{x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} : \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}\} \\ &= b_k \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{LM}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n)$.

(vi) Basta ver que

$$\begin{aligned} b_i &= \bigvee \{x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_k} : \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}\} \\ &\leq_L \bigvee \{y_{j_1} \wedge \dots \wedge y_{j_k} : \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}\} = \bar{b}_i \end{aligned}$$

□

Após definir a função de Lizassoain-Moreno e provar algumas de suas propriedades, apresenta-se a versão generalizada de OWA para reticulado completo, concebida em (LINGLING et al., 2012).

Definição 3.17 ((DE BAETS; MESIAR, 1999)). *Seja $\tilde{\mathbf{w}} = (w_1, \dots, w_n) \in L^n$ um vetor de pesos distributivo no reticulado completo $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$. A função OWA de Lizassoain-Moreno associada a $\tilde{\mathbf{w}}$ e a tripla $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$ é definida por*

$$\mathcal{LMOWA}_{\tilde{\mathbf{w}}}(\tilde{\mathbf{a}}) = \bigoplus_{i=1}^n (w_i \otimes b_i),$$

onde $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{LM}(a_1, \dots, a_n)$.

Exemplo 3.30. *Sejam $X = \{a, b, c, d\}$ e \leq_0 , conforme Exemplo 3.14, $\oplus = \vee$ e $\otimes = \wedge$. Então, $\tilde{w} = (a, b, c)$ é um vetor distributivo de pesos, pois $a \vee b \vee c = d$ e:*

- $\mathcal{LM}(a, b, a) = (b, a, a)$ e

$$\mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(a, b, a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) \vee (c \wedge a) = a$$

- $\mathcal{LM}(a, b, b) = (b, b, a)$ e

$$\mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(a, b, b) = (a \wedge b) \vee (b \wedge b) \vee (c \wedge a) = b$$

- $\mathcal{LM}(a, b, c) = (d, a, a)$ e

$$\mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(a, b, c) = (a \wedge d) \vee (b \wedge a) \vee (c \wedge a) = a$$

- $\mathcal{LM}(b, c, c) = (d, c, a)$ e

$$\mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(a, b, c) = (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = a$$

Outros exemplos e propriedades das funções \mathcal{LMOWA} podem ser encontradas em (LIZASOAIN; MORENO, 2013). O importante aqui é observar que as funções OWA de Yager são casos particulares de \mathcal{LMOWA} s.

Teorema 3.5. *Toda função OWA no sentido de Yager é uma \mathcal{LMOWA} .*

Demonstração. Considere $L = [0, 1]$, $\otimes = T_p$, $\oplus = S_{LK}$ e $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ um vetor de pesos, i.e., $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Como, $S_{LK}(w_1, \dots, w_n) = \min(w_1 + \dots + w_n, 1) = 1$ e $c = T_P(c, S_{LK}(w_1, \dots, w_n)) = S_{LK}(T_P(c, w_i))$, para todo $c \in [0, 1]$, tem-se que $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ é um vetor distributivo de pesos.

Para provar que \mathcal{LMOWA} coincide com a função OWA de Yager, deve-se notar que, de acordo com o item (i) da Proposição 5.2, para cada $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ existe uma permutação σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que $(b_1, \dots, b_n) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Assim,

$$x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(s)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)},$$

ou seja, $(b_1, \dots, b_n) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Portanto, verifica-se, para todos $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(x_1, \dots, x_n) &= \bigoplus_{i=1}^n (w_i \otimes b_i) \\
 &= S_{LK}(w_1 \otimes b_1, \dots, w_n \otimes b_n) \\
 &= \min\left(\sum_{i=1}^n (w_i \cdot x_{\sigma(i)}), 1\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (w_i \cdot x_{\sigma(i)}) \\
 &= \text{OWA}_{\tilde{w}}(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

□

As funções OWA de Yager satisfazem as propriedades da idempotência e simetria. Além disso, para qualquer vetor de pesos $\tilde{w} \in [0, 1]^n$ e para todo $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ tem-se

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \text{OWA}_{\tilde{w}}(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n)$$

De forma análoga, as funções \mathcal{LMOWA} também são idempotentes e simétricas e, satisfazem a propriedade:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq \mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(a_1, \dots, a_n) \leq a_1 \vee \dots \vee a_n$$

No Capítulo 5, serão apresentadas outras funções também definidas sob a perspectiva de reticulados.

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo discutiu-se sobre ordens parciais, reticulados e funções (agregações, t-normas, t-conormas e \mathcal{LMOWA} s) com domínios em reticulados limitados, assuntos que serão necessários para o entendimento da discussão que será apresentada no Capítulo 5.

A partir do próximo capítulo, serão apresentadas as contribuições deste trabalho. Em suma,

serão apresentadas as seguintes discussões:

1. Introduz-se as funções mistura generalizada de (PEREIRA; PASI, 1999) e verifica-se algumas especificidades que estas funções alcançam;
2. Propõe-se a ampliação de função mistura generalizada para função mistura generalizada limitada, provando-se uma diversidade de peculiaridades e exemplos;
3. Estabelece-se as funções OWAs dinâmicas (*Dynamic Ordered Weighted*), ampliando a noção de *LMOWA*;
4. Amplia-se a compreensão das OWAs dinâmicas com o auxílio de ordens admissíveis, define-se as funções mistura generalizada cujos domínios são reticulados limitados e demonstra-se diversas características dessas novas funções.

4 Funções Mistura Generalizada

As funções mistura generalizada foram brevemente relatadas em (PEREIRA; PASI, 1999), que as descreveram como funções da forma

$$W(\mathbf{x}) = \sum w_i(\mathbf{x}) \cdot x_i \text{ com } \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (4.1)$$

No entanto, nessa referência não foi realizado um estudo detalhado acerca dessas funções, foram estudadas apenas algumas funções de mistura generalizadas com pesos como funções de uma variável. Um estudo mais aprofundado dessas funções somente foi realizado em (FARIAS et al., 2016)¹, (FARIAS et al., 2016a), (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2016) e (FARIAS et al., 2018). Nesses trabalhos o entendimento destas funções parte da compreensão de que elas são obtidas a partir de pesos dinâmicos, que são funções das entradas da função. Dessa forma, uma função de mistura generalizada pode ser redefinida da seguinte maneira:

Definição 4.1. *Uma função mistura generalizada, ou simplesmente função GM, é qualquer função GM: $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ da forma*

$$GM(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i,$$

onde f_1, \dots, f_n são funções também de $[0, 1]^n$ em $[0, 1]$ tais que $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Definição 4.2. *Uma família finita de funções $\Gamma = \{f_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1] \mid 1 \leq i \leq n\}$ com $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) = 1$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ é chamada de família de funções de peso (FFP).*

¹Neste trabalho inicialmente chamou-se as funções mistura generalizadas de funções de pesos ordenados dinâmicos. Ressalta-se que o referido trabalho foi ampliado para (FARIAS et al., 2018)

Observação 4.1. *Escreve-se GM_Γ quando se quer explicitar a FFP que define uma função mistura generalizada.*

Destaca-se que o procedimento para calcular o valor de saída de uma função GM difere do mecanismo de cálculo de uma função OWA. A Figura 10 resume os passos que devem ser seguidos para calcular os valores produzidos por uma função GM.

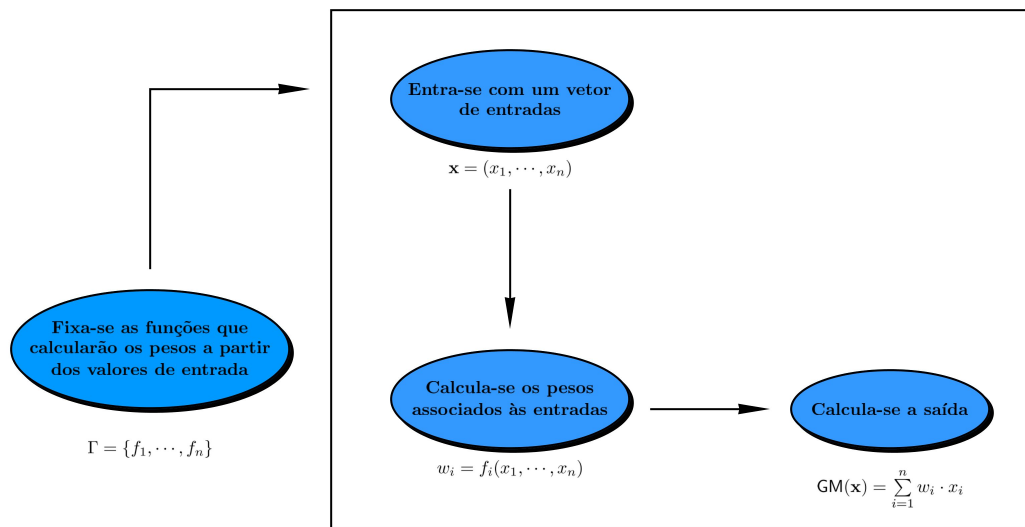


Figura 10: Procedimento para calcular os valores de saída da função GM.

Exemplo 4.1.

1. Se uma FFP, Γ , é constituída apenas por funções constantes, ou seja, $f_i(x_1, \dots, x_n) = w_i, \forall i \in \mathcal{N}$ tem-se que GM_Γ coincide com a média aritmética ponderada $pond_{w_1, \dots, w_n}$;
2. Outra função mistura que pode ser obtida de uma FFP formada por funções constantes é arit, que é construída a partir de $f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}$;
3. A função min pode ser obtida de $\Gamma = \{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, onde $f_{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 1$ e $f_{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 0$, se $i \neq n$. Lembrando que (n) representa o índice da n -ésima maior coordenada do vetor (x_1, \dots, x_n) .
4. A função max pode ser obtida de $\Gamma = \{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, onde $f_{(1)}(x_1, \dots, x_n) = 1$ e $f_{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 0$, se $i \neq 1$.

Na verdade, todos os exemplos acima são consequência do Teorema 4.1.

Teorema 4.1 ((FARIAS et al., 2018)). *As funções GM generalizam propriamente tanto as funções OWA de Yager quanto as funções mistura.*

Demonstração.

1. Se $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ é um vetor de pesos, então a FFP, Γ , com funções definidas abaixo é tal que $\mathbf{GM}_\Gamma = \mathbf{OWA}_\mathbf{w}$.

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = w_{p(i)},$$

onde $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ é o inverso da permutação $q(i) = (i)$. Assim,

$$\mathbf{GM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i = \sum_{i=1}^n w_{p(i)} x_i,$$

mas como p é o inverso de q , segue-se que $q(p(i)) = i$, ou seja, $(p(i)) = i$. Logo,

$$\mathbf{GM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_{p(i)} x_{(p(i))},$$

que realizando as comutações necessárias nesse somatório chega-se em

$$\mathbf{GM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)} = \mathbf{OWA}_\mathbf{w}(x_1, \dots, x_n)$$

2. Se $\Gamma = \{\sin(x) \cdot y, 1 - \sin(x) \cdot y\}$. Então, $\mathbf{GM}_\Gamma(x, y) = (\sin(x) \cdot y) \cdot x + (1 - \sin(x) \cdot y) \cdot y$ não é uma função OWA.
3. Funções mistura também são funções mistura generalizada com FFP definida pelas funções $f_i(\mathbf{x}) = \frac{w_i(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i(x_i)}$.
4. Nem toda função mistura generalizada pode ser caracterizada como uma função mistura, tendo em vista que cada um dos pesos de uma função GM pode depender de todos os valores de entradas x_1, \dots, x_n , enquanto que os pesos de uma função mistura dependem exclusivamente de uma única entrada, de sua respectiva coordenada. Um exemplo de função GM, que não é uma função mistura, é a função definida no item 3 desta demonstração.

□

Para facilitar o entendimento do processo descrito no item 1 da prova do Teorema 4.1, exibe-se o Exemplo 4.2.

Exemplo 4.2. Se $\mathbf{w} = (0.3, 0.4, 0.3)$, então para $\mathbf{x} = (0.1, 1.0, 0.9)$ tem-se

$$x_{(1)} = x_2 = 1.0, x_{(2)} = x_3 = 0.9 \text{ e } x_{(3)} = x_1 = 0.1$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1) &= 2 & 1 &\mapsto 2 \\ (2) &= 3 & \text{ou} & 2 \mapsto 3 \\ (3) &= 1 & 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

O inverso desta permutação é:

$$\begin{aligned} p(1) &= 3 & 1 &\mapsto 3 \\ p(2) &= 1 & \text{ou} & 2 \mapsto 1 \\ p(3) &= 2 & 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

Portanto, $f_1(\mathbf{x}) = w_{p(1)} = w_3 = 0.3$, $f_2(\mathbf{x}) = w_{p(2)} = w_1 = 0.3$, $f_3(\mathbf{x}) = w_{p(3)} = w_2 = 0.4$ e

$$\begin{aligned} GM(\mathbf{x}) &= 0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 1.0 + 0.4 \cdot 0.9 \\ &= 0.3 \cdot 1.0 + 0.4 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.1 \\ &= OWA_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Corolário 4.1. (FARIAS et al., 2018) As funções *min*, *max*, *arit*, *medi* e *cOWA*, que são funções do tipos *OWA*, também são funções mistura generalizada.

Demonstração. Segue do Teorema 4.1. □

Ressalta-se que as funções de Yager necessitam de ordenações das vetores de entradas, que poderiam ter sido tomadas também na definição de uma função GM, ou seja, poderia-se ter

definido uma função GM como da forma:

$$\text{GM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{(i)},$$

onde $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma FFP e $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ é uma ordenação decrescente dos vetor de entradas. No entanto, isso seria desnecessário, uma vez que a substituição dos pesos estáticos por funções $f_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ de todas as coordenadas de entrada possibilita que essa ordenação seja feita pelas funções de Γ .

No que segue mostra-se que as integrais discretas de Choquet também são funções GM.

Teorema 4.2. (FARIAS *et al.*, 2018) *Se $\mu : 2^{\mathcal{N}} \rightarrow [0, 1]$ é uma medida fuzzy discreta, então a integral de Choquet \mathbf{C}_μ é uma função GM.*

Demonstração. Observando que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\mu(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_{[i]} [\mu(\{j \in \mathcal{N} : x_j \geq x_{[i]}\}) - \mu(\{j \in \mathcal{N} : x_j \geq x_{[i+1]}\})] \\ &= \sum_{i=1}^n g_{[i]}(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{[i]}, \end{aligned}$$

basta definir $f_i(x_1, \dots, x_n) = g_{p(i)}(x_1, \dots, x_n)$, onde p é a permutação de $\{1, \dots, n\}$ tal que $p(i) = [i]$. \square

Outro exemplo de função GM pode ser visto abaixo.

Exemplo 4.3. *Definindo-se a FFP Γ a partir das funções*

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x_1 = \dots = x_n = 0 \\ \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então tem-se a seguinte função mistura generalizada:

$$\text{GM}_\Gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_1, \dots, x_n = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

No que segue apresenta-se uma generalização da noção de função generalizada proposta em (FARIAS et al., 2018).

Note-se que a função GM do Exemplo 4.3 é idempotente, homogênea e estável por translações, mas não é monotônica, pois $\mathbf{GM}_\Gamma(0.5, 0.2, 0.1) = 0.375$ e $\mathbf{GM}_\Gamma(0.5, 0.22, 0.2) = 0.368$. Portanto, pode-se constatar que uma função mistura generalizada, embora satisfaça as condições de fronteira, não será *necessariamente* uma função de agregação.

4.1 Funções Mistura Generalizada Limitada

Neste trabalho, propomos uma forma ainda ampliada de função mistura generalizada que pode ser obtida a partir o relaxamento da condição $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) = 1$ para $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \leq 1$, dando origem a um novo tipo de função chamada função **mistura generalizada limitada** (ou *bounded generalized mixture* - BGM).

Definição 4.3. Uma família finita de funções $\Gamma = \{f_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1] \mid 1 \leq i \leq n\}$ é uma família de funções de peso relaxada (**FFPr**) se:

1. $\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \leq 1$, para todos $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$;
2. $\sum_{i=1}^n f_i(1, \dots, 1) = 1$

Seja $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ uma FFPr. Uma função com o formato:

$$\mathbf{BGM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i$$

é chamada **função mistura generalizada limitada** ou simplesmente de função **BGM**.

Observação 4.2.

- Toda função BGM satisfaz as condições de fronteira $\mathbf{BGM}(0, \dots, 0) = 0$ e $\mathbf{BGM}(1, \dots, 1) = 1$;
- Toda função GM é também uma função BGM, que satisfaz a igualdade no item 1 da Definição 4.2. Consequentemente:

- As funções *min*, *max*, *arit*, *medi*, *pond*, *OWA* são também exemplos de funções *BGM*;
- Funções *BGM*, assim como as funções *GM* nem sempre serão funções de agregação, pois a monotonicidade pode falhar.

Um exemplo de função *BMG* que não é uma função *GM* é apresentado abaixo:

Exemplo 4.4. Seja $\Gamma = \{f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{n} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Então, Γ é uma *FFPr*, pois para qualquer $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ tem-se

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

Tem-se também que $BGM_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n}$ não é uma função *GM*, pois $\sum_{f_i \in \Gamma} f_i(\mathbf{x})$ não é necessariamente igual a 1.

Com base na Observação 4.3 e no Exemplo 4.4, pode-se concluir que as funções *BGM* são uma forma estendida de função *GM* (e conseqüentemente de função *OWA*), mas nem toda função *BGM* é uma função *GM*. Em (FARIAS et al., 2016a) foi demonstrado que existe uma relação muito forte entre essas duas classes de funções, que permite definir uma função *GM* a partir de qualquer função *BGM*.

Na Figura 11 pode-se visualizar um diagrama de Venn contendo algumas das classes de funções que foram apresentadas até esse ponto.

Na próxima seção serão apresentadas uma seqüência de propriedades satisfeitas por funções *GM* e *BGM*.

4.2 Propriedades das Funções Mistura Generalizada e Generalizada Limitada

Como já foi mencionado, nem toda função mistura generalizada (*GM*) é uma agregação (o mesmo vale para *BGM*), pois a condição de monotonicidade pode falhar, como no Exemplo 4.8. Nesse sentido, (PEREIRA; PASI, 1999; PEREIRA, 2000; PEREIRA; RIBEIRO, 2003) estabeleceram algumas restrições para obter-se funções mistura generalizadas monotônicas.

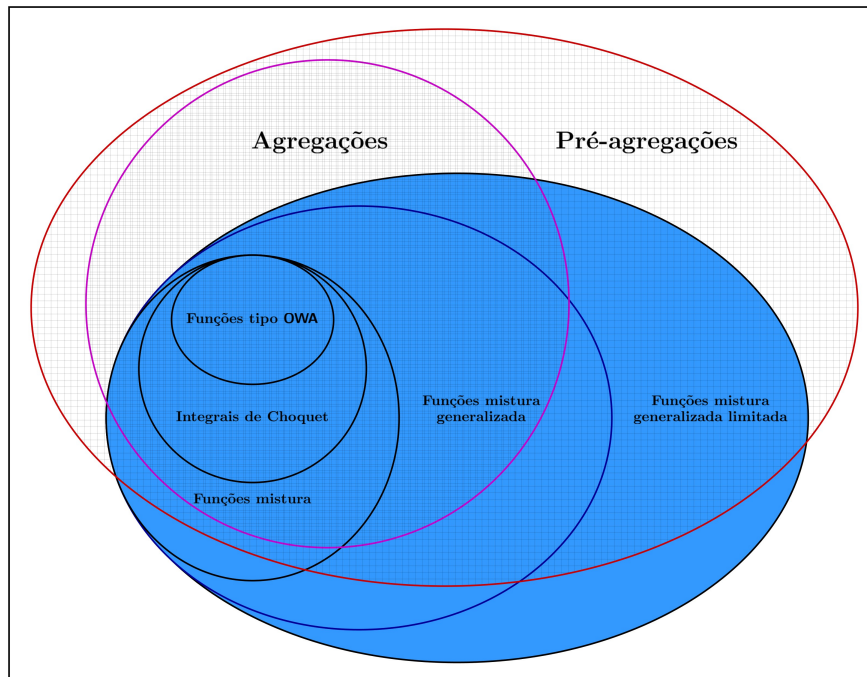


Figura 11: Diagrama de classes de funções.

Embora não seja possível classificar todas as funções GM como agregações, pode-se verificar diversas propriedades que estas funções satisfazem, conforme será mostrado no decorrer desta seção.

Proposição 4.1. (FARIAS et al., 2018) Se Γ é uma FFP, então para todos $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tem-se que:

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \text{GM}_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) \leq \max(x_1, \dots, x_n)$$

Demonstração. Dado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$,

$$\min(\mathbf{x}) \leq x_i \leq \max(\mathbf{x}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \cdot \min(\mathbf{x}) \leq \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \cdot \max(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

mas como $\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = 1$, conclui-se que:

$$\min(\mathbf{x}) \leq \text{GM}_{\Gamma}(\mathbf{x}) \leq \max(\mathbf{x})$$

□

Observação 4.3.

1. Note-se que FFP não pode ser substituído por FFPr. Portanto, funções BGM nem sempre serão funções do tipo média, pois, por exemplo, se $f_1(x, y) = \frac{x}{2}$ e $f_2(x, y) = \frac{y}{2}$, então $BGM(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ e $BGM(0.5, 0.5) = 0.25 < \min(0.5, 0.5)$;
2. Além disso, pela equação 4.2 constata-se que:

$$\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \cdot \max(\mathbf{x}) \leq \max(\mathbf{x}),$$

ou seja, $BGM(\mathbf{x}) \leq \max(\mathbf{x})$.

Proposição 4.2. (FARIAS et al., 2018) Seja Γ uma FFPr, então BGM_{Γ} é idempotente se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) = 1, \text{ para qualquer } x \in [0, 1].$$

Demonstração. (\Rightarrow) Basta observar que se $\sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) = 1$ para qualquer que seja $x \in [0, 1]$, então,

$$BGM_{\Gamma}(x, \dots, x) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) \cdot x = x \cdot \sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) = x$$

(\Leftarrow) Se para algum $x \in [0, 1]$ tem-se $\sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) < 1$, então

$$BGM_{\Gamma}(x, \dots, x) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) \cdot x = x \cdot \sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) < x$$

Assim, a condição $\sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) = 1$, para qualquer $x \in [0, 1]$, não pode ser removida quando se quer manter a idempotência. □

Corolário 4.2. (FARIAS et al., 2018) Toda função GM é idempotente.

A função $BGM(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ é um exemplo que função BGM que não satisfaz a propriedade da idempotência. Assim, constata-se que nem toda função BGM é idempotente, que é um fato que deveria-se esperar, pois nem toda FFPr satisfaz a condição $\sum_{i=1}^n f_i(x, \dots, x) = 1$.

Definição 4.4. Uma função $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ é invariante por translações se $f(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) = f(x_1, \dots, x_n)$ para todo $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ e $\lambda \in [-1, 1]$ escolhidos de forma que $(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \in [0, 1]^n$.

Exemplo 4.5. As seguintes funções são invariantes por translações:

1. $f_i(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n) - x_i$;
2. $g_i(x_1, \dots, x_n) = x_i - \min(x_1, \dots, x_n)$;
3. $h_{i,j}(x_1, \dots, x_n) = |x_i - x_j|$.

Proposição 4.3. (FARIAS et al., 2018) Se Γ é uma FFP constituída por funções invariantes por translações (Definição 4.3), então \mathbf{GM}_Γ estável por translações.

Demonstração. Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ e $\lambda \in [-1, 1]$ tais que $(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \in [0, 1]^n$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{GM}_\Gamma(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \cdot (x_i + \lambda) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \cdot x_i + \sum_{i=1}^n f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \cdot \lambda \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^n f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) = 1$, visto que Γ é uma FFP, em que cada f_i é constante por translação, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{GM}_\Gamma(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i + \lambda \\ &= \mathbf{GM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) + \lambda \end{aligned}$$

□

Observação 4.4. Na prova da Proposição 4.3 foi usado o fato de que $\sum_{i=1}^n f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) = 1$, assim, a FFP Γ não pode ser substituída por FFP, como mostrado no Exemplo 4.6.

Exemplo 4.6. Sejam $f_1(x, y) = f_2(x, y) = \frac{|x-y|}{2}$, para $(x, y) \neq (1, 1)$ e $f_1(1, 1) = f_2(1, 1) = \frac{1}{2}$. Então, $\Gamma = \{f_1, f_2\}$ é uma FFPr (que não é FFP) cujas funções de peso são invariantes por translações, mas BGM_Γ não é estável por translações, pois

$$BGM(0, 0.1) = 0.005 \text{ e } BGM(0 + 0.1, 0.1 + 0.1) = \frac{0.01}{2} + \frac{0.02}{2} = 0.015$$

Proposição 4.4. (FARIAS et al., 2018) Se Γ é uma FFPr homogênea de ordem $k \geq 0$ (i.e., se cada um dos f_i é homogêneo de ordem $k \geq 0$), então BGM_Γ é homogênea de ordem $k + 1$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} BGM_\Gamma(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \cdot \lambda x_i \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \lambda^k f_i(x_1, \dots, x_n) x_i \text{ — Por homogeneidade} \\ &= \lambda^{k+1} \cdot BGM_\Gamma(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

Observação 4.5. Quando $\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = 1$, ou seja, Γ é uma FFP, então Γ não pode ser homogênea de ordem $k > 0$, pois

$$1 = \sum_{i=1}^n f_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = \lambda^k$$

Assim, não existe função GM homogênea de ordem $k > 1$. No entanto, substituindo-se FFP por FFPr, então Γ pode ser homogênea de ordem $k > 0$. Por exemplo, $f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{n}$ são homogêneas de ordem 1, e portanto, pela Proposição anterior, BGM_Γ é homogênea de ordem 2.

Novamente, a FFP Γ do Exemplo 4.8 é homogênea de grau 0, ou seja, $f_i(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n)$, para todo $\lambda > 0$. Assim, se uma função GM_Γ é homogênea, então é de grau 1.

Proposição 4.5. (FARIAS et al., 2018) O N -dual, com respeito a negação padrão, $N(x) = 1 - x$, de uma função GM também é uma função GM.

Demonstração. Se Γ é uma FFP, então

$$\begin{aligned}
\text{GM}_{\Gamma}^N(x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} N(\text{GM}_{\Gamma}(N(x_1), \dots, N(x_n))) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) \cdot (1 - x_i) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) + \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(N(x_1), \dots, N(x_n)) \cdot x_i,
\end{aligned}$$

Além disso, note-se que

$$\sum_{i=1}^n f_i(N(x_1), \dots, N(x_n)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) = 1,$$

pois Γ é uma FFP. Assim, $\Gamma(N) = \{f_1 \circ N, \dots, f_n \circ N\}$ também é uma FFP. \square

Observação 4.6. Quando Γ é um FFPr, então pode ocorrer de:

$$1 - \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) > 0,$$

de modo que:

$$\text{BGM}_{\Gamma}^N(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) + \sum_{i=1}^n f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) \cdot x_i,$$

ou sejam $\text{BGM}_{\Gamma}^N(x_1, \dots, x_n)$ pode não pertencer ao intervalo $[0, 1]$. Além disso, não se pode afirmar que o dual de uma BGM_{Γ} é também uma BGM_{Γ} , mas tem a forma

$$\text{BGM}_{\Gamma}^N(x_1, \dots, x_n) = \text{BGM}(1 - x_1, \dots, 1 - x_n) + h(x_1, \dots, x_n)$$

Proposição 4.6. (FARIAS et al., 2018) Se $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma FFPr, então $\Gamma^R = \{g_1, \dots, g_n\}$, onde $g_i = f_{n-i+1}$, também é uma FFPr. Além disso, $\text{GM}_{\Gamma}^R = \text{GM}_{\Gamma^R}$

Demonstração. Direto da definição. \square

Exemplo 4.7. *Sejam*

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1-x_i}{3-x_1-x_2-x_3}, & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \neq (1, 1, 1) \\ \frac{1}{3}, & \text{se } (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Então, $f_1(0.2, 0.4, 0.5) = \frac{1-0.2}{3-0.2-0.4-0.5} = 0.42$, $f_2(0.2, 0.4, 0.5) = \frac{1-0.4}{3-0.2-0.4-0.5} = 0.32$ e $f_3(0.2, 0.4, 0.5) = \frac{1-0.5}{3-0.2-0.4-0.5} = 0.26$. Assim,

$$\text{GM}_\Gamma(0.2, 0.4, 0.5) = 0.42 \cdot 0.2 + 0.32 \cdot 0.4 + 0.26 \cdot 0.5 = 0.34$$

Por outro lado, $g_1(0.2, 0.4, 0.5) = f_3(0.2, 0.4, 0.5) = 0.26$, $g_2(0.2, 0.4, 0.5) = f_2(0.2, 0.4, 0.5) = 0.32$, $g_3(0.2, 0.4, 0.5) = f_1(0.2, 0.4, 0.5) = 0.42$ e

$$\text{GM}_\Gamma^R(0.2, 0.4, 0.5) = 0.26 \cdot 0.2 + 0.32 \cdot 0.4 + 0.42 \cdot 0.5 = 0.39$$

4.2.1 Monotonicidade direcional

Algumas funções mistura generalizadas limitadas podem satisfazer a propriedade da monotonicidade direcional, sendo assim pré-agregações. Nesta parte do trabalho serão apresentados algumas formas de obter-se funções BGM como pré-agregações.

Proposição 4.7. (FARIAS *et al.*, 2018) *Toda função BGM estável por translações é uma pré-agregação (k, \dots, k) -crescente.*

Demonstração. Basta ver que para todos $t > 0$, $k > 0$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ e FFPr, Γ , tais que $(x_1 + tk, x_2 + tk, \dots, x_n + tk) \in [0, 1]^n$ tem-se:

$$\text{BGM}_\Gamma(x_1 + tk, \dots, x_n + tk) = \text{BGM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) + tk,$$

e portanto,

$$\text{BGM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) \leq \text{BGM}_\Gamma(x_1 + tk, \dots, x_n + tk)$$

□

Corolário 4.3. (FARIAS *et al.*, 2018) *Se Γ é uma FFPr é invariante por translações, então BGM_Γ é uma pré-agregação (k, \dots, k) -crescente.*

Demonstração. Pela Proposição 4.4, BGM_Γ é estável por translações e assim, pela Proposição 4.7, é uma pré-agregação (k, \dots, k) -crescente. \square

Exemplo 4.8. Seja Γ a família de funções definidas por:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x_1 = \dots = x_n \\ \frac{x_{(1)} - x_i}{\sum_{j=1}^n (x_{(1)} - x_j)}, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $x_{(1)} = \max(x_1, \dots, x_n)$. Não é difícil ver que para todo $\lambda \in [-1, 1]$, escolhido de forma que $(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \in [0, 1]^n$, tem-se:

$$f_i(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Assim, GM_Γ é (k, \dots, k) -crescente.

Na verdade, a condição de Γ ser uma FFPr invariante por translações, exigida no Corolário 4.2 é muito forte e pode ser substituída por $f_i(x_1, \dots, x_n) \leq f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_i + \lambda)$, conforme mostra o resultado que segue abaixo.

Proposição 4.8. (FARIAS et al., 2018) Se Γ is a FFPr tal que $f_i(x_1, \dots, x_n) \leq f_i(x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, para todo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ tais que $(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, \dots, x_n + \lambda) \in [0, 1]^n$, então BGM_Γ é uma pré-agregação (k, \dots, k) -crescente.

Demonstração. Dados $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, $t \in [0, 1]$ e $k > 0$ nas condições exigidas, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{BGM}_\Gamma(x_1 + tk, \dots, x_n + tk) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_1 + tk, \dots, x_n + tk) \cdot (x_i + tk) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f_i(x_1 + tk, \dots, x_n + tk) \cdot tk \\ &\geq \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_i + tk \\ &\geq \text{BGM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

\square

Exemplo 4.9. Para cada $\alpha > 0$, seja Γ cujas funções são definidas por

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x_1 = \dots = x_n \\ \frac{x_{(1)} - x_i}{\sum_{j=1}^n (x_{(1)} - x_j)^\alpha}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f_i(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, \dots, x_n + \lambda).$$

Portanto, BGM_Γ é (k, \dots, k) -crescente.

Um critério análogo ao da Proposição 4.7 pode ser estabelecido para qualquer direção \vec{r} , conforme abaixo:

Proposição 4.9. (FARIAS et al., 2018) Se Γ é uma FFP cujas funções são constantes na direção do vetor

$\vec{r} = (r_1, \dots, r_n) \in [0, 1]^n$, $\vec{r} \neq \emptyset$. Então GM_Γ é uma pré-agregação \vec{r} -crescente.

Demonstração. Análogo a demonstração da Proposição 4.7. □

Corolário 4.4. (FARIAS et al., 2018) Se Γ é uma FFPr tal que existe uma direção \vec{r} ($\vec{r} \neq \emptyset$) com $\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}(\mathbf{x}) \geq 0$ para todos $f_i \in \Gamma$ e $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, então BGM_Γ é uma pré-agregação \vec{r} -crescente.

Ressalta-se que essa condição não pode ser satisfeita quando $\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = 1$, para todos $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, a menos que as funções f_i sejam constantes na direção do vetor \vec{r} , pois

$$\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = 1 \implies \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \vec{r}} = 0$$

Logo,

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \vec{r}} \geq 0 \implies \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \vec{r}} = 0$$

Exemplo 4.10. Obviamente, se $f_i = w_i$ é constante, então BGM_Γ é \vec{r} -crescente para qualquer direção $\vec{r} \neq \emptyset$. Agora, dada qualquer direção $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n) \in [0, 1]^n$ pode-se construir uma

função BGM \vec{r} -crescente, definida por:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } r_i = 0 \\ \frac{\min\left\{\frac{x_i}{r_i}, 1\right\}}{n}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4.3 Funções H_Θ

Uma importante classe de funções GM, construída à partir de funções $\Theta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, foi introduzida em (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2016), conforme apresentado na Definição 4.5. Essas funções serão utilizadas no Capítulo 6 desta tese, onde serão apresentadas duas aplicações para elas.

Definição 4.5. Dada qualquer função $\theta : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ pode-se construir uma FFP Γ escrevendo-se

$$f_i^\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } \mathbf{x} = (x, \dots, x) \\ \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - \theta(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - \theta(\mathbf{x})|} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função GM com esta FFP é dada por:

$$\mathbf{H}_\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} x, & \text{se } \mathbf{x} = (x, \dots, x) \\ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{x_i |x_i - \theta(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - \theta(\mathbf{x})|} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As propriedades que essas funções \mathbf{H}_θ satisfazem foram estudadas ainda em (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2016), e sua aplicabilidade foi verificada em (FARIAS et al., 2016b).



Figura 12: Distribuição dos pesos da função \mathbf{H}_{min} para $\mathbf{x} = (0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 1)$.



Figura 13: Distribuição dos pesos da função H_{arit} para $\mathbf{x} = (0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 1)$.

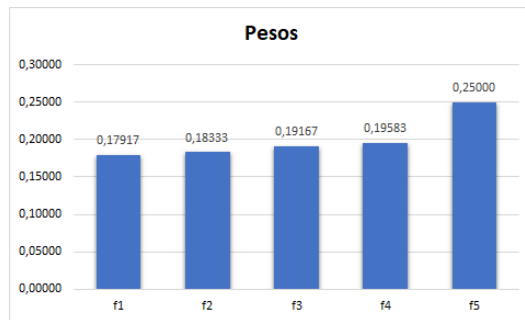


Figura 14: Distribuição dos pesos da função H_{max} para $\mathbf{x} = (0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 1)$.

Escolhendo-se a função $\Theta = med$, tem-se que a função H_{Θ} é a função H introduzida em (FARIAS et al., 2016, 2018). Mais precisamente,

Definição 4.6. Considerando a FFP Γ constituída pelas funções

$$f_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } \mathbf{x} = (x, \dots, x) \\ \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - medi(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - medi(\mathbf{x})|} \right), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3)$$

obtêm-se uma função GM, que foi denotada por H (FARIAS et al., 2016, 2018). O cálculo da saída da função H para uma determinada entrada pode ser realizado usando a seguinte expressão:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} x, & \text{se } \mathbf{x} = (x, \dots, x) \\ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{x_i |x_i - medi(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - medi(\mathbf{x})|} \right), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.4)$$

Exemplo 4.11. No caso $n = 5$, por exemplo, para $\mathbf{x} = (0.1, 0.25, 0.3, 0, 1)$ tem-se

$$f_1(\mathbf{x}) = 0.1875, f_2(\mathbf{x}) = 0.3125, f_3(\mathbf{x}) = 0.3125 \text{ e } f_4(\mathbf{x}) = 0.1875$$

e

$$H(\mathbf{x}) = 0.20938.$$

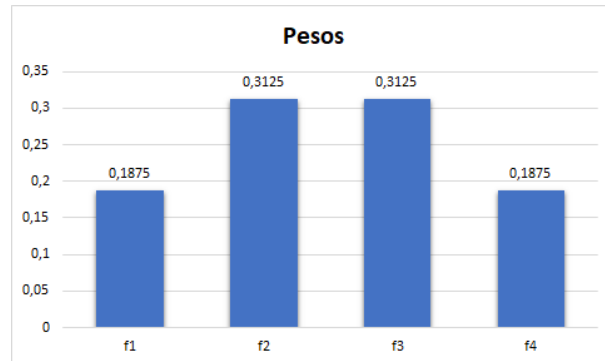


Figura 15: Distribuição dos pesos da função H para $\mathbf{x} = (0.1, 0.25, 0.3, 0, 1)$.

É interessante notar que os maiores pesos ocorrem quando a respectiva coordenada está “próxima” do valor da mediana. Além disso, quando uma coordenadas do vetor de entrada se distancia do valor da mediana, o peso desta respectiva coordenada se aproxima de zero, como mostra a Figura 16.

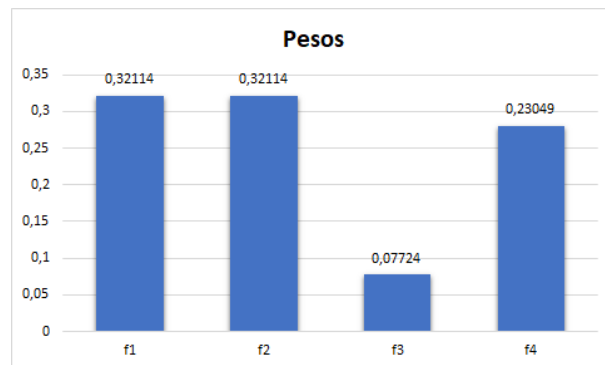


Figura 16: Distribuição dos pesos da função H para $\mathbf{x} = (0.33, 0.30, 0, 0.25)$.

Observa-se que quando fixa-se um vetor de pesos, por exemplo,

$$\mathbf{w} = (0.1875, 0.3125, 0.3125, 0.1875) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), f_4(\mathbf{x})),$$

então,

$$H(0.1, 0.25, 0.3, 0, 1) = 0.20938 = \text{OWA}_{\mathbf{w}}(0.1, 0.25, 0.3, 0, 1)$$

Em outras palavras, a função \mathbf{H} pode ser vista como uma função que transforma cada entrada \mathbf{x} na saída de uma função OWA. Mais precisamente,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \text{OWA}_{(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), f_4(\mathbf{x}))}(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

Não é difícil provar a igualdade acima para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$. Ademais, a função \mathbf{H} satisfaz uma série de propriedades que são muito requisitadas em muitos campos de aplicações. Por esse motivo, a próxima seção é dedicada à discussão dessas especificidades.

4.3.1 Propriedades da função \mathbf{H}

Nesta parte do trabalho será apresentado um estudo sobre as propriedades do operador \mathbf{H} , que já é *idempotente* pela Proposição 4.3.

Proposição 4.10. (FARIAS et al., 2016) *A FFP definida na equação 4.3 é constante por translações.*

Demonstração. Seja $\mathbf{x}' = (x_1 + \lambda, \dots, x_n + \lambda)$. Então, como $\text{medi}(\mathbf{x}') = \text{medi}(\mathbf{x}) + \lambda$ tem-se que, para qualquer $\mathbf{x} \neq (x, \dots, x)$:

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}') &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i + \lambda - \text{medi}(\mathbf{x}')|}{\sum_{j=1}^n |x_j + \lambda - \text{medi}(\mathbf{x}')|} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i + \lambda - (\text{medi}(\mathbf{x}) + \lambda)|}{\sum_{j=1}^n |x_j + \lambda - (\text{medi}(\mathbf{x}) + \lambda)|} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - \text{medi}(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - \text{medi}(\mathbf{x})|} \right) \\ &= f_i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Portanto, $(f_1(\mathbf{x}'), \dots, f_n(\mathbf{x}')) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. O caso $\mathbf{x} = (x, \dots, x)$ é imediato.

□

Corolário 4.5. (FARIAS et al., 2016) *\mathbf{H} é estável por translações.*

Corolário 4.6. (FARIAS et al., 2016) *\mathbf{H} é uma pré-agregação (k, \dots, k) -crescente.*

Proposição 4.11. (FARIAS et al., 2016) A FFP Γ definida na equação 4.3 é tal que:

$$f_i(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n),$$

para cada $f_i \in \Gamma$, $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Demonstração. Escrevendo $\mathbf{x}'' = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ e notando que $\text{medi}(\mathbf{x}'') = \lambda \text{medi}(\mathbf{x})$, então para qualquer $\mathbf{x} \neq (x, \dots, x)$ tem-se

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}'') &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|\lambda x_i - \text{medi}(\mathbf{x}'')|}{\sum_{j=1}^n |\lambda x_j - \text{medi}(\mathbf{x}'')|} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|\lambda x_i - \lambda \text{medi}(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |\lambda x_j - \lambda \text{medi}(\mathbf{x})|} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{\lambda \cdot |x_i - \text{medi}(\mathbf{x})|}{\lambda \cdot \sum_{j=1}^n |x_j - \text{medi}(\mathbf{x})|} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - \text{medi}(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - \text{medi}(\mathbf{x})|} \right) \\ &= f_i(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Portanto, $(f_1(\mathbf{x}''), \dots, f_n(\mathbf{x}'')) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$. O caso em que $\mathbf{x} = (x, \dots, x)$ é imediato. \square

Corolário 4.7. (FARIAS et al., 2016) \mathbf{H} é homogênea de ordem 1.

Além da idempotência, homogeneidade e estabilidade por translações, \mathbf{H} satisfaz as seguintes propriedades adicionais.

Proposição 4.12. (FARIAS et al., 2016) \mathbf{H} não possui elemento neutro.

Demonstração. Se \mathbf{H} possui um elemento neutro $e \in [0, 1]$, então para $\mathbf{x} = (e, \dots, e, x, e, \dots, e)$, observa-se os seguintes casos:

Caso 1: $n = 2$. Como $\text{medi}(\mathbf{x}) = \frac{x+e}{2}$, onde $\mathbf{x} = (x, e)$ ou $\mathbf{x} = (e, x)$, observando-se que:

$$f_1(x, e) = \frac{1}{2-1} \left(1 - \frac{|x - \frac{x+e}{2}|}{|x - \frac{x+e}{2}| + |e - \frac{x+e}{2}|} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\frac{|x-e|}{2}}{\frac{|x-e|}{2} + \frac{|e-x|}{2}} \\
&= 1 - \frac{\frac{|x-e|}{2}}{\frac{|x-e|}{2} + \frac{|x-e|}{2}} \\
&= 1 - \frac{\frac{|x-e|}{2}}{|x-e|} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= 0.5
\end{aligned}$$

De modo análogo, $f_2(x, e) = 0.5$ e $f_1(e, x) = f_2(e, x) = 0.5$. Logo, escolhendo $x \neq e$, obtêm-se $\mathbf{H}(x, e) = 0.5 \cdot x + 0.5 \cdot \dots \cdot e \neq x$.

Caso 2: $n \geq 3$ tem-se $\text{medi}(\mathbf{x}) = e$ e portanto,

$$\begin{aligned}
f_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - \text{medi}(\mathbf{x})|}{\sum_{j=1}^n |x_j - \text{medi}(\mathbf{x})|} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - e|}{\sum_{j=1}^n |x_j - e|} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{|x_i - e|}{|x - e|} \right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$f_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{se } x_i = e \\ 0, & \text{se } x_i = x \end{cases}, \text{ para } n \geq 3$$

Logo,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (n-1) \cdot \frac{e}{n-1} = e$$

Isso é um absurdo, pois deverá se ter $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = x = (e, \dots, e, x, e, \dots, e)$ e x pode ser escolhido diferente de e .

□

Proposição 4.13. (FARIAS et al., 2016) \mathbf{H} não possui elemento de absorção.

Demonstração. Para $n = 2$, tem-se $\mathbf{H}(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$, que não possui elementos de absorção. Agora, para $n \geq 3$ tem-se, por exemplo, para $\mathbf{x} = (a, 0, \dots, 0)$ que $\text{medi}(\mathbf{x}) = 0$

portanto,

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0 \text{ e } f_i = \frac{1}{n-1}, \forall i = 2, \dots, n.$$

Logo,

$$\mathbf{H}(a, 0, \dots, 0) = 0 \cdot a + \frac{1}{n-1} \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n-1} \cdot 0 = 0 \implies a = 0,$$

mas para $\mathbf{x} = (a, 1, \dots, 1)$ tem-se $\text{medi}(\mathbf{x}) = 1$. Além disso,

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1-a}{1} - a\right) = 0$$

e

$$f_i = \frac{1}{n-1} \text{ para } i = 2, 3, \dots, n.$$

Portanto,

$$\mathbf{H}(a, 1, \dots, 1) = 0 \cdot a + \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{n-1} \cdot 1 = 1 \implies a = 1.$$

Isso é prova que \mathbf{H} não possui elementos de absorção. □

Proposição 4.14. (FARIAS et al., 2016) \mathbf{H} não possui divisores de zero.

Demonstração. Seja $a \in (0, 1)$ e considere $\mathbf{x} = (a, x_2, \dots, x_n) \in]0, 1]^n$. Para que se obtenha $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \cdot x_i = 0$ deve-se ter $f_i(\mathbf{x}) \cdot x_i = 0$, para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$, mas como $a \neq 0$, então para cada $i = 1, 2, \dots, n$, resta apenas a possibilidade de ter-se

$$f_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Isto é um absurdo, pois $f_i(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) = 1$. Portanto, \mathbf{H} não possui divisores de zero. □

Proposição 4.15. (FARIAS et al., 2016) \mathbf{H} não possui divisores de um.

Demonstração. Basta ver que se $a \in (0, 1)$, então $\mathbf{H}(a, 0, \dots, 0) = f_1(\mathbf{x}) \cdot a \leq a < 1$. □

Proposição 4.16. (FARIAS et al., 2016) \mathbf{H} é simétrica.

Demonstração. Dada uma permutação $P : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se que $\text{medi}(x_{P(1)}, x_{P(2)}, \dots, x_{P(n)}) = \text{medi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para qualquer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$.

Além disso, $\sum_{i=1}^n |x_{P(i)} - \text{medi}(x_{P(1)}, x_{P(2)}, \dots, x_{P(n)})| = \sum_{i=1}^n |x_i - \text{medi}(\mathbf{x})|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(x_{P(1)}, x_{P(2)}, \dots, x_{P(n)}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_{P(i)} - \frac{x_{P(i)} |x_{P(i)} - \text{medi}(x_{P(1)}, \dots, x_{P(n)})|}{\sum_{j=1}^n |x_{P(j)} - \text{medi}(x_{P(1)}, \dots, x_{P(n)})|} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_{P(i)}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_{P(i)} |x_{P(i)} - \text{medi}(x_1, \dots, x_n)|}{\sum_{j=1}^n |x_{P(j)} - \text{medi}(x_1, \dots, x_n)|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n-1} - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_{P(i)} |x_{P(i)} - \text{medi}(x_1, \dots, x_n)|}{\sum_{j=1}^n |x_i - \text{medi}(x_1, \dots, x_n)|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n-1} - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i |x_i - \text{medi}(x_1, \dots, x_n)|}{\sum_{j=1}^n |x_i - \text{medi}(x_1, \dots, x_n)|} \\
&= \mathbf{H}(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

□

Portanto, a função \mathbf{H} satisfaz as seguintes propriedades:

- Idempotência;
- Homogeneidade;
- Estabilidade por translações;
- Simetria;
- Não possui elementos neutros;
- Não possui elementos de absorção;
- Não possui divisores de zero;
- Não possui divisores de um;
- É uma pré-agregação (k, \dots, k) -crescente.

4.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi ampliada a discussão sobre as **funções mistura generaliza** - GM, introduzidas em (PEREIRA; PASI, 1999), que como foi visto, generalizam as funções OWA de Yager, as funções mistura e as integrais discretas de Choquet. Além disso, foi proposta uma nova classe de funções: as **funções mistura generalizada limitada**- BGM, que estendem a noção de função GM.

Ressalta-se que essas três classes de funções são uma espécie de média ponderada, cujos pesos são estáticos, no caso das OWA de Yager, e dinâmicos, para as GM e BGM. Além disso, OWA's são monotônicas, e portanto agregações, já as GM e BGM podem não ser monotônicas, como foi demonstrado neste capítulo. Outrossim, também comprovou-se alguns critérios para monotonicidade direcional das funções GM e BGM e apresentou-se uma família de funções mistura generalizada, H_θ , em que $\theta : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$.

No próximo capítulo, propõe-se uma nova generalização de OWA, que serão denominadas de **OWA dinâmicas** ou DYOWA e, assim como as \mathcal{LMOWA} possuem domínios em reticulados limitados e assim como as GM e BGM, essas novas funções são médias ponderadas com pesos dinâmicos.

5 Funções Mistura para Reticulados Limitados

No Capítulo 3 foi mencionado que os conceitos de agregações, t-normas, t-conormas e OWAs (que foram estudadas no Capítulo 2 como aplicações de $[0, 1]^n$ em $[0, 1]$) podem ser ampliados para funções reticulares, ou seja, funções de L^n em L , onde L é um reticulado limitado. Neste Capítulo serão introduzidas algumas classes de funções reticulares de mistura, isto é, médias ponderadas com pesos dinâmicos.

5.1 Funções DYOWA

Como já foi discutido nos Capítulos anteriores desta tese, as funções OWA de Yager e as \mathcal{LMO} são médias ponderadas com pesos estáticos associados à magnitude de cada entrada. A substituição dos pesos estáticos por pesos dinâmicos fez com que as OWAs originassem as funções mistura generalizada e mistura generalizada limitada. Nesses sentido, pode-se aplicar essa mesma ideia para as \mathcal{LMO} e obter-se uma nova classe de funções denominadas de **OWAs dinâmicas** ou simplesmente DYOWA (do inglês *Dynamic OWA*). Para isso, se faz necessário caracterizar pesos dessas novas funções.

Definição 5.1 (Famílias de funções pesos). *Seja $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$ um reticulado limitado equipado com uma t-norma $\otimes : L^2 \rightarrow L$ e uma t-conorma estendida $\oplus : L^n \rightarrow L$. Uma família finita de funções $\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$ é chamada de **família de funções de pesos (FFP)** quando para cada $\tilde{\mathbf{a}} \in L^n$, o vetor $(f_1(\tilde{\mathbf{a}}), \dots, f_n(\tilde{\mathbf{a}}))$ é um vetor de pesos em $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$.*

Se além disso, para todo $c \in L$, tem-se que:

$$c \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^n f_i(\tilde{\mathbf{a}}) \right) = \bigoplus_{i=1}^n (c \otimes f_i(\tilde{\mathbf{a}}))$$

f então chama-se Γ de uma **família distributiva de funções de pesos (dFFP)**.

Observação 5.1. Como $\bigoplus_{i=1}^n f_i(\tilde{\mathbf{a}}) = \top_L$ tem-se também que, $c = c \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^n f_i(\tilde{\mathbf{a}}) \right)$.

Exemplo 5.1. Seja L um reticulado completo, $\oplus = \wedge$ e $\otimes = \vee$. Então, uma FFP

$\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$ deve satisfazer

$$\bigvee_{i=1}^n f_i(\tilde{\mathbf{a}}) = \top_L.$$

Em particular, definido-se $f_1(\tilde{\mathbf{a}}) = \top_L$ e $f_k(\tilde{\mathbf{a}}) = \perp_L$, para $k \in \mathcal{N}$ e $\tilde{\mathbf{a}} \in L^n$, então

$\Gamma_1 = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma FFP. Além disso,

$$c \wedge \left(\bigvee_{i=1}^n f_i(\tilde{\mathbf{a}}) \right) = c \wedge \top_L = c = c \vee \perp_L = \bigvee_{i=1}^n (c \wedge f_i(\tilde{\mathbf{a}})),$$

ou seja, Γ é uma dFFP. De modo análogo, se $i \in \mathcal{N}$, então $g_i(\tilde{\mathbf{a}}) = \top_L$ e $g_k(\tilde{\mathbf{a}}) = \perp_L$ para $k \in \mathcal{N} - \{i\}$, então $\Gamma_i = \{g_1, \dots, g_n\}$ também é uma dFFP.

Exemplo 5.2. Seja $L = [0, 1]$, $\otimes = T_P$ e $\oplus = S_{LK}$. Uma dFFP

$\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$ deve satisfazer a seguinte igualdade:

$$f_1(\tilde{\mathbf{x}}) + \dots + f_n(\tilde{\mathbf{x}}) = 1,$$

e também

$$c = \min(c \cdot f_1(\tilde{\mathbf{x}}) + \dots + c \cdot f_n(\tilde{\mathbf{x}}), 1)$$

para todo $c \in [0, 1]$ e cada $\tilde{\mathbf{x}} \in [0, 1]^n$. Assim, definindo-se

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } x_1 = \dots = x_n \\ \frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tem-se que $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP.

Exemplo 5.3. Seja $L = \langle \mathbb{I}[0, 1], \leq_{KM} \rangle$, onde $\mathbb{I}[0, 1] = \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ e \leq_{KM} é a ordem de Kulisch-Miranker (KULISCH; MIRANKER, 1981), i.e.,

$[a, b] \leq_{KM} [c, d] \iff a \leq c \text{ and } b \leq d$. Sejam também, $[a, b] \otimes [c, d] = [T_P(a, c), T_P(b, d)]$ e $[a, b] \oplus [c, d] = [S_{LK}(a, c), S_{LK}(b, d)]$ uma t -norma e um t -conorma em L , respectivamente (Ver (BEDREGAL; TAKAHASHI, 2006)). É de fácil verificação que uma família finita de funções Γ formada por $f_i : \mathbb{I}[0, 1]^n \rightarrow \mathbb{I}[0, 1]^n$, onde $f_i(I_1 \cdots, I_n) = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ (funções constantes) fornecem uma $dFFP$.

Agora que a noção de peso dinâmico em um reticulado foi definido, e apresentou-se alguns exemplos, pode-se estabelecer essa nova generalização de OWA, conforme pode ser visto abaixo:

Definição 5.2. Dado um reticulado limitado L , uma t -norma \otimes , uma t -conorma \oplus e uma $dFFP$ $\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$, denomina-se **OWA dinâmica (DYOWA)** associada à $dFFP$ Γ , a função $DYOWA_\Gamma : L^n \rightarrow L$ definida por:

$$DYOWA_\Gamma(\tilde{\mathbf{a}}) = \bigoplus_{i=1}^n (f_i(\tilde{\mathbf{a}}) \otimes b_i),$$

onde $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{LM}(a_1, \dots, a_n)$.

Exemplo 5.4. Sejam $\oplus, \otimes, \Gamma_i$ definidos no Exemplo 5.1, então $DYOWA_{\Gamma_i}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} DYOWA_{\Gamma_i}(\tilde{\mathbf{a}}) &= \bigvee_{j=1}^n (f_j(\tilde{\mathbf{a}}) \wedge b_j) \\ &= (\perp_L \wedge b_1) \vee \dots \vee (\top_L \wedge b_i) \vee \dots \vee (\perp_L \wedge b_n) \\ &= \perp_L \vee \dots \vee b_i \vee \dots \vee \perp_L \\ &= b_i \end{aligned}$$

Em particular, $DYOWA_{\Gamma_1}(\tilde{\mathbf{a}}) = b_1 = \bigvee_{j=1}^n a_j$ e $DYOWA_{\Gamma_n}(\tilde{\mathbf{a}}) = b_n = \bigwedge_{j=1}^n a_j$.

Exemplo 5.5. Se \oplus, \otimes e Γ são como definidos no Exemplo 5.2, então:

$$DYOWA_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j}.$$

Além disso, $DYOWA_\Gamma$ é idempotente, simétrica, mas não possui elemento neutro, nem divisó-

res de zero e de um, além de não ser homogênea e associativa. Note-se ainda que quando $n = 3$, então esta função *DYOWA* não é monotônica, pois $DYOWA(0.5, 0.2, 0.1) = 0.375$ e $DYOWA(0.5, 0.22, 0.2) = 0.368$.

Exemplo 5.6. Para $L = \langle \mathbb{I}[0, 1], \leq_{KM} \rangle$, \oplus , \otimes e Γ definida no Exemplo 5.3, é bastante difícil apresentar uma fórmula para calcular os valores de saída de $DYOWA_\Gamma$ para qualquer dimensão n . No entanto, para $n = 2$ isto não é tão difícil, bastando observar que para $[\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{I}[0, 1]$ tem-se:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \wedge_{KM} [\underline{y}, \bar{y}] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})]$$

e

$$[\underline{x}, \bar{x}] \vee_{KM} [\underline{y}, \bar{y}] = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

Assim, para todos $([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) \in \mathbb{I}[0, 1]^2$, obtêm-se o vetor totalmente ordenado $([\underline{b}_1, \bar{b}_1], [\underline{b}_2, \bar{b}_2])$ como:

$$[\underline{b}_1, \bar{b}_1] = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

e

$$[\underline{b}_2, \bar{b}_2] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} DYOWA_\Gamma([\underline{x}, \bar{x}], [\underline{y}, \bar{y}]) &= \left[\min\left(\frac{\max(\underline{x}, \underline{y}) + \min(\underline{x}, \underline{y})}{2}, 1\right), \min\left(\frac{\max(\bar{x}, \bar{y}) + \min(\bar{x}, \bar{y})}{2}, 1\right) \right] \\ &= \left[\min\left(\frac{\underline{x} + \underline{y}}{2}, 1\right), \min\left(\frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, 1\right) \right] \\ &= \left[\frac{\underline{x} + \underline{y}}{2}, \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right] \end{aligned}$$

Exemplo 5.7. Sejam $X = \{a, b, c, d\}$, \leq_0 , $\oplus = \vee$ e $\otimes = \wedge$, conforme Exemplo 3.30. Definindo-se

$$f_1(x, y, z) = \begin{cases} d, & \text{se } x = x \vee y \vee z \\ x, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_1(x, y, z) = \begin{cases} d, & \text{se } y = x \vee y \vee z \\ y, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} d, & \text{se } z = x \vee y \vee z \\ z, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obtêm-se que $\Gamma = \{f_1, f_2, f_3\}$ é um dFFP e:

- $\mathcal{LM}(a, b, a) = (b, a, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = a$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}(a, b, a) = (a \wedge b) \vee (d \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$

- $\mathcal{LM}(a, b, b) = (b, b, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = d$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}(a, b, b) = (a \wedge b) \vee (d \wedge b) \vee (d \wedge a) = b$$

- $\mathcal{LM}(a, b, c) = (d, a, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = b$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}(a, b, c) = (a \wedge d) \vee (b \wedge a) \vee (c \wedge a) = a$$

- $\mathcal{LM}(b, c, c) = (d, c, a)$, $f_1(a, b, a) = b$, $f_2(a, b, a) = c$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}(a, b, c) = (b \wedge d) \vee (c \wedge c) \vee (c \wedge a) = d$$

5.1.1 Propriedades das funções DYOWA

No Exemplo 5.5 foi apresentada uma função DYOWA que não é monotônica. Dessa forma, não é possível caracterizar as DYOWA como agregações. Entretanto, pode-se provar que essas funções satisfazem uma série de outras propriedades, por exemplo, toda função DYOWA satisfaz as condições de fronteira, conforme abaixo

Proposição 5.1. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) Dados $\langle L, \oplus, \otimes \rangle$ e uma dFFP $\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$, então $DYOWA_{\Gamma}$ satisfaz $DYOWA_{\Gamma}(\perp_L, \dots, \perp_L) = \perp_L$ e $DYOWA_{\Gamma}(\top_L, \dots, \top_L) = \top_L$.

Demonstração. Por definição, tem-se que

$$\text{DYOWA}_\Gamma(\perp_L, \dots, \perp_L) = \bigoplus_{i=1}^n (f_i(\perp_L, \dots, \perp_L) \otimes b_i)$$

e $b_i = \perp_L$ para qualquer $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, pelo item (iv) da Proposição 3.6, observa-se que $a \otimes \perp_L = \perp_L$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{DYOWA}_\Gamma(\perp_L, \dots, \perp_L) &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(\perp_L, \dots, \perp_L) \otimes \perp_L) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \perp_L = \perp_L \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{DYOWA}_\Gamma(\top_L, \dots, \top_L) &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(\top_L, \dots, \top_L) \otimes b_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(\top_L, \dots, \top_L) \otimes \top_L) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n f_i(\top_L, \dots, \top_L) = \top_L \end{aligned}$$

□

Corolário 5.1. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) *Uma função DYOWA é uma agregação se, e somente se, for monotônica.*

Demonstração. Segue da Proposição 5.1. □

Exemplo 5.8. *As funções DYOWA_{Γ_i} definidas no Exemplo 5.4 e 5.6 são monotônicas e portanto são agregações. Já a função DYOWA do Exemplo 5.5 não é monotônica e portanto não é agregação.*

No próximo resultado serão apresentadas alguns requisitos para que uma função DYOWA alcance certas propriedades.

Proposição 5.2. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) *Dados $\langle L, \bigoplus, \otimes \rangle$ e uma dFFP Γ , então DYOWA_Γ é uma função idempotente. Além disso:*

(i) Se cada uma das funções em Γ é simétrica, então $DYOWA_\Gamma$ também é uma função simétrica;

(ii) $DYOWA_\Gamma$ não possui divisores de zero nem de um.

Demonstração.

Idempotência: Se Γ é uma dFFP, então para qualquer $a \in L$ tem-se

$$\begin{aligned} DYOWA_\Gamma(a, a, \dots, a) &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(a, a, \dots, a) \otimes a) \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^n f_i(a, a, \dots, a) \right) \otimes a \\ &= a \end{aligned}$$

Simetria: De acordo com o item (v) da Proposição 3.6, para qualquer permutação $\sigma : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, tem-se que $\mathcal{LM}(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) = \mathcal{LM}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$.

Portanto,

$$\begin{aligned} DYOWA_\Gamma(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) \otimes b_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(a_1, \dots, a_n) \otimes b_i) \\ &= DYOWA_\Gamma(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Divisores de zero: Basta notar que como $DYOWA_\Gamma$ s são idempotentes, então $DYOWA_\Gamma(a, \dots, a) = a$. Assim, $DYOWA_\Gamma$ não pode possuir divisores de zero, já que um divisor de zero é um $a \in L$ tal que $DYOWA_\Gamma(a, \dots, a) = \perp_L$

Divisores de um: Analogamente, se $DYOWA_\Gamma$ possuir algum divisor de um, $a \neq \top_L$, então $DYOWA_\Gamma(a, a, \dots, a) = \top_L$, mas $DYOWA_\Gamma(a, \dots, a) = a \neq \top_L$. Logo, $DYOWA_\Gamma$ não possui divisores de um.

□

Proposição 5.3. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) Se L é um reticulado limitado, \otimes é uma t -norma, \oplus é uma t -conorma e Γ é uma dFFP, então $DYOWA_\Gamma$ é uma função do tipo média, ou

seja:

$$\bigwedge_{i=1}^n a_i \leq \text{DYOWA}_{\Gamma}(a_1, \dots, a_n) \leq \bigvee_{i=1}^n a_i, \text{ para todo } (a_1, \dots, a_n) \in L^n$$

Demonstração. Como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tem-se que:

$$b_n = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \leq a_i \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = b_1,$$

e t-normas / t-conormas são funções monotônicas, então

$$\begin{aligned} b_n &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(a_1, \dots, a_n) \otimes b_n) \\ &\leq \bigoplus_{i=1}^n (f_i(a_1, \dots, a_n) \otimes b_i) \\ &\leq \bigoplus_{i=1}^n (f_i(a_1, \dots, a_n) \otimes b_1) = b_1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bigwedge_{i=1}^n a_i \leq \text{DYOWA}_{\Gamma}(a_1, a_1, \dots, a_n) \leq \bigvee_{i=1}^n a_i$$

□

No próximo teorema demonstra-se que as funções DYOWA são uma forma mais geral de \mathcal{LMOWA} .

Teorema 5.1. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) *Seja $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n)$ um vetor distributivo de pesos em $\langle L, \bigoplus, \otimes \rangle$ e $\mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}$ a função OWA de Lizasoain-Moreno. Então, existe uma dFFP $\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$ tal que para cada $\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_n) \in L^n$ tem-se $\text{DYOWA}_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{a}}) = \mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(\tilde{\mathbf{a}})$, ou seja, funções as DYOWA generalizam as funções \mathcal{LMOWA} .*

Demonstração. Basta definir as funções constantes $f_i(\tilde{\mathbf{a}}) = w_i$ e observar que:

$$\begin{aligned} \text{DYOWA}_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{a}}) &= \bigoplus_{i=1}^n (f_i(\tilde{\mathbf{a}}) \otimes b_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (w_i \otimes b_i) \\ &= \mathcal{LMOWA}_{\tilde{w}}(\tilde{\mathbf{a}}) \end{aligned}$$

Ademais, como \tilde{w} é um vetor distributivo de pesos, tem-se que Γ é uma dFFP. \square

Corolário 5.2. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) *Toda função OWA de Yager é uma função DYOWA.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3, as funções OWA de Yager são um caso particular de \mathcal{LM} OWA. Portanto, pelo Teorema 5.2, segue-se que as funções OWA de Yager também são funções DYOWA. \square

Teorema 5.2. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) *Toda função GM também é uma função DYOWA.*

Demonstração. De forma análoga à prova do Teorema 3.3, considere-se $L = [0, 1]$, $\otimes = T_P$ e $\oplus = S_{LK}$. Assim, se $\Gamma = \{f_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1] : 1 \leq i \leq n\}$, basta definir $g_i(x_1, \dots, x_n) = f_{(i)}(x_1, \dots, x_n)$, em que $(\cdot) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ é a permutação tal que $\mathcal{LM}(x_1, \dots, x_n) = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Assim, não é de difícil verificação que $\Gamma' = \{g_1, \dots, g_n\}$ é uma dFFP. Além disso,

$$\begin{aligned} \text{DYOWA}_{\Gamma'}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n f_{(i)}(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot x_n \\ &= \text{GM}_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

\square

Corolário 5.3. (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018a) *As funções DYOWA também generalizam as noções de integral discreta de Choquet e função mistura*

Demonstração. Seguem dos Teoremas 4.1 e 4.2 \square

Tando DYOWA's quanto \mathcal{LM} OWAs, necessitam de uma ordenação do vetor de entradas $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$. No entanto, esse processo de ordenação é realizado de forma indireta, pois

precisa-se utilizar a função \mathcal{LM} , que nem sempre devolve, em sua saída, uma permutação das entradas. Para resolver esse problema, pode-se utilizar **ordens lineares admissíveis**.

5.1.2 Funções DYOWA fundamentadas por ordens admissíveis

Dado um reticulado limitado $\langle L, \leq_L \rangle$, se \preceq_L é uma ordem \leq_L -admissível, então pode-se obter uma \preceq_L -ordenação decrescente de qualquer vetor n -dimensional $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$. Dessa forma, pode-se estabelecer novas formulações para as funções DYOWA e também, para as \mathcal{LMOWA} .

Definição 5.3. *Sejam $\langle L, \leq_L \rangle$ um reticulado limitado, \oplus uma t -conorma e \otimes uma t -norma. Se \preceq_L é uma ordem \leq_L -admissível e $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP, então define-se a função $DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L} : L^n \rightarrow L$ por:*

$$DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L}(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)},$$

onde $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}) = \text{sort}_{\preceq_L}(x_1, \dots, x_n)$ é uma \preceq_L -ordenação decrescente do vetor de entradas.

Exemplo 5.9. *Sejam $\langle X = \{a, b, c, d\}, \leq_0, \oplus = \vee, \otimes = \wedge \rangle$, $\Gamma = \{f_1, f_2, f_3\}$ conforme Exemplo 5.7 (\vee e \wedge são correspondentes a ordem \leq_0). Para a ordem \leq_1 tem-se:*

- $\text{sort}_{\leq_1}(a, b, a) = (b, a, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = a$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_1}(a, b, a) = (a \wedge b) \vee (d \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$

- $\text{sort}_{\leq_1}(a, b, b) = (b, b, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = d$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_1}(a, b, b) = (a \wedge b) \vee (d \wedge b) \vee (d \wedge a) = b$$

- $\text{sort}_{\leq_1}(a, b, c) = (c, b, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = b$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_1}(a, b, c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge b) \vee (c \wedge a) = b$$

- $sort_{\leq_1}(b, c, c) = (c, c, b)$, $f_1(a, b, a) = b$, $f_2(a, b, a) = c$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_1}(a, b, c) = (b \wedge c) \vee (c \wedge c) \vee (c \wedge b) = c$$

Já para para a ordem \leq_2 tem-se:

- $sort_{\leq_2}(a, b, a) = (b, a, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = a$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_2}(a, b, a) = (a \wedge b) \vee (d \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$

- $sort_{\leq_2}(a, b, b) = (b, b, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = d$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_2}(a, b, b) = (a \wedge b) \vee (d \wedge b) \vee (d \wedge a) = b$$

- $sort_{\leq_2}(a, b, c) = (b, c, a)$, $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = b$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_2}(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = a$$

- $sort_{\leq_2}(b, c, c) = (b, c, c)$, $f_1(a, b, a) = b$, $f_2(a, b, a) = c$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\leq_2}(a, b, c) = (b \wedge b) \vee (c \wedge c) \vee (c \wedge c) = d$$

Proposição 5.4. Se $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP no reticulado limitado $\langle L, \leq_L, \oplus, \otimes \rangle$, \oplus uma t-conorma e \otimes uma t-norma e \preceq_L uma ordem \leq_L -admissível, então $DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L}$ é um operador idempotente tal que para todo $\mathbf{x} \in L^n$ tem-se

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \leq_L DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L}(\mathbf{x}) \leq_L \bigvee_{i=1}^n x_i$$

Demonstração. Como \otimes é um operador monotônico e $\bigwedge_{i=1}^n x_i \leq_L x_{(i)} \leq_L \bigvee_{i=1}^n x_i$ segue-se que

$$\begin{aligned} DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L}(\mathbf{x}) &= \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)} \\ &\leq_L \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes \bigvee_{i=1}^n x_i = \bigvee_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}(\mathbf{x}) &= \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)} \\ &\geq_L \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes \bigwedge_{i=1}^n x_i = \bigwedge_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

A prova de idempotência é trivial. □

Corolário 5.4. *Nas mesmas condições da Proposição anterior, tem-se que $\text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}(\perp_L, \dots, \perp_L) = \perp_L$, $\text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}(\top_L, \dots, \top_L) = \top_L$ e*

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \preceq_L \text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}(\mathbf{x}) \preceq_L \bigvee_{i=1}^n x_i$$

De modo similar ao Teorema 5.1 e a Proposição 5.1 tem-se os seguintes resultados cujas demonstrações são análogas aos referidos resultados.

Proposição 5.5. *Uma função $\text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}$ é uma $(\preceq_L$ ou \leq_L)-agregação se, e somente se, for $(\preceq_L$ ou \leq_L)-monotônica.*

Proposição 5.6. *Se $\langle L, \leq_L \rangle$ é um reticulado limitado, \oplus é uma t -conorma, \otimes é uma t -norma, Γ é uma $d\text{FFP}$ e \preceq_L é uma ordem linear \leq_L -admissível, então:*

- (i) *Se cada uma das funções em Γ é simétrica, então $\text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}$ também é uma função simétrica;*
- (ii) *$\text{DYOWA}_{\Gamma}^{\preceq_L}$ não possui divisores de zero nem divisores de um.*

5.1.3 Funções de média ponderada ordenada fundamentadas por ordens admissíveis

Funções de média ponderada ordenada para reticulados limitados podem ser estabelecidas apoiadas no conceito de ordem admissível, obtendo-se uma noção mais concisa de OWA para esses domínios.

Definição 5.4. *Seja $\tilde{\mathbf{w}} = (w_1, \dots, w_n) \in L^n$ um vetor distributivo de pesos no reticulado limitado $\langle L, \leq_L, \oplus, \otimes \rangle$ e \preceq_L uma ordem \leq_L -admissível. A função $\text{OWA}_{\tilde{\mathbf{w}}}^{\preceq_L} : L^n \rightarrow L$ associada*

ao vetor \tilde{w} é definida por:

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_L}(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^n w_i \otimes x_{(i)},$$

onde $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}) = \text{sort}_{\leq_L}(x_1, \dots, x_n)$ é uma \leq_L -ordenação decrescente do vetor de entradas.

Exemplo 5.10. Sejam $\langle X = \{a, b, c, d\}, \leq_0, \oplus = \vee, \otimes = \wedge \rangle$ e $\tilde{w} = (a, b, c)$ conforme Exemplo 3.30 (\vee e \wedge são correspondentes a ordem \leq_0). Para a ordem \leq_1 tem-se:

- $\text{sort}_{\leq_1}(a, b, a) = (b, a, a)$ e

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_1}(a, b, a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) \vee (c \wedge a) = a$$

- $\text{sort}_{\leq_1}(a, b, b) = (b, b, a)$ e

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_1}(a, b, b) = (a \wedge b) \vee (b \wedge b) \vee (c \wedge a) = b$$

- $\text{sort}_{\leq_1}(a, b, c) = (c, b, a)$ e

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_1}(a, b, c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge b) \vee (c \wedge a) = d$$

- $\text{sort}_{\leq_1}(b, c, c) = (c, c, b)$ e

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_1}(a, b, c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge b) = a$$

Já para a ordem \leq_2 , tem-se: são correspondentes a ordem \leq_0). Para a ordem \leq_1 tem-se:

- $\text{sort}_{\leq_2}(a, b, a) = (b, a, a)$ e

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_1}(a, b, a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) \vee (c \wedge a) = a$$

- $\text{sort}_{\leq_2}(a, b, b) = (b, b, a)$ e

$$OWA_{\tilde{w}}^{\leq_1}(a, b, b) = (a \wedge b) \vee (b \wedge b) \vee (c \wedge a) = b$$

- $sort_{\leq_2}(a, b, c) = (b, c, a)$ e

$$OWA_{\vec{w}}^{\leq_1}(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = a$$

- $sort_{\leq_2}(b, c, c) = (b, c, c)$ e

$$OWA_{\vec{w}}^{\leq_2}(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge c) = c$$

As funções definidas acima são uma forma ampliada de OWA de Yager (ver Proposição 5.11), que assim como as funções de Yager, apresentam pesos estáticos que são associados às magnitudes (em relação à ordem \preceq_L) de cada uma das entradas. Além disso, elas também são uma forma mais restrita de função DYOWA $^{\preceq_L}$.

Proposição 5.7. *Se $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in L^n$ um vetor distributivo de pesos no reticulado limitado $\langle L, \leq_L, \oplus, \otimes \rangle$ e \preceq_L uma ordem \leq_L -admissível, então $OWA_{\vec{w}}^{\preceq_L}$ é uma função DYOWA $^{\preceq_L}$ em L .*

Demonstração. Definindo-se $\Gamma = \{f_i : L^n \rightarrow L : i = 1, 2, \dots, n\}$ with $f_i(x_1, \dots, x_n) = w_i$ tem-se que Γ é uma dFFP e claramente,

$$DYOWA_{\Gamma}^{\preceq_L}(x_1, \dots, x_n) = OWA_{\vec{w}}^{\preceq_L}(x_1, \dots, x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in L^n$$

□

Corolário 5.5. *Nas condições da Proposição anterior, tem-se que OWA^{\preceq_L} s são idempotentes com $OWA_{\vec{w}}^{\preceq_L}(\perp_L, \dots, \perp_L) = \perp_L$, $OWA_{\vec{w}}^{\preceq_L}(\top_L, \dots, \top_L) = \top_L$ e*

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \leq_L OWA_{\vec{w}}^{\preceq_L}(\mathbf{x}) \preceq_L \bigvee_{i=1}^n x_i$$

Teorema 5.3. *Se $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in L^n$ um vetor distributivo de pesos no reticulado limitado $\langle L, \leq_L, \oplus, \otimes \rangle$ e \preceq_L uma ordem \leq_L -admissível, então $OWA_{\vec{w}}^{\preceq_L}$ é uma \leq_L -agregação.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ pertencentes a L^n com $x_i \leq_L y_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Então, $x_i \preceq_L y_i$ e $x_{(i)} \leq y_{(i)}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, como

\oplus e \otimes são \leq_L -monotônicas tem-se que

$$\text{OWA}_{\vec{w}}^{\leq_L}(\mathbf{x}) = \bigoplus_{i=1}^n w_i \otimes x_{(i)} \leq_L \bigoplus_{i=1}^n w_i \otimes y_{(i)} = \text{OWA}_{\vec{w}}^{\leq_L}(\mathbf{y})$$

□

Proposição 5.8. Considerando-se $L = [0, 1]$, $\leq_L = \preceq_L$ a ordem usual de $[0, 1]$, $\oplus = S_{LK}$ e $\otimes = T_P$, então para todo vetor distributivo de pesos \vec{w} $\text{OWA}_{\vec{w}}^{\leq_L}$ coincide com a função OWA de Yager.

Demonstração. Direto! □

Corolário 5.6. A função OWA de Yager é um caso particular de DYOWA^{\leq_L} .

5.1.4 Funções Reticulares de Mistura Generalizada

Além das noções de DYOWA e OWA pode-se construir funções reticulares de mistura generalizada, que são similares às funções GM do Capítulo 3 e não necessitam de ordens lineares para serem instituídas.

Definição 5.5. Sejam $\langle L, \leq_L \rangle$ um reticulado limitado, \oplus uma t -conorma e \otimes uma t -norma. Se $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP, então a função $\text{LGM}_{\Gamma} : L^n \rightarrow L$ dada por:

$$\text{LGM}_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_i,$$

é chamada de **função reticular de mistura generalizada** em L .

Exemplo 5.11. Sejam $\langle X = \{a, b, c, d\}, \leq_0, \oplus = \vee, \otimes = \wedge \rangle$, $\Gamma = \{f_1, f_2, f_3\}$ conforme Exemplo 5.7 (\vee e \wedge são correspondentes a ordem \leq_0). Então:

- $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = a$. Assim,

$$\text{LGM}_{\Gamma}(a, b, a) = (a \wedge a) \vee (b \wedge b) \vee (a \wedge a) = b$$

- $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = d$ e $f_3(a, b, a) = d$. Assim,

$$\text{LGM}_{\Gamma}(a, b, b) = (a \wedge a) \vee (d \wedge b) \vee (d \wedge b) = b$$

- $f_1(a, b, a) = a$, $f_2(a, b, a) = b$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$\text{LGM}_\Gamma(a, b, c) = (a \wedge a) \vee (b \wedge b) \vee (c \wedge c) = d$$

- $f_1(a, b, a) = b$, $f_2(a, b, a) = c$ e $f_3(a, b, a) = c$. Assim,

$$\text{LGM}_\Gamma(a, b, c) = (b \wedge a) \vee (c \wedge b) \vee (c \wedge c) = d$$

Teorema 5.4. Se $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP no reticulado limitado $\langle L, \leq_L \rangle$, \oplus uma t-conorma e \otimes uma t-norma e \preceq_L uma ordem \leq_L -admissível, então $\text{DYOWA}_\Gamma^{\preceq_L}$ é uma função LGM. Além disso, toda função LGM em L é também uma função DYOWA em L .

Demonstração. Se \preceq_L é uma ordem \leq_L -admissível e $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP, então

$$\text{DYOWA}_\Gamma = \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)}$$

Definindo-se $g_i : L^n \rightarrow L$ por $g_i(x_1, \dots, x_n) = f_{p(i)}(x_1, \dots, x_n)$, onde $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ é o inverso da permutação $q(i) = (i)^1$, então $\Gamma' = \{g_1, \dots, g_n\}$ é uma dFFP pois

$$\bigoplus_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \top_L, \forall (x_1, \dots, x_n) \in L^n$$

e

$$\bigoplus_{i=1}^n [g_i(x_1, \dots, x_n) \otimes c] = \bigoplus_{i=1}^n [f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes c] = \top_L, \forall (x_1, \dots, x_n, c) \in L^{n+1}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{LGM}_\Gamma(x_1, \dots, x_n) &= \bigoplus_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^n f_{p(i)}(x_1, \dots, x_n) \otimes x_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)} \\ &= \text{DYOWA}_\Gamma^{\preceq_L}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma dFFP, basta escolher qualquer ordem \leq_L -admissível,

¹Isto é, $x_{q(1)} \preceq_L x_{q(2)} \preceq_L \dots \preceq_L x_{q(n)}$

e então definir $g_i = f_{(i)}$ para ter-se

$$\begin{aligned}
 \text{DYOWA}_{\Gamma}^{\leq L}(x_1, \dots, x_n) &= \bigoplus_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)} \\
 &= \bigoplus_{i=1}^n f_{(i)}(x_1, \dots, x_n) \otimes x_{(i)} \\
 &= \bigoplus_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \otimes x_i \\
 &= \text{LGM}_{\Gamma}(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

□

Corolário 5.7. *Nas condições da Proposição anterior, tem-se que que*
 $\text{LGM}_{\Gamma}(\perp_L, \dots, \perp_L) = \perp_L$, $\text{LGM}_{\Gamma}(\top_L, \dots, \top_L) = \top_L$ e

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \leq_L \text{LGM}_{\Gamma}(\mathbf{x}) \leq_L \bigvee_{i=1}^n x_i$$

Corolário 5.8. *Toda função $\text{OWA}^{\leq L}$ é também uma função LGM.*

Corolário 5.9. *Toda OWA de Yager é também uma função LGM.*

Corolário 5.10. *Integrais de Choquet são funções LGM*

Além disso, tem-se que toda função mistura generalizada é também uma função reticular de mistura generalizada, conforme a seguinte Proposição:

Proposição 5.9. *Se $\Gamma = \{f_1, \dots, f_n\}$ é uma FFP, então GM_{Γ} é uma função LGM.*

Demonstração. Basta observar que $[0, 1]$ é um reticulado limitado, cuja ordem é total, considerar $\oplus = S_{LK}$, $\otimes = T_P$ e notar que Γ é uma dPPF em $\langle [0, 1], \leq, \oplus, \otimes \rangle$. □

5.2 Considerações Finais

Este capítulo discorreu sobre funções de média ponderada em reticulados limitados. Inicialmente foi introduzida uma classe de funções, denominadas OWAs dinâmicas ou DYOWA, que generalizam a noção de \mathcal{LMOWA} , que por sua vez são expansão do conceito de OWA

introduzido Yager (YAGER, 1988). Deve-se reforçar que as funções OWA e \mathcal{LMOWA} são médias ponderadas cujos pesos estáticos são associados às magnitudes de cada entrada, já as DYOWA também são médias ponderadas com pesos combinados às grandezas das entradas, mas com pesos dinâmicos. No decorrer deste capítulo foi demonstrado que as funções DYOWA são funções do tipo média que generalizam as funções mistura generalizada, apresentadas no Capítulo 4.

As funções DYOWA, assim como as \mathcal{LMOWA} , possuem uma limitação: necessitam de uma ordenação das entradas, que é realizada por meio da função de Lizasoain-Moreno, que nem sempre resulta numa simples permutação das entradas, como ocorre em OWA. Nesse sentido, buscou-se romper essa limitação através do uso das ordens admissíveis. Fundamentando-se das ordens lineares admissíveis, foi possível redefinir as funções \mathcal{LMOWA} e DYOWA, obtendo-se duas novas classes de funções, denotadas por OWA^{\preceq_L} e $DYOWA^{\preceq_L}$, em que \preceq_L representa uma ordem linear \leq_L admissível no reticulado $\langle L, \leq_L \rangle$. Com isso, as ordenações necessárias para se definir essas funções passaram a ser feitas de modo efetivo, ou seja, dada uma entrada $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$, o procedimento de ordenação dessa entrada resulta numa permuta dos valores a_i , assim como ocorre em OWA. Isso possibilita que os resultados obtidos após a avaliação da função não estejam codificados, como no caso das \mathcal{LMOWA} .

Por fim, definiu-se a noção de função reticular de mistura (LGM), a qual ficou demonstrado ser equivalente ao conceito de $DYOWA^{\preceq_L}$. Além disso, também foi provado que as funções reticulares de mistura são uma ampliação dos conceitos de OWA^{\preceq_L} , OWA, integrais de Choquet e GM.

Para finalizar este trabalho, apresenta-se, no próximo capítulo, duas aplicações para as funções mistura generalizada: um método de redução de imagens que e um método de combinação de algoritmos em comitês classificadores, que utiliza as funções GM.

6 Aplicações

Como já foi mencionado no Capítulo 2, as funções de agregação e de pré-agregação podem ser utilizadas em diversas aplicações. Por exemplo: em processamento de imagens, pode-se utilizar essas funções para reduzir o tamanho das imagens, objetivando-se a redução da memória necessária para armazená-las. Já em problemas de tomada de decisão, utilizam-se as agregações ou pré-agregações para agrupar as opiniões de especialistas sobre um determinado assunto em um único consenso, que representa o ponto de vista de todos eles. Salienta-se então, que outras classes de funções, como as funções mistura e funções mistura generalizada, também podem ser utilizadas nessas aplicações. Nesse sentido, este capítulo apresenta duas aplicações para as funções mistura generalizada, cujos resultados são comparados com os resultados obtidos por agregações. Essas aplicações são:

1. Um mecanismo para redução de imagens, e
2. Um método para combinar múltiplos algoritmos de comitês classificadores.

6.1 O Processo de Redução de Imagens Baseado em Funções Mistura Generalizada

Inicialmente deve-se entender que uma imagem pode ser definida como uma função bidimensional, $f : V \times W \rightarrow U$, em que $V \times W$ representa uma região contínua do plano cartesiano, os valores $f(x, y)$ correspondem a intensidade da imagem naquele ponto e cada elemento $(x, y, f(x, y)) \in U \times V \times U$ de uma imagem é chamado de *pixel*. No entanto, para representar uma imagem na tela do computador (ou outro dispositivo), utiliza-se amostragens e quantizações dessa imagens [p. 35](GONZALES; WOODS, 2008), de forma que essa representação pode

ser sintetizada na definição abaixo:

Definição 6.1. *Uma imagem em escala de cinza é uma matriz M de tamanho $n \times m$, onde cada entrada $M(i, j) \in [0, 1]$ é chamada de pixel e representa o tom de cinza naquele ponto da imagem.*



Figura 17: Exemplo de imagem em escala de cinza.

Fonte: <http://www.hlevkin.com/TestImages>, acesso em 08 de agosto de 2018.

Modelos mais complexos de imagens também podem ser considerados, como o de imagens RGB (*Red - Green - Blue*) (GONZALES; WOODS, 2008). Nesse caso, são concebidas três matrizes bidimensionais (R, G e B), chamadas de canais de coloração.



Figura 18: Exemplo de imagem em RGB.

Fonte: <http://www.hlevkin.com/TestImages>, acesso em 08 de agosto de 2018.

Um problema recorrente em processamento de imagens consiste em determinar métodos que permitam reduzir a quantidade de memória necessária para o seu armazenamento. Uma dessas formas é a diminuição de seu tamanho. Existem diversas metodologias para realizar essa tarefa, como por exemplo, o método que foi adotado por (FARIAS et al., 2016b), que consiste em:

Método de Redução

Passo 1: Tomar uma imagem $n \times m$;

Passo 2: Capturar a escala da redução, ou seja, números naturais n' e m' tais que $\frac{n}{n'}, \frac{m}{m'} \in \mathbb{N}$;

Passo 3: Extrair vizinhanças distintas com o tamanho $n' \times m'$;

Passo 4: Aplicação a função F em cada vizinhança obtida no terceiro passo;

Passo 5: Construir uma imagem reduzida a partir dos valores obtidos no quinto passo .

O Algoritmo 1 e a Figura 19 resumem esse processo de redução adotado por (FARIAS et al., 2016b).

Algorithm 1 Redução de imagens utilizando uma função F

- 1: **procedure** REDUCE-IMAGE-BY-FUSION(M, F, j, k) % M é a imagem a ser reduzida, $F : [0, 1]^{j \cdot k} \rightarrow [0, 1]$ é uma função, j e k são as escalas de redução.
 - 2: $B_1, \dots, B_{\frac{m \cdot n}{j \cdot k}} \leftarrow$ Partition-Image-In-Blocks(j, k) % Particiona a imagem M de tamanho $m \times n$ em $\frac{m \cdot n}{j \cdot k}$ blocos de tamanho $j \times k$.
 - 3: **for** $i = 1$ to $\frac{m \cdot n}{j \cdot k}$ **do**
 - 4: $p_i \leftarrow F(B_i)$ % p_i obtêm o valor da função F aplicada aos valores dos *pixel* no block B_i .
 - 5: **return** $ReducedImage \leftarrow$ Build-ReducedImage-By($p_1, \dots, p_{\frac{m \cdot n}{j \cdot k}}$) % Constrói a imagem reduzida a partir dos novos *pixels* $p_1, \dots, p_{\frac{m \cdot n}{j \cdot k}}$.
-

A utilização de diferentes funções no Algoritmo 1, estabelece diversos métodos de redução, que podem ser comparados retomando-se as imagens reduzidas pelos diferentes métodos ao tamanho original. Para isso, utiliza-se algum método de ampliação, como por exemplo, clonagem de *pixels* (*nearest neighbor*), interpolação bilinear (*bilinear interpolation*) e interpolação bicúbica (*bicubic interpolation*) (GONZALES; WOODS, 2008). Com isso, pode-se utilizar alguma medida de similaridade para comparar as imagens reduzidas com as imagens ampliadas.

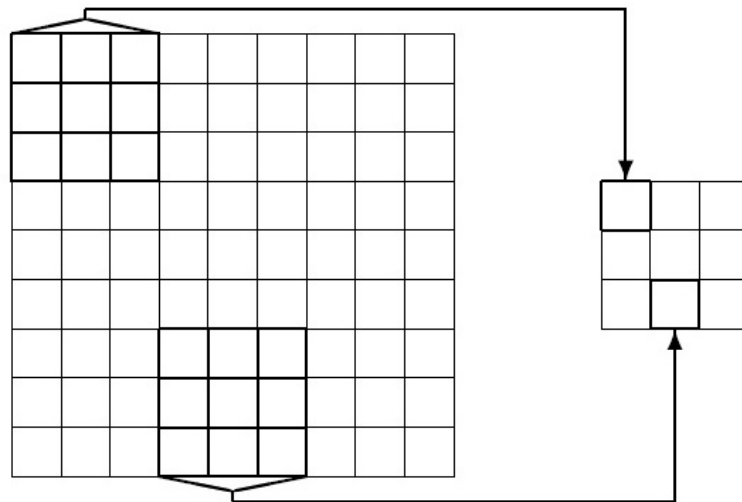


Figura 19: Exemplo de redução de imagem em escala 3×3 .

Fonte: (PATERNAIN et al., 2012)

Na figura 20 utilizou-se a função *min* no Algoritmo 2 para reduzir uma imagem em escalas 2×2 e 4×4 . Em seguida, utilizou-se o método de ampliação por clonagem de *pixels* para ampliar a imagem (III) da Figura 20 aos tamanhos das imagem (II) e (I), respectivamente, obtendo-se (V) e (VI) na figura 21.

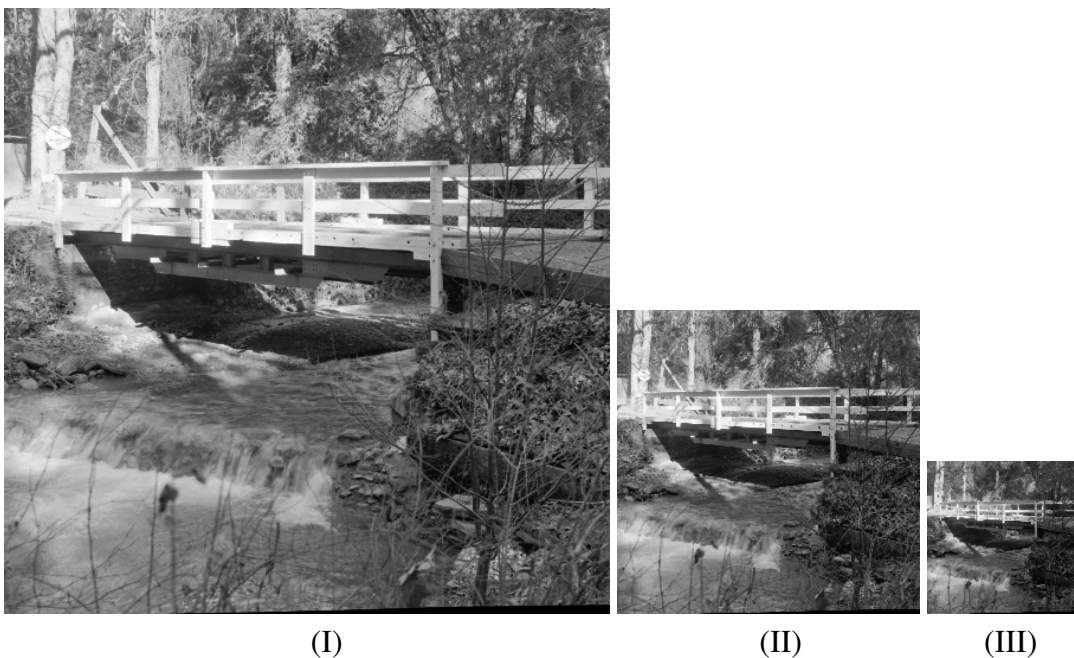


Figura 20: Ilustração do processo de redução de imagens usando a função *min*.

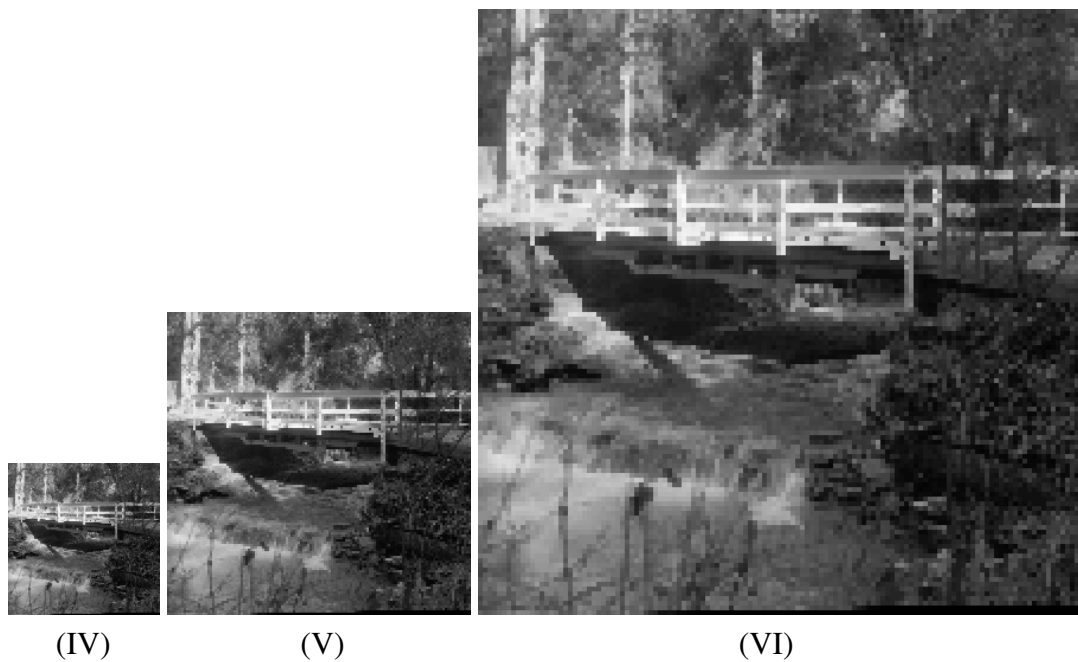


Figura 21: Ilustração do processo de ampliação de imagens pelo método de clonagem de *pixels*.

Observando as imagens (VI) e (I), nas Figuras 20 e 21, percebe-se que o processo redução+ampliação resulta em perda de qualidade da imagem original. No entanto, essa perda de informação pode ser minimizada com a utilização de uma função de redução e de um método de ampliação mais adequados. Neste trabalho utilizou-se funções mistura generalizada no Algoritmo 1 para verificar uma possibilidade de aplicação para essas funções. A metodologia utilizada está descrita a seguir.

6.1.1 Metodologia utilizada

1. Captura-se uma imagem em escala de cinza;
2. Reduz-se essa imagem usando as funções GM clássicas usuais (com pesos estáticos), assim como foi feito em (PATERNAIN et al., 2015): min , max , $arit$, med e $cOWA$; e usando funções GM não clássicas usuais (com pesos dinâmicos): H_{min} , H_{max} , H_{arit} , H_{med} , H_{mode} e H_{cOWA} ;
3. Amplia-se cada imagem obtida no segundo passo usando três diferentes métodos de ampliação de imagens: clonagem de *pixels*, interpolação bilinear e interpolação bicúbica;
4. Compara-se as imagens resultantes com a imagem original usando a medida PSNR (GON-

ZALES; WOODS, 2008).

O valor do PSNR entre duas imagens $I = I(i, j)$ e $K = K(i, j)$ de um mesmo tamanho é calculado seguindo-se a seguinte fórmula:

$$PSNR(I, K) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{MAX_I^2}{MSE(I, K)} \right),$$

em que, $MSE(I, K) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [I(i, j) - K(i, j)]^2$ e MAX_I é o maior valor possível para os *pixels*, ou seja, $MAX_I = 255$. Deve-se ressaltar que quanto maior o resultado do PSNR entre duas imagens I e K maior é similaridade entre elas.

Neste trabalho foram utilizadas vinte imagens em tons cinza com o tamanho 512×512 , que foram reduzidas por vizinhanças 2×2 e 4×4 . Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nas quais os valores em negrito representam os melhores resultados do PSNR.

6.1.2 Resultados obtidos

	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>med</i>	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Img 1	27,3806	27,3314	31,5493	31,3673	31,4549	31,2188	31,2256	31,5233	31,4399	31,2076	31,5003
Img 2	31,0372	31,0935	35,2302	35,0791	35,1670	34,9134	34,9060	35,2107	35,1489	34,8985	35,1961
Img 3	21,5366	20,9918	25,5047	25,2982	25,3942	25,1446	25,2127	25,4745	25,3748	25,1405	25,4569
Img 4	18,3486	18,3285	22,4565	22,2585	22,3037	22,1119	22,1159	22,4287	22,3330	22,1045	22,4075
Img 5	21,3083	21,51162	25,2748	25,1154	25,1655	24,9205	24,8931	25,2545	25,1802	24,9099	25,2350
Img 6	25,0490	25,0444	28,8548	28,7558	28,8151	28,4876	28,4878	28,8413	28,7990	28,4812	28,8350
Img 7	26,8003	26,7446	30,5550	30,4790	30,5213	30,1864	30,1919	30,5457	30,5156	30,1816	30,5402
Img 8	26,1926	26,0945	30,2294	30,0643	30,1189	29,8865	29,8977	30,2072	30,1333	29,8747	30,1906
Img 9	23,6958	23,7346	27,5158	27,4156	27,4638	27,1487	27,1463	27,5026	27,4586	27,1423	27,4937
Img 10	33,5040	33,4685	37,6424	37,5153	37,5771	37,3265	37,3300	37,6270	37,5814	37,3131	37,6181
Img 11	38,1016	38,0725	42,1300	42,0861	42,1232	41,8200	41,8220	42,1265	42,1165	41,8238	42,1253
Img 12	24,4852	24,3887	28,4567	28,3123	28,3511	28,1087	28,1214	28,4385	28,3767	28,1002	28,4221
Img 13	21,2880	21,2876	25,4132	25,2432	25,2418	25,0791	25,0805	25,3905	25,3151	25,0720	25,3658
Img 14	24,2717	24,1934	28,2960	28,1170	28,2101	27,9332	27,9490	27,9332	28,1771	27,8932	28,2605
Img 15	24,3007	24,2583	28,3948	28,2800	28,3337	28,0675	28,0720	28,3799	28,3326	28,0616	28,3731
Img 16	26,9453	26,9411	30,8727	30,7513	30,8179	30,5208	30,5227	30,8572	30,8071	30,5101	30,8483
Img 17	24,4278	24,4574	28,3268	28,2047	28,2582	27,9727	27,9687	28,3117	28,2595	27,9596	28,3016
Img 18	27,3985	27,4847	31,7653	31,5221	31,4926	31,4494	31,4396	31,7302	31,6165	31,4298	31,6920
Img 19	21,5751	21,3790	25,5135	25,3438	25,3869	25,1501	25,1775	25,4896	25,4100	25,1433	25,4730
Img 20	23,2330	22,9377	27,1633	26,9552	27,0554	26,7915	26,8248	27,1368	27,0270	26,7448	27,1199
Média	25,5440	25,4872	29,5573	29,4082	29,4626	29,2119	29,2193	29,5053	29,4702	29,1996	29,5228

Tabela 1: Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por clonagem de *pixels* com vizinhanças 2×2 .

	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>med</i>	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Img 1	28,1216	28,3434	32,7429	32,9287	32,7735	32,3605	32,5307	32,8324	32,9018	32,4215	32,8544
Img 2	32,3778	32,1516	37,2639	37,4340	37,2720	36,9785	36,8267	37,3444	37,4021	37,0706	37,3540
Img 3	21,5701	21,6859	25,4424	25,3806	25,4281	25,0072	25,3494	25,4391	25,4073	25,0205	25,4397
Img 4	18,5557	18,5706	22,2683	22,2880	22,2189	22,0015	22,0112	22,2931	22,2963	22,0210	22,2867
Img 5	21,6867	21,8840	25,0838	25,0431	25,0536	24,8012	24,8058	25,0849	25,0646	24,8312	25,0806
Img 6	26,3068	25,7496	30,0819	30,1796	30,0553	29,9207	29,5337	30,1286	30,1653	29,9332	30,1250
Img 7	28,0738	27,5395	31,8790	31,9627	31,8708	31,6909	31,3329	31,9149	31,9467	31,7095	31,9154
Img 8	26,6030	26,7140	30,5613	30,5403	30,5269	30,2044	30,3250	30,5700	30,5573	30,2427	30,5660
Img 9	24,6362	24,1041	28,1776	28,1910	28,1682	28,0192	27,6521	28,1905	28,1931	28,0416	28,1921
Img 10	29,0739	29,0906	30,0062	29,9867	29,9979	29,9495	29,9613	30,0001	29,9929	29,9562	29,9991
Img 11	40,0973	39,9411	48,5573	48,9905	48,5299	47,5548	47,4569	48,7049	48,8671	47,7771	48,7067
Img 12	25,1069	25,0441	28,9234	28,9333	28,8928	28,6128	28,6454	28,9420	28,9425	28,6432	28,9417
Img 13	21,3366	21,3585	25,0735	25,1043	25,0285	24,8057	24,8181	25,0967	25,1086	24,8294	25,0894
Img 14	25,1260	25,1413	29,5436	29,4992	29,5129	29,0967	29,2202	29,0967	29,5155	29,2552	29,5428
Img 15	24,9943	25,0550	29,3732	29,4193	29,3225	29,0142	29,0866	29,4031	29,4188	29,0538	29,3906
Img 16	27,8684	27,7878	31,9131	31,9981	31,8896	31,5951	31,5712	31,9566	31,9892	31,6663	31,9551
Img 17	25,1551	24,9530	28,7512	28,7540	28,7280	28,5010	28,3822	28,7635	28,7630	28,5555	28,7617
Img 18	28,1171	28,0785	32,5174	32,4966	32,3886	32,2345	32,1800	32,5343	32,5177	32,2884	32,5209
Img 19	22,3685	22,1031	26,4319	26,4433	26,3704	26,1229	26,0647	26,4540	26,4512	26,1534	26,4461
Img 20	23,6597	23,9489	27,7559	27,7948	27,6800	27,2980	27,6209	27,7893	27,7996	27,5358	27,7745
Média	26,0418	25,9622	30,1174	30,1684	30,0854	29,7885	29,7688	30,1270	30,1650	29,8503	30,1471

Tabela 2: Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bilinear com vizinhanças 2×2 .

	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>med</i>	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Img 1	28,3683	28,4992	34,2986	34,3526	34,2694	33,7338	33,8775	34,3739	34,3788	33,7779	34,3790
Img 2	32,4136	32,3805	38,9910	39,0065	38,9442	38,4129	38,3133	39,0512	39,0344	38,4711	39,0486
Img 3	21,8870	21,7615	26,5429	26,3816	26,4852	26,0061	26,3333	26,5244	26,4458	26,0135	26,5167
Img 4	18,6421	18,6524	22,8543	22,7849	22,7526	22,5206	22,5264	22,8621	22,8233	22,5299	22,8478
Img 5	21,6054	21,8512	25,5089	25,4104	25,4401	25,1563	25,1648	25,5001	25,4532	25,1702	25,4883
Img 6	26,3860	25,9365	31,3079	31,3202	31,2551	30,9649	30,5667	31,3386	31,3364	30,9544	31,3292
Img 7	28,0995	27,6293	32,9090	32,9297	32,8777	32,5606	32,1916	32,9319	32,9386	32,5554	32,9293
Img 8	26,7325	26,7914	31,3827	31,2745	31,2937	30,9344	31,0421	31,3780	31,3245	30,9538	31,3624
Img 9	24,7267	24,3205	29,1507	29,1040	29,1174	28,8576	28,4988	29,1533	29,1282	28,8613	29,1488
Img 10	30,0615	30,0082	31,3187	31,2882	31,3061	31,2471	31,2432	31,3114	31,2988	31,2506	31,3088
Img 11	40,0523	40,0217	51,0748	51,3528	51,0145	49,1527	49,1315	51,2139	51,3108	49,3203	51,2172
Img 12	25,2319	25,1698	29,9361	29,8556	29,8573	29,4944	29,5338	29,9392	29,8992	29,5090	29,9322
Img 13	21,4214	21,4254	25,4916	25,4423	25,3500	25,1817	25,1830	25,4994	25,4786	25,1942	25,4685
Img 14	25,3708	25,3644	31,0986	30,9165	31,0172	30,4623	30,5415	30,4623	30,9836	30,5445	31,0759
Img 15	25,2384	25,2614	30,7425	30,7061	30,6566	30,2273	30,2860	30,7602	30,7417	30,2549	30,7425
Img 16	28,0436	28,0253	33,3437	33,3402	33,2925	32,8233	32,8211	33,3735	33,3667	32,8721	33,3698
Img 17	25,2379	25,1430	29,7263	29,6585	29,6680	29,3356	29,2486	29,7272	29,6952	29,3658	29,7188
Img 18	28,0619	28,1339	33,1180	32,9718	32,8529	32,7379	32,7172	33,1111	33,0339	32,7612	33,0776
Img 19	22,5233	22,1915	27,4411	27,3395	27,3174	27,0111	26,9200	27,4405	27,3861	27,0270	27,4279
Img 20	23,9768	23,9680	29,0452	28,9676	28,9274	28,4710	28,7046	29,0653	29,0149	28,6251	29,0470
Média	26,2040	26,1267	31,2641	31,2202	31,1848	30,7646	30,7423	31,2509	31,2536	30,8006	31,2718

Tabela 3: Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bicúbica com vizinhanças 2×2 .

	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>med</i>	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Img 1	21,3689	20,8879	26,9194	26,5410	26,8553	26,9081	26,9103	26,9173	26,9104	26,9048	26,9160
Img 2	24,0295	24,2795	29,9557	29,6077	29,8810	29,9461	29,9454	29,9537	29,9475	29,9418	29,9522
Img 3	16,9278	15,0318	22,0576	21,7775	21,8995	22,0466	22,0517	22,0557	22,0507	22,0456	22,0543
Img 4	14,1697	14,0256	19,9513	19,6576	19,7681	19,9427	19,9422	19,9498	19,9446	19,9409	19,9481
Img 5	16,9391	17,2481	22,8271	22,4473	22,6628	22,8177	22,8167	22,8249	22,8177	22,8136	22,8230
Img 6	18,8663	19,5528	24,6896	24,1251	24,5871	24,6799	24,6728	24,6866	24,6732	24,6697	24,6840
Img 7	20,4620	20,8258	26,1609	25,6411	26,0819	26,1507	26,1462	26,1582	26,1461	26,1432	26,1563
Img 8	20,9785	20,4442	26,5320	26,2382	26,4206	26,5223	26,5238	26,5304	26,5256	26,5201	26,5291
Img 9	17,7107	18,5935	23,5433	23,1130	23,4352	23,5345	23,5280	23,5413	23,5312	23,5274	23,5391
Img 10	19,7086	19,5429	24,0779	23,9220	24,0576	24,0643	24,0650	24,0772	24,0748	24,0632	24,0771
Img 11	29,4831	29,2656	35,1148	34,8967	35,0944	35,1036	35,1071	35,1138	35,1102	35,1038	35,1134
Img 12	18,9577	18,7267	24,5507	24,1892	24,4837	24,5407	24,5415	24,5489	24,5427	24,5377	24,5481
Img 13	17,4623	17,4089	22,9146	22,7245	22,8609	22,9057	22,9058	22,9139	22,9114	22,9048	22,9134
Img 14	17,7288	17,3650	23,4470	23,1821	23,3704	23,4371	23,4393	23,4371	23,4460	23,4353	23,4452
Img 15	17,9584	17,7651	23,7547	23,4885	23,6730	23,7456	23,7464	23,7533	23,7489	23,7437	23,7522
Img 16	20,8262	20,8164	26,3007	25,9136	26,2345	26,2900	26,2901	26,2987	26,2918	26,2859	26,2975
Img 17	18,8154	19,1460	24,5249	24,1449	24,4222	24,5154	24,5140	24,5231	24,5163	24,5113	24,5217
Img 18	21,9710	22,1710	28,2171	27,9402	28,1458	28,2094	28,2081	28,2155	28,2110	28,2064	28,2144
Img 19	15,9440	15,8034	21,6857	21,2803	21,5744	21,6764	21,6741	21,6835	21,6751	21,6738	21,6814
Img 20	17,8204	16,7434	22,9191	22,5135	22,8160	22,9063	22,9104	22,9171	22,9098	22,9031	22,9155
Média	19,4064	19,2822	25,0072	24,6672	24,9162	24,9972	24,9969	25,0054	24,9990	24,9938	25,0041

Tabela 4: Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por clonagem de *pixels* com vizinhanças 4×4 .

	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>med</i>	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Img 1	21,9360	21,5628	28,0096	28,1705	28,1207	28,0135	28,0292	28,0455	28,0742	28,0607	28,0564
Img 2	25,0578	25,0452	31,8655	32,0967	32,0372	31,9023	31,8593	31,9094	31,9448	31,9550	31,9255
Img 3	16,9945	15,4694	22,1022	21,9983	22,0974	22,0844	22,1111	22,1069	22,1093	22,0957	22,1112
Img 4	14,3224	14,1705	19,9896	19,8647	19,9536	19,9867	19,9826	19,9948	19,9944	19,9947	19,9970
Img 5	17,3030	17,6051	22,9197	22,7927	22,9320	22,9149	22,9166	22,9268	22,9312	22,9255	22,9336
Img 6	19,5431	20,0616	25,4792	25,3219	25,5140	25,4955	25,4664	25,5046	25,5144	25,5166	25,5110
Img 7	21,3638	21,6579	27,5328	27,3458	27,5711	27,5491	27,5148	27,5540	27,5616	27,5664	27,5604
Img 8	21,3275	20,9136	27,1053	27,0976	27,1628	27,0994	27,1116	27,1198	27,1307	27,1235	27,1273
Img 9	18,2858	18,8670	24,0978	23,8717	24,0736	24,1151	24,0668	24,1060	24,1031	24,1128	24,1071
Img 10	20,2221	19,9932	24,0911	24,0935	24,0970	24,0967	24,0706	24,0960	24,1006	24,1023	24,0968
Img 11	30,9221	30,6019	41,7706	42,7267	41,9936	41,8778	41,7511	41,8669	41,9744	41,9672	41,8908
Img 12	19,4366	19,1960	25,0041	24,9690	25,0591	25,0069	25,0004	25,0190	25,0290	25,0235	25,0246
Img 13	17,6902	17,7255	23,3224	23,3145	23,3499	23,3138	23,3232	23,3309	23,3368	23,3298	23,3344
Img 14	18,1846	18,0300	24,4026	24,4954	24,4757	24,3984	24,4168	24,4230	24,4424	24,4431	24,4310
Img 15	18,4437	18,2781	24,8246	24,9645	24,9164	24,8291	24,8325	24,8508	24,8721	24,8636	24,8603
Img 16	21,4219	21,3878	27,2098	27,2688	27,2926	27,2175	27,2128	27,2364	27,2581	27,2557	27,2453
Img 17	19,3082	19,5038	24,9449	24,8735	24,9769	24,9493	24,9370	24,9577	24,9665	24,9658	24,9634
Img 18	22,6799	22,7226	29,6404	29,7946	29,7337	29,6512	29,6416	29,6698	29,6937	29,6928	29,6792
Img 19	16,3909	16,3556	22,4524	22,3853	22,4713	22,4483	22,4596	22,4727	22,4843	22,4840	22,4776
Img 20	18,1096	17,5271	23,4486	23,3780	23,4988	23,4223	23,4734	23,4621	23,4722	23,4785	23,4689
Média	19,9472	19,8337	26,0107	26,0412	26,0664	26,0186	26,0089	26,0327	26,0497	26,0479	26,0401

Tabela 5: Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bilinear com vizinhanças 4×4 .

	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>med</i>	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Img 1	21,9113	21,5095	28,8505	28,7684	28,9289	28,8469	28,8633	28,8798	28,9015	28,8864	28,8908
Img 2	24,9022	33,0709	33,0319	32,9901	33,1331	33,0556	33,0237	33,0556	33,1008	33,1053	33,0866
Img 3	17,0145	15,3432	22,3774	22,1855	22,2990	22,3602	22,3832	22,3804	22,3792	22,3680	22,3821
Img 4	14,3065	14,1514	20,1790	19,9698	20,0851	20,1738	20,1698	20,1811	20,1787	20,1786	20,1824
Img 5	17,1811	17,4981	23,1484	22,9059	23,1111	23,1405	23,1427	23,1533	23,1537	23,1479	23,1591
Img 6	19,4542	20,0639	26,1861	25,7452	26,1514	26,1947	26,1649	26,2035	26,2009	26,2011	26,2067
Img 7	21,2513	21,5559	28,3140	27,8209	28,2896	28,3230	28,2866	28,3281	28,3223	28,3271	28,3307
Img 8	21,3225	20,8535	27,5684	27,4137	27,5586	27,5583	27,5699	27,5776	27,5835	27,5760	27,5832
Img 9	18,2101	18,9156	24,5733	24,1786	24,4917	24,5837	24,5380	24,5762	24,5658	24,5737	24,5751
Img 10	20,2004	19,8870	24,5699	24,4960	24,5676	24,5748	24,5428	24,5722	24,5736	24,5743	24,5726
Img 11	30,8195	30,4836	43,8344	44,3189	44,0353	43,9251	43,7963	43,9480	44,0549	44,0148	43,9737
Img 12	19,3695	19,1122	25,4922	25,2921	25,5000	25,4894	25,4841	25,5015	25,5064	25,4994	25,5053
Img 13	17,6890	17,6781	23,5919	23,4921	23,5916	23,5831	23,5881	23,5972	23,5996	23,5924	23,5996
Img 14	18,2169	17,9594	25,2287	25,1704	25,2567	25,2223	25,2366	25,2462	25,2608	25,2585	25,2533
Img 15	18,4727	18,2880	25,6092	25,5681	25,6400	25,6075	25,6115	25,6301	25,6454	25,6350	25,6375
Img 16	21,4052	21,3734	27,9349	27,7330	27,9724	27,9345	27,9310	27,9530	27,9651	27,9602	27,9594
Img 17	19,2220	19,4902	25,3888	25,1553	25,3627	25,3876	25,3801	25,3976	25,4014	25,3970	25,4016
Img 18	22,5806	22,7286	30,4313	30,4040	30,4847	30,4344	30,4314	30,4581	30,4749	30,4697	30,4664
Img 19	16,4054	16,3066	23,1125	22,8336	23,0689	23,1068	23,1101	23,1265	23,1296	23,1326	23,1291
Img 20	18,1350	17,3272	23,9805	23,7197	23,9625	23,9542	23,9958	23,9898	23,9932	23,9950	23,9937
Média	19,9035	19,7786	26,6702	26,5081	26,6746	26,6728	26,6625	26,6728	26,6996	26,6946	26,7909

Tabela 6: Valor do PSNR entre a imagem original e a imagem ampliada por interpolação bicúbica com vizinhanças 4×4 .

Nas Tabelas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 pode-se observar o valor do PSNR entre as imagens originais e as imagens resultantes no final do processo metodológico adotado. As Tabelas 1, 2 e 3 referem-se à redução em escala 2×2 e ampliação por meio de clonagem dos *pixels*, interpolação bilinear e interpolação bicúbica, respectivamente, enquanto que as Tabelas 4, 5 e 6 apresentam os resultados obtidos com a redução em escala 4×4 .

Conforme pode ser verificado nas tabelas já mencionadas, a escolha do método de ampliação de imagens é importante nesse processo. Nota-se que ampliações pelo método de interpolação bicúbica resultam em imagens com melhor qualidade que os métodos de interpolação bilinear e de clonagem de *pixels*. Destaca-se os resultados obtidos pela função H_{cOWA} como redutor de imagem associado ao método de ampliação por interpolação bicúbica, onde obtiveram-se os melhores resultados (em média). Além disso, ressalta-se que os resultados obtidos por todas as funções adotadas foram similares, descartando-se apenas as funções *max* e *min*, que não obtiveram imagens com qualidades significativas. Nas Tabelas 7 e 8 pode-se verificar a contagem das funções que obtiveram maior significância considerando-se cada uma das imagens testadas.

	min	max	$arit$	med	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Clonagem	-	-	20	-	-	-	-	-	-	-	-
Bilinear	-	-	4	6	-	-	-	4	6	-	-
Bicúbica	-	-	7	1	-	-	-	10	1	-	1

Tabela 7: Contagem das funções GM que obtiveram maior similaridade - vizinhança 2×2

	min	max	$arit$	med	cOWA	H_{min}	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	H_{mode}	H_{cOWA}
Clonagem	-	-	20	-	-	-	-	-	-	-	-
Bilinear	-	-	-	5	8	1	-	-	1	2	3
Bicúbica	-	-	-	-	4	2	1	-	2	2	10

Tabela 8: Contagem das funções GM que obtiveram maior similaridade - vizinhança 4×4

6.2 Combinando Múltiplos Algoritmos de Comitês Classificadores usando Funções Mistura Generalizada

Em aprendizagem de máquina (*machine learning*), um comitê classificador pode ser entendido como um sistema colaborativo de tomada de decisão composto por N classificadores individuais (especialistas), denominados membros, no qual é aplicada alguma estratégia para combinar as contribuições dos membros do comitê, com o intuito de gerar uma única previsão como saída (CHEN; WONG, 2011).

Um comitê classificador é formado por duas diferentes estruturas (módulos): uma que consiste de um conjunto de N classificadores individuais e outra que resume-se a um módulo de combinação, que é encarregado de combinar as N saídas dos membros do comitê e agrupá-las em um único valor representativo, que é a saída final de um comitê (KITTLER et al., 1998). A Figura 22 ilustra essa estrutura modular de um comitê classificador.

Existem várias estratégias possíveis para o módulo combinador (módulo 2), como por exemplo, os métodos de fusão, de seleção e híbridos. Nesta parte do trabalho, utiliza-se um método de fusão com funções mistura generalizada para combinar os classificadores. Mais precisamente, dado um sistema de classificadores com N membros, aplica-se esse sistema de classificação à uma entrada X , atribuindo-lhes um rótulo de classe, entre L rótulos distintos. Dessa forma, utiliza-se o seguinte procedimento (COSTA et al., 2018):

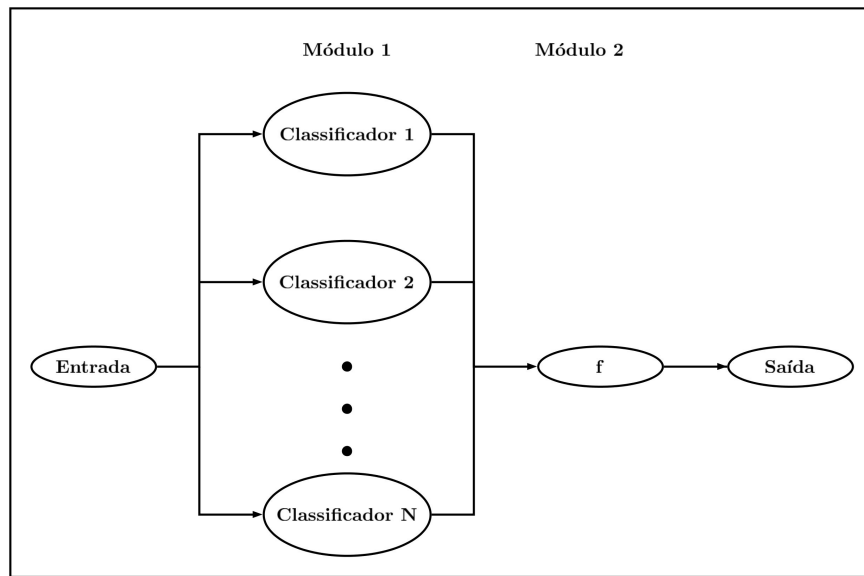


Figura 22: Ilustração da estrutura modular de um comitê classificador

Método de Fusão

Passo 1: Apresenta-se todas as entradas X aos N membros do comitê classificador. Em seguida, cada classificador C_i produz uma saída para cada entrada, representada por um vetor $O_i(X) = (O_i^1(X), O_i^2(X), \dots, O_i^L(X))$, onde $O_i^j(X)$ é a distribuição de probabilidade posterior representada pelo grau em que a instância X pertence à classe j ;

Passo 2: Aplica-se o módulo de combinação $F : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$ é aplicado L vezes para combinar todas as posições dos vetores obtidos no passo 1, onde L é o número de algoritmos de classificadores utilizados. Assim, o módulo de combinação gera o vetor $(F(O_1^1(X), \dots, O_N^1(X)), \dots, F(O_1^L(X), \dots, O_N^L(X)))$;

Passo 3: Obtêm-se a saída do comitê para uma entrada X , que será uma classe $Y \in \{1, \dots, L\}$ tal que:

$$F(O_1^Y(X), \dots, O_N^Y(X)) = \max \{F(O_1^1(X), \dots, O_N^1(X)), \dots, F(O_1^L(X), \dots, O_N^L(X))\}$$

Então, a saída Y é a classe atribuída à entrada X . O Algoritmo 2 e a Figura 23 resumem todo esse processo:

Algorithm 2 Fusão de classificadores usando uma função F

- 1: **procedure** CLASSIFY-INSTANCE-BY-FUSION(X) % X é o padrão a ser classificado.
- 2: $O_1, \dots, O_N \leftarrow (0, \dots, 0)$ % Vetores de tamanho L , definido inicialmente como 0 e N é o número de classificadores.
- 3: **for** $i = 1$ to N **do**
- 4: $O_i \leftarrow \text{Classify-Instance}_i(X)$ % O_i obtém a distribuição de probabilidade posterior do i -ésimo classificador.
- 5: $Value \leftarrow (0, \dots, 0)$ % Vetor de dimensão L definido inicialmente como 0, que representação a combinação de saída.
- 6: **for** $j = 1$ to L **do**
- 7: $Value_j \leftarrow F(O_1^j, \dots, O_N^j)$ % O_i^j é o j -ésimo elemento do vetor O_i .
- 8: **return** $\text{MaxIndex}(Value)$ % MaxIndex retorna o maior índice do vetor $Value$, que é a classe de saída.

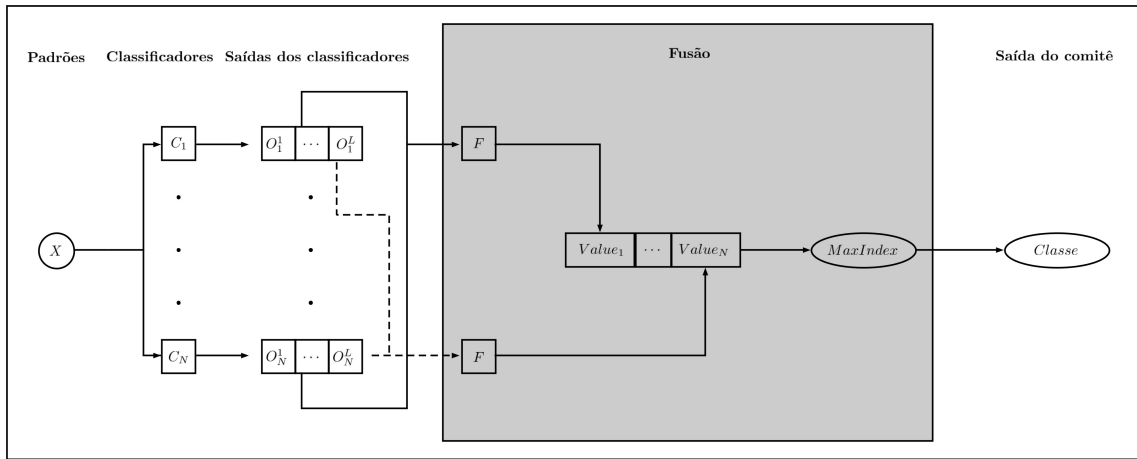


Figura 23: Ilustração da estrutura modular de um comitê classificador

Exemplo 6.1. Considere um comitê com 4 classificadores (C_1, C_2, C_3 e C_4) que é aplicado a um problema com três classes. Seja X uma instância de entrada para a qual a saída dos classificadores C_1, C_2, C_3 e C_4 são, respectivamente, $O_1 = (0.3, 0.7, 0)$, $O_2 = (0.3, 0.4, 0.3)$, $O_3 = (0.1, 0.3, 0.8)$ e $O_4 = (0.2, 0.5, 0.3)$. Então, o processo de combinação usando-se a função produto resulta em:

- Para a classe 1

$$Value_1 = F(O_1^1(X), O_2^1(X), O_3^1(X)) = O_1^1(X) \cdot O_2^1(X) \cdot O_3^1(X) \cdot O_4^1(X) = 0.0018$$

- Para a classe 2

$$Value_2 = F(O_1^2(X), O_2^2(X), O_3^2(X)) = O_1^2(X) \cdot O_2^2(X) \cdot O_3^2(X) \cdot O_4^2(X) = 0.042$$

- Para a classe 3

$$Value_3 = F(O_1^3(X), O_2^3(X), O_3^3(X)) = O_1^3(X) \cdot O_2^3(X) \cdot O_3^3(X) \cdot O_4^3(X) = 0$$

Assim

$$Value = (Value_1, Value_2, Value_3) \text{ e } MaxIndex(Value) = 2$$

Portanto, a entrada X é classificada como pertencente à classe 2. Agora, mudando-se o operador F para o máximo, obtêm-se:

- Para a classe 1

$$Value_1 = \max(O_1^1(X), O_2^1(X), O_3^1(X), O_4^1(X)) = 0.3$$

- Para a classe 2

$$Value_2 = \max(O_1^2(X), O_2^2(X), O_3^2(X), O_4^2(X)) = 0.7$$

- Para a classe 3

$$Value_3 = \max(O_1^3(X), O_2^3(X), O_3^3(X), O_4^3(X)) = 0.8$$

Assim, a entrada X é classificada como pertencente à classe 3. Logo, nota-se que a escolha da função F é importante para o processo de classificação.

Na literatura, é muito comum encontrar métodos que associam pesos a cada classificador, de modo que a saída $Value$ passa a ser uma média ponderada das opiniões dos N membros do classificador (KUNCHEVA, 2005). Desse ponto de vista, o peso de cada membro representa a confiança que cada classificador possui no processo de classificação.

Normalmente, os métodos de combinação utilizam pesos que são escolhidos numa fase inicial, chamada de treinamento, e são mantidos constantes durante todos os testes, ou seja, os pesos são estáticos. No entanto, quando um determinado classificador é associado a um peso “pequeno”, sua opinião acaba sendo desconsiderada em todos os padrões que se deseja

classificar. Por esse motivo, é mais relevante utilizar pesos dinâmicos, como pode ser visto em (BASHIR; H.; KHAN, 2015; BARTOSZ, 2015; AYTUG; SERDAR; BASAN, 2016).

Uma das possíveis formas de dinamizar os pesos dos classificadores é escolher F como uma função mistura generalizada, como por exemplo: \mathbf{H}_{medi} , \mathbf{H}_{min} , \mathbf{H}_{max} , \mathbf{H}_{arit} e mais geralmente \mathbf{H}_Θ (Definição 4.6). Dessa forma, o Algoritmo 2 passa por uma pequena adaptação, como mostrado no algoritmo 3.

Algorithm 3 Método de combinação usando uma função H_Θ .

```

1: procedure CLASSIFY-INSTANCE-BY-FUSION- $H_\Theta(X)$  %  $X$  é o padrão a ser classificado.
2:    $O_1, \dots, O_N \leftarrow (0, \dots, 0)$  % Vetores de tamanho  $L$ , definido inicialmente como 0 e
    $N$  é o número de classificadores.
3:   for  $i = 1$  to  $N$  do
4:      $O_i \leftarrow \text{Classify-Instance}_i(X)$  %  $O_i$  obtêm a distribuição de probabilidade posterior
   do  $i$ -ésimo classificador.
5:    $Value \leftarrow (0, \dots, 0)$  % Vetor de dimensão  $L$  definido inicialmente como 0, que
   representação a combinação de saída.
6:    $weight \leftarrow (0, \dots, 0)$  % É o vetor de pesos de dimensão  $N$ , inicializado com 0's.
7:   for  $i = 1$  to  $L$  do
8:      $w_i \leftarrow \text{WeightsCalc}(O_1^i, \dots, O_N^i)$  %  $O_l^j$  é o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $O_l$ .
9:      $Value_i \leftarrow \sum_{j=1}^N (O_1^j \cdot w_j)$ 
10:  return  $\text{MaxIndex}(Value)$  %  $\text{MaxIndex}$  retorna o maior índice do vetor  $Value$ ,
   que é a classe de saída.

```

Exemplo 6.2. Considere-se um comitê com duas classes e 3 classificadores (C_1, C_2 e C_3). Seja X uma entrada cuja saída dos classificadores C_1, C_2 e C_3 são respectivamente $O_1(X) = (0.9, 0.1)$, $O_2(X) = (0.3, 0.7)$ e $O_3(X) = (0.5, 0.5)$. Escolhendo a função \mathbf{H}_{arit} como combinator, têm-se que:

- Os pesos da classe 1 são:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|O_1^1 - \alpha|}{d} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|0.9 - 0.5667|}{0.6667} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{0.3333}{0.6667} \right) \right) \approx 0.25 \\
 w_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|O_2^1 - \alpha|}{d} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|0.3 - 0.5667|}{0.6667} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{0.2667}{0.6667} \right) \right) \approx 0.30 \\
 w_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|O_3^1 - \alpha|}{d} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|0.5 - 0.5667|}{0.6667} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{0.0667}{0.6667} \right) \right) \approx 0.45
 \end{aligned}$$

onde,

$$d = \sum_{i=1}^3 |O_i^1 - \alpha| = 0.3333 + 0.2667 + 0.0667 = 0.6667$$

e

$$\alpha = \text{arit}(O_1^1(X), O_2^1(X), O_3^1(X)) = \frac{0.9 + 0.3 + 0.5}{3} = 0.5667$$

Assim, a saída do comitê para a classe 1 é:

$$\begin{aligned} \text{Value}_1 &= \sum_{i=1}^3 O_i^1 \cdot w_i \\ &= (0.9 \cdot 0.25) + (0.3 \cdot 0.30) + (0.5 \cdot 0.45) \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

• Para a segunda classe tem-se:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|O_1^2 - \alpha'|}{d'} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|0.1 - 0.433333|}{0.666667} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{0.333333}{0.666667} \right) \right) \approx 0.25 \\ w_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|O_2^2 - \alpha'|}{d'} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|0.7 - 0.433333|}{0.666667} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{0.266667}{0.666667} \right) \right) \approx 0.30 \\ w_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|O_3^2 - \alpha'|}{d'} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{|0.5 - 0.433333|}{0.666667} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{0.066667}{0.666667} \right) \right) \approx 0.45 \end{aligned}$$

onde,

$$d' = \sum_{i=1}^3 |O_i^2 - \alpha'| = 0.333333 + 0.266667 + 0.066667 = 0.666667$$

e

$$\alpha' = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 O_i^2 = \frac{0.1 + 0.7 + 0.5}{3} = 0.433333$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Value}_2 &= \sum_{i=1}^3 O_i^2 \cdot w_i \\ &= (0.1 \cdot 0.25) + (0.7 \cdot 0.30) + (0.5 \cdot 0.45) \end{aligned}$$

$$= 0.46 \quad (6.1)$$

Portanto, $Value = (0.54, 0.46)$ e $MaxIndex(Value) = 1$, ou seja, a entrada X é classificada como pertencente a primeira classe.

6.2.1 Metodologia utilizada

Para avaliar o poder da abordagem proposta como um método de combinação de um comitê de classificadores, realizou-se uma análise empírica com 25 bases de dados, que foram extraídas da UCI (BACHE; LICHMAN, 2013) e de outros repositórios. A Tabela 9 apresenta as bases de dados que foram utilizadas, juntamente com a descrição do número de entradas, classes e atributos para cada uma delas.

Base de dados	Número de Entradas	Número de atributos	Classes
annel.ORIG	898	39	6
breast-cancer	286	10	2
cars	1728	7	4
german-credit	1000	21	2
glass	214	10	7
horse-colic.ORIG	368	28	2
hypothyroid	3772	30	4
ionosphere	351	35	2
iris	150	5	3
kr-vs-kp	3196	37	2
mfeat-Fourier	2000	77	10
nursery	12960	9	5
optdigits	5620	65	10
pima-diabetes	768	9	2
segment	2310	20	7
sick	3772	30	2
soybean	683	36	19
spambase	4601	58	2
splice	3190	62	3
tic-tae-toe	958	10	2
vehicle-silhoettes	946	19	4
vote	435	17	2
waveform	5000	41	3
yeast	1484	9	10
zoo	101	18	7

Tabela 9: Bases de dados utilizadas

Analisou-se sete diferentes situações, onde os comitês classificadores foram formados com número de membros N igual a 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40 e 50. Usou-se conjuntos heterogêneos

compostos por cinco algoritmos de classificação utilizados como membros do comitê, que são: k -NN, Árvore de Decisão, Rede Neural MLP, Naive Bayes e Máquina de Vetores de Suporte (SVM), que são algoritmos simples e eficientes e têm sido amplamente utilizados em conjuntos de classificadores. Todos os algoritmos foram exportados do pacote de aprendizado de máquina do *Weka* (FRANK; HALL; WITTEN, 2016) com as seguintes configurações padrão de parâmetros:

1. Para $N = 5$, tomou-se um k -NN, uma árvore de decisão, um MLP, um SVM e um Naive Bayes;
2. Para $N = 7$, tomou-se dois k -NN, duas árvores de decisão, um MLP, um SVM e um Naive Bayes;
3. Para $N = 10$, tomou-se dois k -NN, duas árvores de decisão, dois MLP, dois SVM e dois Naive Bayes;
4. Para $N = 15$, tomou-se três k -NN, três árvores de decisão, três MLP, três SVM e três Naive Bayes;
5. Para $N = 20$, tomou-se quatro k -NN, quatro árvores de decisão, quatro MLP, quatro SVM e quatro Naive Bayes;
6. Para $N = 30$, tomou-se seis k -NN, seis árvores de decisão, seis MLP, seis SVM e seis Naive Bayes;
7. Para $N = 40$, tomou-se oito k -NN, oito árvores de decisão, oito MLP, oito SVM e oito Naive Bayes;
8. Para $N = 50$, tomou-se dez k -NN, dez árvores de decisão, dez MLP, dez SVM e dez Naive Bayes.

Utilizou-se as funções H_{max} , H_{arit} e H_{med} como combinadores. Os comitês classificadores propostos foram comparados a sistemas compostos por métodos de fusão estática que utilizam as funções *max*, *arit*, *prod* e votação da maioria (Votação). Além disso, foi realizada uma validação cruzada de 10 vezes, com 9 dobras para o treinamento e uma para o teste (ver (KOHAVI,

1995)). Além disso, cada conjunto de dados é executado 10 vezes, levando a um total de 100 execuções para cada método em cada base de dados.

Para validar estatisticamente o desempenho dos comitês classificadores, aplicou-se o teste de Friedman e o teste Nemenyi *post-hoc* (ver (DEMSAR, 2006)). Ambos os testes são aplicados considerando os resultados de todos os conjuntos para todas as 100 execuções.

6.2.2 Resultados obtidos

Na Tabela 10 pode-se visualizar os resultados que foram obtidos nesta análise, onde estão dispostas a média geral da precisão de cada método analisado e desvio padrão. Além disso, na última coluna na Tabela 10 encontram-se os métodos que obtiveram melhor resultado.

Tamanho	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	max	$arit$	$prod$	$voto$	Melhor Combinador
5	0.882 ± 0.028	0.882 ± 0.029	0.874 ± 0.029	0.857 ± 0.030	0.915 ± 0.026	0.882 ± 0.028	0.873 ± 0.032	$arit$
7	0.877 ± 0.030	0.877 ± 0.030	0.875 ± 0.030	0.857 ± 0.031	0.871 ± 0.047	0.863 ± 0.030	0.871 ± 0.074	H_{max}, H_{arit}
10	0.882 ± 0.029	0.882 ± 0.029	0.882 ± 0.029	0.835 ± 0.025	0.874 ± 0.034	0.785 ± 0.046	0.881 ± 0.029	$H_{max}, H_{arit}, H_{med}$
15	0.870 ± 0.132	0.868 ± 0.136	0.868 ± 0.133	0.832 ± 0.032	0.848 ± 0.044	0.778 ± 0.053	0.860 ± 0.037	H_{max}
20	0.889 ± 0.090	0.890 ± 0.093	0.893 ± 0.089	0.827 ± 0.092	0.851 ± 0.098	0.779 ± 0.106	0.849 ± 0.094	H_{med}
30	0.859 ± 0.024	0.856 ± 0.024	0.856 ± 0.024	0.853 ± 0.114	0.875 ± 0.103	0.860 ± 0.113	0.854 ± 0.110	$arit$
40	0.890 ± 0.090	0.891 ± 0.093	0.895 ± 0.089	0.855 ± 0.114	0.869 ± 0.106	0.859 ± 0.114	0.855 ± 0.110	H_{med}
50	0.883 ± 0.092	0.901 ± 0.082	0.884 ± 0.094	0.854 ± 0.113	0.869 ± 0.104	0.856 ± 0.114	0.853 ± 0.111	H_{arit}
Média	0.879 ± 0.064	0.880 ± 0.065	0.878 ± 0.065	0.846 ± 0.069	0.872 ± 0.07	0.833 ± 0.076	0.862 ± 0.075	H_{arit}

Tabela 10: Resultados (precisão ± desvio padrão) para cada comitê com os métodos de combinação propostos e os tradicionais.

Na Tabela 10 pode-se ver os diferentes desempenhos observados nos diferentes métodos (tamanho + combinador). Observa-se que com o aumento do número de classificadores, há uma elevação na precisão que se estabiliza a partir de 20 combinadores. A maior precisão, dentre todos os métodos analisados, ocorreu com o uso de 50 classificadores e a função H_{arit} como combinador.

Outro ponto interessante, que pode ser notado na Tabela 10, foi o fato de os combinadores propostos (H_{min} , H_{max} e H_{arit}) terem apresentado uma precisão relativamente estável (com pouca variação). Enquanto que os combinadores clássicos obtiveram uma elevada variabilidade nos testes realizados.

A análise dos resultados obtidos levando em conta apenas a precisão geral pode não ser tão conclusiva, por esse motivo aplicou-se alguns testes estatísticos objetivando analisar a significância estatística das diferenças apresentadas pelos resultados experimentais dos conjuntos

classificadores que foram apresentados. Aplicou-se o teste de Friedman para avaliar a significância estatística do desempenho de todos os métodos de combinação (propostos e estáticos) e também o teste *post-hot* de Nemenyi, para realizar uma comparação dois a dois. Considerou-se o nível de confiança de 99% e $p < 0,01$. Os resultados possíveis para o teste *post-hoc* são os seguintes:

- $p > 0,01$, não rejeita a hipótese nula $[(H_0)]$. Neste caso, não há diferença estatisticamente significativa. Em outras palavras, o desempenho de um sistema de classificadores não pode ser considerado estatisticamente superior ao outro;
- $p < 0,01$, rejeita a hipótese nula $[(H_0)]$ e aceita a hipótese alternativa $[(H_1)]$. Neste caso, tem-se que o desempenho de ambos os sistemas é estatisticamente diferente. Portanto, pode-se dizer que o desempenho de um sistema combinador é estatisticamente superior ao outro.

Aplicou-se o teste de Friedman nos níveis de precisão de todos os métodos de combinação e os resultados detectaram diferenças estatisticamente significativas em todos os 25 conjuntos de dados ($p < 0,01$). Em seguida, aplicou-se o teste *post-hoc* de Nemenyi para cada combinação de dois a dois. A Tabela 11 apresenta os resultados do teste *post-hoc* de Nemenyi. Nesta tabela, compara-se os métodos propostos (dinâmicos) com os métodos clássicos (estáticos). Os dados apresentados na Tabela 11 tem o formato $x - y - z$, onde x representa o número de vitórias detectadas pelo teste estatístico em favor do método de linha, y representa o número de empates e z representa o número de diferenças estatisticamente significativas que não favorecem os métodos de linha.

Os resultados apresentados na Tabela 11 corroboram com os resultados mostrados na Tabela 10. Comparando-se os combinadores propostos com o método estático do máximo, *max*, observa-se que os valores de x são muito superiores aos de y e de z , mostrando que as abordagens propostas proporcionaram um desempenho melhor que o método de combinação máxima. Este padrão de comportamento foi observado em todos comitês analisados. Com relação aos outros métodos de combinação estáticos (*arit*, *prod* e *vote*), observa-se um comportamento se-

Comitês com 5 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	18 - 6 - 1	5 - 6 - 14	7 - 6 - 12	10 - 6 - 9
H_{arit}	18 - 6 - 1	4 - 5 - 15	5 - 6 - 14	8 - 6 - 11
H_{med}	16 - 6 - 3	4 - 6 - 16	6 - 6 - 13	7 - 6 - 12
Comitês com 7 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arith</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	21 - 1 - 3	14 - 1 - 10	18 - 1 - 6	13 - 1 - 11
H_{arit}	21 - 1 - 3	13 - 1 - 11	18 - 1 - 6	18 - 1 - 6
H_{med}	20 - 1 - 4	14 - 1 - 10	17 - 1 - 7	13 - 1 - 11
Comitês com 10 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	21 - 2 - 2	18 - 2 - 5	22 - 2 - 1	12 - 2 - 11
H_{arit}	20 - 2 - 3	16 - 2 - 7	21 - 2 - 2	12 - 2 - 11
H_{med}	20 - 2 - 3	16 - 2 - 7	21 - 2 - 2	13 - 2 - 10
Comitês com 15 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	16 - 0 - 9	20 - 0 - 5	19 - 0 - 6	18 - 0 - 7
H_{arit}	16 - 0 - 9	21 - 0 - 4	19 - 0 - 6	14 - 0 - 11
H_{med}	16 - 0 - 9	20 - 0 - 5	19 - 0 - 6	14 - 0 - 11
Comitês com 20 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	14 - 7 - 4	17 - 7 - 1	15 - 7 - 3	17 - 7 - 1
H_{arit}	13 - 8 - 4	15 - 8 - 2	14 - 8 - 3	14 - 8 - 3
H_{med}	13 - 8 - 4	15 - 8 - 2	14 - 8 - 3	15 - 8 - 2
Comitês com 30 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	11 - 5 - 9	11 - 5 - 9	11 - 5 - 9	11 - 5 - 9
H_{arit}	10 - 6 - 9	10 - 6 - 9	10 - 6 - 9	10 - 6 - 9
H_{med}	10 - 6 - 9	10 - 6 - 9	10 - 6 - 9	10 - 6 - 9
Comitês com 40 classificadores				
	<i>max</i>	<i>ari</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	13 - 12 - 0	0 - 25 - 0	11 - 14 - 0	17 - 8 - 0
H_{arit}	14 - 11 - 0	0 - 25 - 0	13 - 12 - 0	18 - 7 - 0
H_{med}	14 - 11 - 0	0 - 25 - 0	13 - 12 - 0	18 - 7 - 0
Comitês com 50 classificadores				
	<i>max</i>	<i>arit</i>	<i>prod</i>	<i>voto</i>
H_{max}	22 - 3 - 0	0 - 25 - 0	1 - 24 - 0	4 - 21 - 0
H_{arit}	25 - 0 - 0	15 - 10 - 0	25 - 0 - 0	25 - 0 - 0
H_{med}	25 - 0 - 0	15 - 10 - 0	25 - 0 - 0	25 - 0 - 0

Tabela 11: Resultados do teste estatístico pareado, no formato $x - y - z$, em que x = número de ganhos dos métodos de linha, y = número de empates e z = número de perdas dos métodos de linha.

melhante ao método máximo. Ou seja, os métodos propostos alcançaram desempenho melhor do que os métodos tradicionais de combinação. A única exceção ocorreu com 5 classificadores, nos quais os métodos tradicionais tiveram melhor desempenho. Os comitês com 50 membros e

combinadores H_{arit} e H_{med} obtiveram o desempenho superior ao dos combinadores clássicos *max*, *arit* e *vote*, para todas as 25 bases de dados.

Os resultados obtidos comprovam que as abordagens propostas melhoraram o desempenho dos comitês de classificadores e que essa melhora se mostrou estatisticamente significativa para a maioria das bases de dados, principalmente para os comitês com muitos classificadores classificadores, onde obteve-se um desempenho estatisticamente melhor que *max*, *arit* e *vote*, para todos os 25 conjuntos de dados.

Em resumo, com base na análise empírica desta seção, podemos concluir que as abordagens propostas fornecem conjuntos classificadores mais precisos, quando comparados aos métodos tradicionais de combinação. No entanto, os melhores cenários para as abordagens propostas são aqueles com 20 ou mais membros em conjuntos classificadores, onde uma grande quantidade de informações está disponível.

Para reforçar o poder dos métodos propostos, apresentou-se as 25 bases de dados da Tabela 9 a dois métodos robustos de classificação: Random Forest (RF), XGBoost. Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 12 e na Tabela 13 pode-se observar o tempo de execução de cada um dos métodos.

Na Tabela 12 pode-se verificar que o método classificação com o combinador H_{med} foi superior aos outros métodos analisados em 12 das 25 bases de dados e na média foi o segundo melhor método, com precisão e tempo de execução similar ao XGBoost, que é um método muito utilizado em problemas de classificação. Dessa forma, constata-se que os métodos propostos são bastantes eficazes em problemas de classificação, principalmente em situações com uma quantidade elevada de classificadores ($N > 20$).

	H_{max}	H_{arit}	H_{med}	RF	XGBoost
annel.ORIG	88.57±9.43	88.15±10.27	88.55±9.61	89.2±0.21	92.55±1.67
breast-cancer	89.40±9.07	89.54±9.08	89.59±8.83	88.63±5.31	88.99±6.19
cars	88.29±9.64	88.71±9.8	89.10±9.48	89.12±0.12	92.18±1.35
horse-colic.ORIG	88.67±9.64	88.64±9.61	88.98±9.6	85.09±2.65	86.58±3.03
german-credit	89.33±8.65	89.10±8.81	89.62±8.7	87.68±6.61	88.22±6.36
pima-diabetes	89.03±8.77	88.95±9.17	89.39±8.5	88.95±3.25	87.48±4.71
glass	88.51±9.32	89.00±9.27	88.91±9.41	90.57±1.32	91.44±1.58
hypothyroid	88.85±9.22	89.23±9.41	89.27±8.98	89.97±2.21	92.6±3.15
segment	89.30±8.95	89.37±9.28	89.71±8.97	93.08±5.67	91.16±2.98
ionosphere	88.94±9.84	89.00±10.11	89.21±9.61	90.13±0.59	92.07±1.23
iris	96.05±8.46	96.92±8.84	97.45±8.57	93.03±1.79	94.18±2.01
kr-vs-kp	88.91±8.57	88.68±8.46	89.57±8.21	89.84±0.02	91.82±1.79
mfeat-Fourier	89.58±8.09	89.61±8.74	90.23±7.92	89.51±0.37	91.28±0.05
nursery	89.22±8.88	89.41±9.36	89.66±8.87	88.06±3.59	87.85±3.79
optdigits	89.59±8.57	89.26±9.17	90.04±8.69	89.73±0.33	89.51±0.42
Liver	69.22±8.88	69.41±9.36	69.66±8.87	71.06±3.59	74.85±3.79
sick	89.64±8.77	89.5±8.97	89.94±8.53	89.64±0.3	90.40±0.22
soybean	89.10±9.65	89.54±9.55	89.42±9.33	89.06±0.24	89.2±1.84
spambase	88.68±9.37	89.28±8.98	89.35±9.03	89.18±0.2	89.25±0.01
Segment	97.02±8.71	96.95±9.01	96.71±8.56	97.42±6.07	97.12±1.43
tic-tae-toe	89.33±8.86	89.31±9.41	89.99±8.46	89.57±0.7	87.29±1.47
vehicle-silhoettes	88.95±9.15	88.81±9.54	89.60±8.81	88.85±2.26	88.66±2.92
vote	89.47±8.98	89.34±9.78	89.51±8.94	91.02±3.23	90.08±0.85
waveform	88.94±8.90	89.03±9.57	89.39±8.87	84.48±1.31	85.08±1.17
yeast	89.32±8.21	89.28±8.8	89.74±8.48	88.4±2.77	89.5±12.19
Média	88.88±8.98	88.96±9.29	89.30±8.87	88.85±2.19	89.57±2.6

Tabela 12: Comparação entre os resultados obtidos pelos métodos de classificação descritos na primeira linha.

Tamanho	max	$arit$	$prod$	$voto$	H_{arit}	H_{med}	H_{max}	XGBoost	RF
5	751.40	611.30	512.30	751.40	664.4	1048.7	1110.1	1102.2	954.2
7	955.70	783.50	663.10	955.70	1549.1	1198.1	2367.6	2965.1	1565.1
10	1176.20	1268.60	1124.90	1216.20	1585.7	1587.8	2493.9	3120.4	1767.4
15	1991.70	1807.90	1617.20	1919.40	2384.1	3948.9	4898.2	3482	2491.6
20	2658.60	2391.30	2018.60	2708.30	2615.4	4996.1	5682.4	4624.3	2828.1
30	3975.90	3197.40	2967.40	4015.10	5916.2	6077.1	7420.1	8756.6	4805.3
40	4901.10	3966.40	3791.50	5207.90	6145.2	11379.7	9075	10221.1	5910.4
50	5517.90	5102.20	4922.70	5925.40	6993.1	13101.6	9341.1	12408.3	6534.1
Média	2741.062	2391.07	2202.21	2837.42	3481.65	5417.25	5298.55	5835.00	3357.02

Tabela 13: Tempo de execução de cada método para os diferentes tamanhos de comitês classificadores.

6.3 Considerações Finais

Neste capítulo apresentou-se duas aplicações para as funções mistura generalizada. Na primeira seção, mostrou-se um método de redução de imagens que utiliza as funções GM para

transformar as vizinhanças de tamanho $n \times m$ de uma imagem em um único *pixel*. Já na segunda seção, exibiu-se um procedimento que utiliza as funções GM para combinar as opiniões de diversos algoritmos classificadores e um único atributo. Demonstrou-se neste capítulo, por meio de mecanismos experimentais, que o uso de funções de média ponderada com pesos dinâmicos (mistura generalizada) são bastante eficazes nesses tipos de aplicações, nas quais necessita-se de um sistema capaz de agrupar um conjunto finito de informações (*pixels*, opiniões, etc.) em um único dado representativo.

7 Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho apresentou-se uma minuciosa investigação acerca das funções mistura generalizada (*generalized mixture function* - GM), introduziu-se demonstrando-se importantes propriedades, dentre as quais destaca-se que essas funções são:

- Uma generalização para as funções OWA de Yager - Teorema 4.1;
- Uma extensão para as integrais de Choquet - Teorema 4.2.

Na Definição 4.3, ampliou-se a noção de função mistura generalizada para mistura generalizada limitada (*“bounded generalized mixture”* - GM), provando, em seguida que:

- As funções GM pertencem à classe das funções do tipo média, o que pode não ocorrer com uma função BGM - Proposição 4.1;
- Uma condição necessária e suficiente para a idempotência das funções BGM - Proposição 4.2;
- Condições suficientes para se obter funções BGM estáveis por translações e homogêneas - Proposições 4.3 e 4.4;
- O dual, com respeito à negação padrão, e o reverso de uma função GM também são funções mistura generalizada - Proposições 4.5 e 4.6;
- Condições necessárias para a monotonicidade direcional das funções BGM - Proposições 4.7, 4.8 e 4.9 e Corolários 4.3 e 4.4.

Na Definição 4.5, introduziu-se uma importante família de funções mistura generalizada, H_{Θ} , que satisfazem uma ampla gama de propriedades, tais como simetria, homogeneidade e monotonicidade direcional.

Dando continuidade a este trabalho, introduziu-se uma nova família de funções de média ponderada ordenada, denominadas OWAs dinâmicas (“*dynamic OWA*” - DYOWA), como uma ampliação da noção de função *LMOWA*, comprovando-se, por exemplo, que:

- Toda função DYOWA é idempotente - Proposição 5.2;
- DYOWAs são funções do tipo média que generalizam as funções *LMOWA*- Proposição 5.3 e Teorema 5.1;
- As funções OWA e GM e as integrais discretas de Choquet são casos particulares de operadores DYOWA - Corolários 5.1, 5.2 e 5.3.

Ainda neste trabalho, utilizou-se do conceito de ordem admissível para aperfeiçoar os conceitos de *LMOWA* e DYOWA e ainda introduzir-se as funções reticulares de mistura generalizada (“*L-valued generalized mixture*” - LGM), demonstrando-se que:

- As funções DYOWA fundamentadas por ordens admissíveis são funções operadores do tipo média - Proposição 5.4 e Corolário 5.4;
- As funções OWA fundamentadas por ordens admissíveis são uma restrição das funções DYOWA fundamentadas por ordens admissíveis - Proposição 5.7;
- As funções OWA fundamentadas por ordens admissíveis são funções de agregação idempotentes e do tipo média - Teorema 5.3 e Corolário 5.5;
- As funções OWA de Yager são um caso particular da função OWA fundamentada por ordem admissível - Proposição 5.8;
- As funções reticulares de mistura generalizada estendem todas as funções anteriormente mencionadas, isto é, estendem as funções OWA de Yager, *LMOWA*, DYOWA, GM e

OWA e DYOWA fundamentadas por ordens admissíveis - Teorema 5.4 e Corolários 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 e Proposição 5.9.

Por fim, apresentou-se no Capítulo 6 deste trabalho, duas aplicações para as funções mistura generalizada, que são:

- Um método de redução de imagens;
- Uma estratégia de combinação de comitês classificadores.

Assim, conclui-se que as contribuições desta tese, que encontram-se publicadas ou submetidas à importantes periódicos e eventos da área, colaboraram de forma significativa para o avanço das pesquisas acerca dos operadores de aglutinação (como uma forma mais ampla de agregações), com possibilidade de utilização dos operadores propostos neste trabalho, em uma extensa lista de aplicações.

7.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros visa-se aprofundar ainda mais as pesquisas sobre as funções reticulares de mistura generalizada e conseqüentemente sobre as funções OWA e DYOWA. Além disso, pretende-se:

- Propor formas generalizadas de integrais de Choquet e Sugeno usando a noção ordens admissíveis;
- Dar continuidade ao trabalho iniciado em (FARIAS; SANTIAGO; BEDREGAL, 2018b) sobre as funções mistura generalizada intervalares;
- Pesquisar por mecanismos geradores de pesos para otimizar resultados;
- Aprimorar o método proposto na Seção 6.2, utilizando-se algoritmos de aprendizado para:
 - Construir funções pesos;

- Escolher as combinações dos classificadores.
- Investigar outras possibilidades de aplicações, como em:
 - Problemas de tomada de decisão;
 - Agrupamento de dados;
 - Morfologia matemática.

Referências

- ABE, J. M.; PAPAVERO, N. *Teoria intuitiva dos conjuntos*. São Paulo: Makron, McGraw-Hill, 1991.
- ALSINA, C.; FRANK, M. J.; SCHWEIZER, B. *Associative Functions: Triangular Norms And Copulas*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2006.
- AYTUG, O.; SERDAR, K.; BASAN, B. A multiobjective weighted voting ensemble classifier based on differential evolution algorithm for text sentiment classification. *Expert Systems with Applications*, v. 62, p. 1 – 16, 2016.
- BACHE, K.; LICHMAN, M. *UCI Machine Learning Repository*. 2013. Disponível em: <<http://archive.ics.uci.edu/ml>>.
- BARTOSZ, K. One-class classifier ensemble pruning and weighting with firefly algorithm. *Neurocomputing*, v. 150, p. 490 – 500, 2015. Special Issue on Information Processing and Machine Learning for Applications of Engineering Solving Complex Machine Learning Problems with Ensemble Methods Visual Analytics using Multidimensional Projections.
- BASHIR, S.; H., U. Q. F.; KHAN. Bagmoov: A novel ensemble for heart disease prediction bootstrap aggregation with multi-objective optimized voting. *Australasian Physical & Engineering Sciences in Medicine*, v. 38, n. 2, p. 305–323, Jun 2015.
- BEDREGAL, B. C.; SANTOS, H. S.; CALLEJAS-BEDREGAL, R. T-norms on bounded lattices: t-norm morphisms and operators. In: *2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 22–28.
- BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. Interval valued versions of t-conorms, fuzzy negations and fuzzy implications. In: *2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1981–1987.
- BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; CALVO, T. *A Practical Guide to Averaging Functions*. [S.l.]: Springer, 2016. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 329).
- BELIAKOV, G.; BUSTINCE, H.; PATERNAIN, D. Image reduction using means on discrete product lattices. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 21, n. 3, p. 1070 – 1083, March 2012.
- BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*. Third edition. New York: American Mathematical Society, 1967.
- BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 134, n. 2, p. 209 – 229, 2003.

- BUSTINCE, H. et al. Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 220, p. 69 – 77, 2013. Theme: Aggregation functions.
- BUSTINCE, H. et al. Directional monotonicity of fusion functions. *European Journal of Operational Research*, v. 244, n. 1, p. 300–308, 2015.
- BUSTINCE, H.; PAGOLA, M.; BARRENECHEA, E. Construction of fuzzy indices from fuzzy di-subsethood measures: Application to the global comparison of images. *Information Sciences*, v. 177, n. 3, p. 906 – 929, 2007.
- CHEN, Y.; WONG, M. L. Optimizing stacking ensemble by an ant colony optimization approach. In: *Proceedings of the 13th annual conference companion on Genetic and evolutionary computation ACM*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 7–8.
- CHENG, C.-H.; WANG, J.-W.; WU, M.-C. OWA-weighted based clustering method for classification problem. *Expert Systems with Applications*, v. 36, n. 3, Part 1, p. 4988 – 4995, 2009.
- CHOQUET, G. Theory of capacities. In: *Annales de l'Institut Fourier*. [S.l.: s.n.], 1953. v. 5, p. 131–295.
- COOMAN, G. D.; KERRE, E. Order norms on bounded partially ordered sets. *Fuzzy Mathematics*, v. 2, p. 281–310, 1994.
- COSTA, V. S. et al. Combining multiple algorithms in classifier ensembles using generalized mixture functions. *Neurocomputing*, 2018. ISSN 0925-2312.
- DE BAETS, B.; MESIAR, R. Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 104, n. 1, p. 61–75, 1999.
- DEMSAR, J. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets. *J. Mach. Learn. Res.*, v. 7, p. 1–30, 2006.
- DIGHE, S. C.; SHRIRAM, R. Dental biometrics for human identification based on dental work and image properties in periapical radiographs. In: *TENCON 2012 - 2012 IEEE Region 10 Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–6.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. On the use of aggregation operations in information fusion processes. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 142, n. 1, p. 143–161, 2004.
- FARIAS, A. D. S. et al. Directional and ordered directional monotonicity of generalized and bounded generalized mixture functions. In: *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1633–1639. ISSN 978-1-5090-6020-7.
- FARIAS, A. D. S. et al. A method of image reduction and noise reduction based on a generalization of ordered weighted averaging functions. *arXiv:1601.03785*, 2016.
- FARIAS, A. D. S. et al. Bounded generalized mixture functions. *arXiv:1806.04711*, 2018.
- FARIAS, A. D. S. et al. Funções mistura generalizadas construídas via funções mistura generalizada limitada. In: *Proc. Quarto Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (IV CBSF)*. Campinas - SP, Brasil: [s.n.], 2016. p. 424–435.

- FARIAS, A. D. S. et al. The image reduction process based on generalized mixture functions. In: *2016 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–6.
- FARIAS, A. D. S. et al. A residuated function in a class of Mealy type L-valued finite automaton. In: *2016 Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–6.
- FARIAS, A. D. S. et al. Constructing generalized mixture functions from bounded generalized mixture functions. *Mathware & Soft Computing*, v. 24, n. 2, p. 44–53, Dec 2017.
- FARIAS, A. D. S. et al. Closure properties for fuzzy recursively enumerable languages and fuzzy recursive languages. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, v. 31, n. 3, p. 1795–1806, 2016.
- FARIAS, A. D. S.; SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. Some properties of generalized mixture functions. In: *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 288–293.
- FARIAS, A. D. S.; SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. C. Dynamic ordered weighted averaging functions for complete lattices. *arXiv:1806.01672*, 2018.
- FARIAS, A. D. S.; SANTIAGO, R. H. N.; BEDREGAL, B. C. Interval-valued generalized mixture functions. In: *Proc. Quarto Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (IV CBSF)*. [S.l.: s.n.], 2018.
- FRANK, E.; HALL, M. A.; WITTEN, I. H. *The WEKA Workbench. Online Appendix for “Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques”*. San Diego: Morgan Kaufmann, 2016.
- GONZALES, R. C.; WOODS, R. E. *Digital Image Processing*. 3rd. ed. New Jersey: Pearson, 2008.
- GRABISCH, M. et al. *Aggregation Functions*. [S.l.]: University Press Cambridge, 2009. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 127).
- GRATZER, G. *General Lattice Theory*. Stuttgart: Springer, 1978.
- JOSEPH, R. P.; SINGH, C. S.; MANIKANDAN, M. Brain tumor MRI image segmentation and detection in image processing. *International Journal of Research and Tecnology*, v. 3, 2014.
- KITTLER, J. et al. On combining classifiers. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 20, n. 3, p. 226–239, 1998.
- KLEMENT, E. P.; MESIAR, R.; PAP, E. *Triangular Norms*. [S.l.]: Springer, 2000.
- KOHAVI, R. A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection. v. 142, p. 1137–1145, 1995.
- KULISCH, U. B.; MIRANKER, W. L. *Computer Arithmetic Theory and Practice*. San Diego: Academic Press, 1981.
- KUNCHEVA, L. I. *Combining Pattern Classifiers, Methods and Algorithms*. New York: Wiley Interscience, 2005.

- LIANG, X.; XU, W. Aggregation method for motor drive systems. *Electric Power Systems Research*, v. 117, p. 27 – 35, 2014.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11. ed. [S.l.]: IMPA, 2016. (Projeto Euclides, v. 1).
- LINGLING, L. et al. The research on the method of fuzzy information processing. In: *System Science, Engineering Design and Manufacturing Informatization (ICSEM), 2012 3rd International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 2, p. 47–50.
- LIZASOAIN, I.; MORENO, C. Owa operators defined on complete lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 224, p. 36 – 52, 2013.
- LUCCA, G. et al. Preaggregation functions: Construction and an application. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 24, n. 2, p. 260–272, April 2016.
- MANOKAR, N. V. et al. Wavelets based decomposition and classification of diseased fMRI brain images for inter racial disease types of alzheimer’s vs tumors using SOFM and enhancement by LVQ neural networks. In: *Parallel Distributed and Grid Computing (PDGC), 2012 2nd IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 822–827.
- MENEZES, P. B.; HEUSLER, E. H. *Teoria das categorias para ciência da computação*. [S.l.]: Sagra Luzzatto, 2001.
- MENGER, K. Statistical metrics. In: *Proc. Nat. Acad.* [S.l.: s.n.], 1942. p. 535–537.
- MIHAILOVIC, J. et al. MRI brain tumors images by using independent component analysis. In: *Intelligent Systems and Informatics (SISY), 2011 IEEE 9th International Symposium on*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 433–435.
- PALMEIRA, E. et al. A new way to extend t-norms, t-conorms and negations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 240, p. 1 – 21, 2014.
- PATERNAIN, D. et al. Construction of image reduction operators using averaging aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 261, p. 87 – 111, 2015.
- PATERNAIN, D. et al. An alternative to fuzzy methods in decision-making problems. *Expert Systems with Applications*, v. 39, n. 9, p. 7729 – 7735, 2012.
- PEREIRA, R. A. M. The orness of mixture operators: the exponential case. In: *Proc. 8th Internat. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU’200)*. Madrid, Spain: [s.n.], 2000.
- PEREIRA, R. A. M.; PASI, G. On non-monotonic aggregation: mixture operators. In: *Proc. 4th Meeting of the EURO Working Group on Fuzzy Sets (EUROFUSE’99) and 2nd Internat. Conf. on Soft and Inteligent Computing (SIC’99)*. Budapest: [s.n.], 1999.
- PEREIRA, R. A. M.; RIBEIRO, R. A. Aggregation with generalized mixture operators using weighting functions. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 137, n. 1, p. 43 – 58, 2003.
- ROMAN, S. *Lattices and Ordered Sets*. New york. Switzeland: Springer-Verlag, 2008.
- SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Espaces metriques aleatoires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 247, p. 2092–2094, 1958.

- SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Statistical metric spaces. *Pacific J. Math*, v. 10, p. 313–334, 1960.
- SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math. Debrecen*, v. 8, p. 169–186, 1961.
- SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. *Associative functions and abstract semigroups*. [S.l.: s.n.], 1963. 69- 81 p.
- SPIRKOVÁ, J. et al. Directional and ordered directional monotonicity of mixture functions. In: _____. *Aggregation Functions in Theory and in Practice*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 96–105.
- WILKIN, T.; BELIAKOV, G. Weakly monotone averaging functions. In: *IPMU'2014*. [S.l.: s.n.], 2014. v. 444, p. 364–373.
- WILKIN, T.; BELIAKOV, G. Weakly monotone aggregation functions. v. 30, p. 144–169, 2015.
- WOO, S. K. et al. Registration method for the detection of tumors in lung and liver using multimodal small animal imaging. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v. 56, n. 3, p. 1454–1458, June 2009.
- YAGER, R. R. Ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 18, p. 183 – 190, 1988.
- YAGER, R. R. Centered OWA operators. *Soft Computing*, v. 11, n. 7, p. 631–639, 2006.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.
- ZHOU, S.-M. et al. Type-1 OWA operators for aggregating uncertain information with uncertain weights induced by type-2 linguistic quantifiers. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 159, n. 24, p. 3281 – 3296, 2008.