



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GRAVITOMAGNETISMO E O TESTE DA SONDA GRAVIDADE B

NOELIA SOUZA DOS SANTOS

NATAL-RN
2011

NOELIA SOUZA DOS SANTOS

GRAVITOMAGNETISMO E O TESTE DA SONDA
GRAVIDADE B

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física Teórica e Experimental da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **mestre** em Física.*

Orientador: Janilo Santos

NATAL-RN
AGOSTO 2011

À minha mãe, Ernestina.

AGRADECIMENTOS

- Ao meu Senhor, redentor, Jesus Cristo que me concedeu a graça de elaborar esta dissertação.
- À Mãe de Jesus e minha Mãe, a Virgem Maria, que intercede constantemente junto ao Pai por mim.
- Ao meu orientador, Dr. Janilo Santos, pela sua dedicação, paciência infinita e, sobretudo, disponibilidade em transmitir conhecimentos.
- Aos meus pais, Ernestina e Manoel, pelo amor incondicional.
- À minha irmã, Leila Carla, pela cumplicidade e amizade.
- Aos participantes da Comunidade Magnífica - Missão Católica de Evangelização - em especial à Marleno Souza, à Maria José e à Rose Marry.
- Aos participantes do Grupo de Oração Vida Nova, em especial à Elizabeth.
- A todos os meus colegas do DFTE/UFRN em especial Crislane de Souza, Eliângela Paulino, Filipe Borges, Flodoaldo de Lima, Msc. Hidalyn Mattos, Juliana Cerqueira e Nyladih Mattos, pelo ambiente de amizade e companheirismo criado durante a parte curricular, e que permitiu tornar este curso um espaço de crescimento.
- Ao Dr. Antônio Macedo e à Maria Liduína, pela ajuda na resolução de problemas técnicos.
- A todos os professores do PPGF-UFRN, em particular Dr. Ananias Mariz, Dr. Dory Hélio Anselmo, Dr. Francisco Alexandre, Dr. Luciano Silva, Dra. Nilza Pires e Dr. José Renan de Medeiros, que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação profissional.
- Aos funcionários do PPGF-UFRN, em especial Celina Pinheiro e Maria Deílda.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pelo apoio financeiro.

“A ciência humana de maneira nenhuma nega a existência de Deus. Quando considero quantas e quão maravilhosas coisas o homem compreende, pesquisa e consegue realizar, então reconheço claramente que o espírito humano é obra de Deus, e a mais notável..”

Galileu Galilei

Resumo

O denominado campo gravitomagnético surgiu como uma antiga conjectura de que correntes de matéria (sem cargas) produziriam efeitos gravitacionais análogos aos produzidos pelas correntes elétricas no Eletromagnetismo. Hans Thirring em 1918, usando a aproximação de campo fraco para as equações de campo de Einstein, deduziu que uma casca massiva girando lentamente arrasta os referenciais inerciais no sentido de sua rotação. No mesmo ano Joseph Lense aplicou na Astronomia os cálculos de Thirring. Posteriormente, este efeito ficou conhecido como efeito Lense-Thirring. Juntamente com o efeito de Sitter, esses fenômenos foram recentemente testados através de giroscópios em órbita em torno da Terra, uma antiga proposta feita por George E. Pugh em 1959 e por Leonard I. Schiff em 1960. Nesta dissertação, estudamos os efeitos gravitacionais associados à rotação de corpos massivos à luz da teoria da Relatividade Geral de Einstein. Com essa finalidade, desenvolvemos a aproximação de campo fraco para a Relatividade Geral e obtemos os vários efeitos gravitacionais associados: atraso gravitomagnético dos relógios (gravitomagnetic time-delay), efeito de Sitter (precessão das geodésicas) e o efeito Lense-Thirring (arraste dos referenciais inerciais). Discutimos as medidas do efeito Lense-Thirring do satélite LAGEOS (LAsER GEOdynamics Satellite) e da missão "Sonda Gravidade B"(Gravity Probe B - GPB). O satélite da GPB foi lançado em órbita em torno da Terra a uma altitude de 642 km pela NASA em 2004. Resultados apresentados em maio de 2011 mostram claramente a existência do efeito Lense-Thirring - um arraste dos referenciais inerciais de $37,2 \pm 7,2$ msa/ano (msa = milissegundo de arco)- e do efeito de Sitter - uma deriva geodética de $6.601,8 \pm 18,3$ msa/ano - com precisão de 19% e de 0,28% respectivamente ($1 \text{ msa} = 4,848 \times 10^{-9}$ radiano). Esses resultados estão em bom acordo com os valores previstos pela teoria da Relatividade Geral que são de 41 msa/ano para o efeito Lense-Thirring e 6.606,1 msa/ano para o efeito de Sitter.

Abstract

The so-called gravitomagnetic field arised as an old conjecture that currents of matter (no charges) would produce gravitational effects similar to those produced by electric currents in electromagnetism. Hans Thirring in 1918, using the weak field approximation to the Einstein's field equations, deduced that a slowly rotating massive shell drags the inertial frames in the direction of its rotation. In the same year, Joseph Lense applied to astronomy the calculations of Thirring. Later, that effect came to be known as the Lense-Thirring effect. Along with the de Sitter effect, those phenomena were recently tested by a gyroscope in orbit around the Earth, as proposed by George E. Pugh in 1959 and Leonard I. Schiff in 1960. In this dissertation, we study the gravitational effects associated with the rotation of massive bodies in the light of the Einstein's General Theory of Relativity. With that finality, we develop the weak field approximation to General Relativity and obtain the various associated gravitational effects: gravitomagnetic time-delay, de Sitter effect (geodesic precession) and the Lense-Thirring effect (drag of inertial frames). We discuss the measures of the Lense-Thirring effect done by LAGEOS Satellite (Laser Geodynamics Satellite) and the Gravity Probe B - GPB - mission. The GPB satellite was launched into orbit around the Earth at an altitude of 642 km by NASA in 2004. Results presented in May 2011 clearly show the existence of the Lense-Thirring effect- a drag of inertial frames of 37.2 ± 7.2 mas/year (mas = milliarcsec)- and de Sitter effect - a geodesic precession of $6,601.8 \pm 18.3$ mas/year- measured with an accuracy of 19 % and of 0.28 % respectively ($1 \text{ mas} = 4.848 \times 10^{-9}$ radian). These results are in a good agreement with the General Relativity predictions of 41 mas/year for the Lense-Thirring effect and 6,606.1 mas/year for the de Sitter effect.

LISTA DE FIGURAS

3.1	Corpo em rotação.	18
3.2	Os sinais das contribuições das integrais 3.39 nos quatro quadrantes. Figura extraída da referência [2]	20
6.1	Os dois tipos de precessão do giroscópio em torno da Terra: Precessão Lense-Thirring (horizontal) e precessão de Sitter (vertical). Figura adaptada da referência [53]	49
A.1	Caminho de integração no plano complexo usado na integração da equação A.9.	64

LISTA DE SIGLAS

ASI Italian Space Agency

GPB Gravity Probe B

GRACE Gravity Recovery and Climate Experiment

LAGEOS LAsEr GEOdynamics Satellite

NASA National Aeronautics and Space Administration

1	Introdução	1
2	Relatividade Geral	6
2.1	Algumas relações fundamentais	7
2.1.1	O Tensor Métrico	8
2.1.2	O Tensor de Curvatura	8
2.1.3	O Tensor Energia-Momento	9
3	Aproximação de Campo Fraco	11
3.1	Aproximação de Campo Fraco	12
3.1.1	Distribuição de Matéria em Repouso	15
3.1.2	Distribuição de Matéria em Rotação	17
4	Gravitomagnetismo na Relatividade Geral	24
4.1	Analogia da Gravitação e o Eletromagnetismo	25
4.1.1	Equações de Campo Tipo-Maxwell	25
4.1.2	Equação de Força Tipo-Lorenz	28
4.2	Efeito Lense-Thirring como um Efeito Gravitomagnético	31

5	Efeitos da Rotação: Descrição da Relatividade Geral	33
5.1	Precessão de Giroscópio	34
5.2	Efeito Relógio Gravitomagnético	38
6	Resultados Experimentais: Sonda Gravidade B	42
6.1	Medidas dos Efeitos Lense-Thirring e de Sitter: O Teste da Sonda Gravidade B	43
6.2	Outros Experimentos: Os Satélites LAGEOS	50
7	Conclusões e Perspectivas	53
7.1	Conclusões	53
7.2	Perspectivas	54
	Referências bibliográficas	56
	Apêndices	62
A	Solução da equação de onda	62

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

"Ainda que eu tivesse o dom da profecia, o conhecimento de todos os mistérios e de toda a ciência; ainda que eu tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, se não tivesse amor, eu nada seria".

I Coríntios 13,2

Na teoria da Relatividade Restrita, proposta por Albert Einstein em 1905, as noções separadas de espaço absoluto e tempo absoluto da mecânica newtoniana foram substituídas por uma nova noção, o espaço-tempo absoluto, como salientado por Minkowski [1]. No entanto, a Relatividade Restrita é uma modificação cinemática e dinâmica da mecânica newtoniana derivada de dois princípios:

- As leis físicas devem ser as mesmas para quaisquer observadores inerciais;
- A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal para observadores inerciais.

Einstein considerava que a Relatividade Restrita apresentava dois fortes entraves conceituais: a manutenção de sistemas de referência privilegiados e a incompatibilidade com a gravitação newtoniana. Na gravitação newtoniana a gravidade é uma força que age

instantaneamente, os efeitos gravitacionais ocorrem a uma velocidade infinita. Einstein percebeu que estas duas questões estavam intimamente ligadas e trabalhou durante uma década na sua solução.

A conexão entre espaço-tempo curvo e gravitação seria a base da resolução dos problemas que inquietavam Einstein em sua teoria. De maneira que, se a teoria da Relatividade Restrita for válida e se considerarmos a possibilidade de usar tanto os referenciais inerciais como os referenciais acelerados, seremos então forçados a considerar que a natureza seja descrita por geometrias não-euclidianas. Logo, os fenômenos físicos devem se desenrolar em um espaço-tempo curvo que, por sua vez, está conectado à aceleração de um sistema. A verificação de que um observador não é capaz de determinar a diferença entre um sistema de referência uniformemente acelerado e um campo gravitacional, através de experimentos locais [2], nos revela a conexão entre aceleração e o campo gravitacional. Portanto, se quisermos considerar os efeitos gravitacionais, precisaremos modificar, ou melhor, generalizar o princípio da Relatividade Restrita, abandonando o papel privilegiado dos referenciais inerciais. Na busca da generalização da Relatividade Restrita, Einstein recorreu também ao Princípio da Covariância, o qual nos diz que as leis da Física devem ser expressas em uma forma covariante. Sendo assim, de um ponto de vista físico, os referenciais inerciais são tão bons quanto os acelerados na descrição dos fenômenos. Após essas reformulações surge, em 1916, uma nova teoria: a teoria da Relatividade Geral.

O cenário da Relatividade Geral se dá em uma classe de espaços-tempos curvos a qual chamamos de espaços riemannianos. Em um espaço riemanniano, a métrica é o tensor fundamental que caracteriza completamente a estrutura do espaço-tempo, ou seja, a sua geometria. Além disso, é a partir da métrica que conseguimos construir a noção de distâncias espaciais e temporais entre dois eventos [3].

A Relatividade Geral é uma teoria geométrica do campo gravitacional. Essa teoria é um dos feitos mais bem sucedidos no âmbito da ciência exata do ponto de vista de sua coerência interna. O seu desenvolvimento surgiu não por uma direta necessidade experimental mas, sobretudo, através de reflexões sobre o conceito de inércia e pelo desejo de compatibilizar os conceitos da recente teoria da Relatividade Restrita com a gravitação newtoniana [3]. Na teoria de Einstein, o campo gravitacional é descrito por um tensor métrico constituído de 16 componentes, das quais 10 são independentes e são funções das coordenadas espaciais e do tempo.

A dinâmica da Relatividade Geral é descrita por um conjunto de equações conhecido como as equações de campo de Einstein. Estas equações relacionam as propriedades geométricas do espaço-tempo, descritas por uma métrica e por suas derivadas de primeira e de segunda ordem, com o tensor energia-momento. O tensor energia-momento é a generalização dos conceitos de energia e momento de uma partícula para a descrição de campos. É por meio deste tensor que a distribuição de matéria é descrita.

A princípio, qualquer métrica pode ser solução das equações de Einstein; para que tenhamos soluções exatas com interpretação física precisamos impor restrições ao tensor energia-momento. As soluções exatas se restringem a um pequeno grupo e permitem que as propriedades físicas do espaço-tempo sejam descritas sem recorrer à integração numérica de equações diferenciais de segunda ordem.

Existe uma variedade de soluções exatas que têm desempenhado um papel muito importante no desenvolvimento tanto teórico como experimental da Relatividade Geral [4]. No entanto, problemas como a descrição de um universo inhomogêneo (à nível cosmológico), o campo gravitacional de uma estrela em rotação, o problema de dois corpos e a propagação de radiação gravitacional estão sem soluções exatas [5]. Uma das soluções exatas, talvez a mais importante, das equações de Einstein é a solução que representa o exterior de uma distribuição de matéria-energia com simetria esférica. Os sistemas com simetria esférica são razoavelmente simples. No entanto, estes sistemas são fisicamente relevantes, uma vez que muitos objetos em astrofísica são aproximadamente esféricos.

A solução que descreve o espaço-tempo em torno de uma distribuição de matéria esfericamente simétrica em repouso foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916, poucos meses depois de Einstein publicar suas equações de campo para o vazio. A geometria de Schwarzschild é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

com

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (1.2)$$

onde M é a massa da fonte, G é a constante de gravitação universal e c é a velocidade da luz no vácuo. Quando $r \rightarrow \infty$ o espaço-tempo de Schwarzschild se aproxima do espaço-tempo de Minkowski. A solução de Schwarzschild está na base dos três testes clássicos da Relatividade Geral: o deslocamento de linhas espectrais pela presença do campo gra-

vitacional, o desvio de um feixe de luz que passa perto de uma estrela e a precessão do perihélio de Mercúrio. Esta solução tem ainda outra particularidade, ela está intimamente ligada a uma das previsões mais famosas da Relatividade Geral, que é a possível existência de buracos negros. Se na equação (1.1) definirmos o raio de Schwarzschild $r_s = 2m$; para $r = r_s$ temos uma singularidade de coordenada. A superfície $r = r_s$ caracteriza o chamado horizonte de eventos. Essa superfície funciona como uma membrana que deixa passar a informação em um só sentido. Para um observador exterior, todos os acontecimentos em $r < r_s$ são inacessíveis. Devido a essas características, o termo buraco negro foi introduzido em 1967 por John Wheeler, para uma massa com essa singularidade.

Soluções que descrevem ondas gravitacionais, como a solução de Einstein-Rosen que representa uma onda com simetria cilíndrica, também são importantes para a Relatividade Geral. Existe também outra linha de soluções usadas no contexto da Cosmologia, que representa o espaço-tempo associado ao Universo. Dentre essas soluções, podemos destacar as soluções de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker que descreve um Universo homogêneo e isotrópico em expansão. As soluções que descrevem o campo gravitacional de um corpo com simetria axial representam um papel importante, tanto na teoria da gravitação de Newton, como na teoria da gravitação de Einstein, já que a forma natural de um fluido isolado auto-gravitante tem simetria axial [4]. As soluções das equações de Einstein que descrevem a geometria do espaço-tempo em torno de uma distribuição de matéria em rotação foram encontradas em 1963 por Roy Kerr e são conhecidas como solução de Kerr [6]. A distribuição de matéria representada pela métrica de Kerr gira com uma velocidade angular constante. Portanto, o espaço-tempo em torno de um buraco negro em rotação é representado pela solução de Kerr e sua forma e tamanho dependem apenas de sua massa e de sua rotação. Se não houver rotação, a solução é idêntica à de Schwarzschild. Apesar de muitas tentativas e alguns resultados parciais, ninguém conseguiu adaptar a métrica de Kerr a uma solução válida para o interior de uma distribuição de matéria em rotação. Se qualquer solução interior existir, deve ser uma solução na qual a velocidade angular é suficientemente pequena para que termos de segunda ordem ou de ordem superior sejam desprezados [7].

No capítulo 2 da presente dissertação fazemos uma breve introdução da Relatividade Geral e apresentamos as relações fundamentais que usaremos no desenvolvimento dos outros capítulos. No capítulo 3 desenvolvemos as equações de campo da Relatividade Geral em uma forma linear, ou seja, na aproximação de campo fraco. Em seguida encontramos as soluções destas equações para uma distribuição de matéria em repouso

e para uma distribuição de matéria em rotação. Nossa solução é apenas uma aproximação da solução de Kerr, uma vez que fizemos uma pequena perturbação na métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, a qual descreve o espaço-tempo plano da Relatividade Restrita. Nossa métrica com esta pequena perturbação representa um campo gravitacional fraco da Relatividade Geral.

O objetivo do capítulo 4 é descrever a analogia da Gravitação com o Eletromagnetismo, a qual é conhecida como gravitomagnetismo. Escrevemos as equações de movimento da Relatividade Geral em uma forma similar às equações de Maxwell e da força de Lorenz do Eletromagnetismo. Os efeitos associados à rotação de uma distribuição de matéria, conhecidos como gravitomagnéticos, podem ser descritos usando uma analogia formal da Gravitação com o Eletromagnetismo. A idéia é que uma distribuição de matéria em rotação produz um campo chamado, por analogia com o Eletromagnetismo, gravitomagnético. No capítulo 5 deduzimos o efeito Lense-Thirring, o efeito de Sitter e o efeito relógio gravitomagnético usando a aproximação de campo fraco da Relatividade Geral. O efeito Lense-Thirring e o efeito relógio gravitomagnético formam uma classe de previsões da teoria da Relatividade Geral, a qual afirma que a curvatura do espaço-tempo é produzida não somente pela distribuição de massa-energia, mas também pelo seu movimento [8].

No capítulo 6 apresentamos as medidas do efeito Lense-Thirring obtidas por meio das análises dos dados do satélite LAGEOS (LAsER GEODynamics Satellite) e da missão Sonda Gravidade B (Gravity Probe B - GPB). A magnitude prevista para o efeito Lense-Thirring é muito pequena, o que dificulta sua medida, como veremos no capítulo 6.

CAPÍTULO 2

RELATIVIDADE GERAL

"Deixe o Espírito Santo agir em você."

Padre Pio

Na Relatividade Geral, a gravidade surge como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, ou seja, são os efeitos da curvatura que observamos como campo gravitacional. A interação entre a matéria e o espaço-tempo é tal que a matéria curva o espaço-tempo, e este por sua vez define a trajetória de uma partícula de acordo com a sua estrutura geométrica. Apesar de brilhante e inovadora, a Relatividade Geral é considerada uma teoria extremamente complexa. As equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu},$$

relacionam a geometria de um dado espaço-tempo à sua distribuição de matéria. No lado esquerdo temos o tensor de Einstein ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$), o qual é definido em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (que descreve a geometria do espaço-tempo) e suas derivadas, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R . No lado direito temos a constante de acoplamento $\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$ entre o campo e a geometria; o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ contém em sua estrutura matemática todas as informações referentes à energia e aos momentos do campo. Um fato interessante é que o tensor de Einstein obedece a uma equação de conservação;

$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$, um resultado de natureza puramente geométrico oriundo das chamadas identidades de Bianchi, independente da geometria em questão. Consequentemente o tensor $T_{\mu\nu}$ construído para representar uma dada distribuição de matéria, deve obedecer também a uma lei de conservação $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. A Relatividade Geral se fundamenta em alguns princípios e conceitos fundamentais, entre eles destacamos:

- Princípio Geral da Relatividade: as leis da Física devem ser as mesmas em referenciais inerciais ou não inerciais.
- Princípio da Covariância Geral: as leis da Física devem permanecer inalteradas para transformações de coordenadas gerais.
- Princípio da Equivalência: em cada ponto do espaço-tempo é possível estabelecer um sistema de referência localmente inercial, no qual os princípios da Relatividade Restrita são válidos.

Quanto à verificação experimental da Relatividade Geral, os resultados obtidos a partir da descrição dos campos gravitacionais pelo tensor métrico se mostraram condizentes com testes experimentais, tais com o deslocamento de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional, o desvio de um feixe de luz que passa perto de uma estrela e a precessão do perihélio de Mercúrio.

2.1 Algumas relações fundamentais

Nesta seção apresentamos certas relações do campo da geometria diferencial que são fundamentais para a construção das equações de Einstein. Inicialmente, vamos definir a notação adotada ao longo desta dissertação.

- Convenção de Soma de Einstein: quando aparecem dois índices literais repetidos, está implícita a soma sobre todos os valores possíveis desses índices, a não ser que seja dito o contrário.
- Índices gregos têm valores que vão de zero a três (zero representa a coordenada tipo-tempo).

- Índices latinos representam valores que vão de um a três, simbolizando as três coordenadas espaciais.
- Uma linha (') representa diferenciação total com respeito à variável independente explícita da função que recebe esse símbolo.
- A assinatura usada será $(-, +, +, +)$.

2.1.1 O Tensor Métrico

O tensor métrico é utilizado para expressar o conceito de intervalo do espaço-tempo. Ele pode aparecer nas seguintes formas:

- Covariante: $g_{\mu\nu}$
- Contravariante: $g^{\mu\nu}$
- Misto: $g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$

onde δ_{μ}^{ν} é o delta de Kronecker.

Esse tensor descreve a métrica pela relação com o quadrado do elemento de linha por meio de:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.1)$$

2.1.2 O Tensor de Curvatura

O tensor de Riemann é a quantidade geométrica que nos informa sobre a curvatura do espaço-tempo. Esse tensor é definido como

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\kappa,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}. \quad (2.2)$$

As conexões, os símbolos de Christoffel, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, são dadas em termos da métrica e suas

derivadas

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.3)$$

A nulidade de todas as componentes do tensor de Riemann implica que a forma métrica fundamental descreve uma variedade plana, o que significa que não há a presença de um campo gravitacional (ver demonstração em [2]).

Outro tensor fundamental é o tensor de Ricci. Este tensor é de segunda ordem, e é construído a partir da contração do tensor de Riemann [2, 9],

$$R_{\mu\kappa} = R_{\mu\nu\kappa}^{\nu}. \quad (2.4)$$

Este tensor é simétrico e possui a princípio um total de 10 componentes independentes, devido às propriedades de anti-simetria do tensor de Riemann. O tensor de Ricci está diretamente relacionado, via equações de Einstein, ao conteúdo físico do espaço-tempo representado pelo tensor energia-momento. Com a contração do tensor de Ricci, temos o escalar de curvatura, também conhecido como escalar de Ricci, definido por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

O escalar de curvatura é uma medida do "raio de curvatura" da variedade; para uma esfera bidimensional de raio $a = cte.$, temos $R = 2/a^2$. Tendo o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, pode-se montar facilmente o tensor de Einstein, um tensor de segunda ordem definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.6)$$

2.1.3 O Tensor Energia-Momento

Nas teorias de campo é possível definir um tensor de segunda ordem que condensa em sua estrutura matemática as informações referentes à energia e aos momentos

do campo. Assim definimos

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.7)$$

onde $\delta/\delta g^{\mu\nu}$ é a derivada funcional com respeito à métrica, $S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_M(g_{\mu\nu}, \phi)$ é a ação da matéria, g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$, L_M é a densidade lagrangiana da matéria e ϕ refere-se aos campos em geral. Cada componente deste tensor possui um significado físico:

- Componente temporal (T_{00}) \rightarrow densidade de energia do campo.
- Componente espaço-temporais ($T_{0i} = T_{i0}$) \rightarrow densidade de fluxo de momento e energia (quantidade de energia que atravessa a superfície $x^\nu = cte.$ por unidade de tempo).
- Componentes espaciais (T_{ij}) \rightarrow tensor pressão dos constituintes.

A equação (2.7) obedece a lei da conservação $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, a qual é uma generalização da lei de conservação da energia e do momento da Relatividade Restrita, para a Relatividade Geral.

CAPÍTULO 3

APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

"O Senhor Deus deu-me língua adestrada, para que eu saiba dizer palavras de conforto à pessoa abatida; ele me desperta cada manhã e me excita o ouvido, para prestar atenção como um discípulo."

Isaías 50,4

A Relatividade Geral se reduz à Relatividade Restrita na ausência de campos gravitacionais. Sendo assim, é possível dizer que a Relatividade Geral deve se aproximar da Relatividade Restrita para campos gravitacionais fracos. O estudo da aproximação de campo fraco para a teoria da Relatividade Geral é de grande importância, uma vez que os campos gravitacionais encontrados em muitos sistemas físicos são realmente fracos [10]. A maioria dos testes da Relatividade Geral é feita para o nosso sistema solar em regiões onde o campo gravitacional é fraco. Em geral nos referimos a este estudo como aproximação de campo fraco ou aproximação linear.

Apesar da solução de Schwarzschild (1.1) ser uma boa aproximação para a geometria fora de uma estrela, como o Sol, ou de um planeta, como a Terra, sabemos que na verdade esses corpos possuem rotação. Por isso, encontramos uma solução das equações de Einstein na aproximação de campo fraco que descreve a geometria fora de uma dis-

tribuição de matéria em rotação. Além disso, consideramos que a distribuição de matéria gira lentamente em torno de um eixo, o que nos permite usar as nossas soluções para uma distribuição de matéria de simetria esférica. Nossas soluções são apenas uma aproximação das soluções de Kerr e serão usadas para descrever o chamado campo gravitomagnético e obter, em aproximação de primeira ordem, os efeitos gravitacionais associados à esses campos.

3.1 Aproximação de Campo Fraco

Na teoria da Relatividade Geral, as equações de campo de Einstein são equações diferenciais de segunda ordem que relacionam o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ com a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$. Estas equações são escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde R e $R_{\mu\nu}$ denotam o escalar e o tensor de Ricci, respectivamente; c é a velocidade da luz no vácuo e G é a constante de gravitação universal.

Em um campo gravitacional fraco a curvatura do espaço-tempo é quase nula e a métrica que caracteriza esse campo pode ser expressa por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

com inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde as componentes de $h_{\mu\nu}$ são numericamente pequenas, isto é, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Assim, serão considerados apenas termos lineares em $h_{\mu\nu}$. A quantidade $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação na métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Para escrever as equações de campo de Einstein na aproximação de campo fraco é necessário encontrar o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R nessa aproximação. O tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho},$$

Na aproximação 3.2, considerando apenas termos de primeira ordem em h , as conexões podem ser escritas como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} (h_{\mu\rho,\nu} + h_{\nu\rho,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}), \quad (3.4)$$

e a expressão para o tensor de Ricci é

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu\lambda}^{\lambda} + h_{\nu,\mu\lambda}^{\lambda} - \square h_{\mu\nu} - h_{\lambda,\mu\nu}^{\lambda}) + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.5)$$

onde $\square = \eta^{\lambda\rho}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}$ é o operador d'Alambertiano. Podemos escrever a equação (3.5) em uma forma mais compacta, fazendo uma mudança de variável de $h^{\mu\nu}$ para $f^{\mu\nu}$, definindo

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - f^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

onde g é o determinante da matriz $g_{\mu\nu}$ construída a partir da equação (3.2). Encontramos, após alguns cálculos, que

$$h^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} f_{\lambda}^{\lambda}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (3.5), lembrando que $\eta_{\mu\nu}h^{\mu\lambda} = h_{\nu}^{\lambda}$, o tensor de Ricci em termos do campo $f_{\mu\nu}$ é escrito como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(f_{\mu,\nu\lambda}^{\lambda} + f_{\nu,\mu\lambda}^{\lambda} - \square f_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square f_{\rho}^{\rho} \right), \quad (3.8)$$

e o escalar de Ricci, dado por $R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, fica

$$R = \frac{1}{2} \left(f_{,\sigma\lambda}^{\sigma\lambda} + f_{,\rho\lambda}^{\rho\lambda} + \square f_{\rho}^{\rho} \right). \quad (3.9)$$

Agora podemos escrever as equações de campo de Einstein como

$$f_{\mu,\nu\lambda}^{\lambda} + f_{\nu,\mu\lambda}^{\lambda} - \square f_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}f_{,\sigma\lambda}^{\sigma\lambda} = \frac{16\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

É possível simplificar a equação (3.10) fazendo uma transformação de coordenada dada por [2]

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + b^{\mu}(x), \quad (3.11)$$

onde a função $b^{\mu}(x)$ deverá ser escolhida de forma que simplifique as equações de campo. No Eletromagnetismo, um procedimento análogo é usado; os potenciais são redefinidos

a menos de uma função e a liberdade de gauge nos permite desacoplar as equações de Maxwell. Queremos agora saber como fica a função $f'^{\mu\nu}$ sob a transformação (3.11). Para isto vamos definir

$$\sqrt{-g'}g'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - f'^{\mu\nu}. \quad (3.12)$$

De acordo com a regra geral de transformação de um tensor, $g'^{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma}, \quad (3.13)$$

onde $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}$ e $\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}$ são obtidos derivando a transformação (3.11). Podemos calcular $\sqrt{-g'}$ a partir da matriz construída da equação (3.13) com $g = |g_{\mu\nu}| = |g'^{\mu\nu}|^{-1}$ e substituindo os valores de $\sqrt{-g'}$ e $g'^{\mu\nu}$ em (3.12) encontramos que

$$f'^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} - b^{\mu,\nu} - b^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu} b_{,\lambda}^{\lambda}. \quad (3.14)$$

Derivando em relação a x^{ν} a equação (3.14) obtemos

$$f'_{,\nu}{}^{\mu\nu} = f_{,\nu}{}^{\mu\nu} - \square b^{\mu}. \quad (3.15)$$

Vamos agora usar a liberdade de coordenadas para escolher $\square b^{\mu} = f_{,\nu}{}^{\mu\nu}$; o que nos dá

$$f'_{,\nu}{}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.16)$$

Esta liberdade de coordenadas é também chamada de *condição harmônica* e é equivalente, na Relatividade Geral, à condição de Lorenz no eletromagnetismo. Substituindo (3.14) em (3.10) a equação de campo se torna:

$$\square f'_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} f'^{\kappa\lambda}_{,\kappa\lambda} - f'_{\mu,\nu\kappa} - f'_{\nu,\mu\kappa} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

Usando (3.16), a equação de campo (3.17) finalmente pode ser escrita (abandonando as linhas) como

$$\square f_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Resumindo, temos que o campo

$$f^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{,\lambda}^{\lambda}, \quad (3.19)$$

é obtido resolvendo-se a equação 3.18, sujeito a *condição harmônica* $f_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$. É notável a analogia das equações de campo 3.18, sob a condição (3.16), com as equações de Maxwell sob a denominada condição de Lorenz (gauge de Lorenz). As equações de Maxwell com termos de fonte são

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu, \quad (3.20)$$

e a condição de Lorenz

$$A_{,\mu}^\mu = 0, \quad (3.21)$$

ou seja,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.22)$$

onde $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$ é o 4-vetor potencial e $J_\mu = (\rho, \vec{J})$ é o 4-vetor corrente. Considerando essa analogia é possível escrever a solução para as equações de campo (3.18) como

$$f_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^2} \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{R}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{R}|}{c})}{|\vec{r}-\vec{R}|} d^3R, \quad (3.23)$$

onde a fonte do campo gravitacional, isto é, a distribuição massa-energia está localizada na posição \vec{R} e o ponto de observação é dado por \vec{r} . Detalhes sobre a obtenção da solução 3.23 são apresentados no apêndice A.

Com a finalidade de compreendermos melhor nossa solução para campo fraco, consideramos a seguir uma aplicação envolvendo uma distribuição estacionária de matéria. Em seguida, estudaremos os efeitos gravitacionais que surgem associados à rotação de uma distribuição de matéria.

3.1.1 Distribuição de Matéria em Repouso

O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ para uma distribuição de matéria cujas partículas

não interagem é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_x}{c} & \frac{v_y}{c} & \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} & \frac{v_x^2}{c^2} & \frac{v_x v_y}{c^2} & \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{v_y}{c} & \frac{v_y v_x}{c^2} & \frac{v_y^2}{c^2} & \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \frac{v_z}{c} & \frac{v_z v_x}{c^2} & \frac{v_z v_y}{c^2} & \frac{v_z^2}{c^2} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

onde ρ é a densidade de matéria [2].

Para uma distribuição de matéria em repouso, a única componente não nula do tensor energia-momento é $T^{00} = \rho$. Uma vez que esta densidade ρ é a única fonte do campo gravitacional, esse campo será estático. Por estático, entendemos que além de ser estacionário, isto é, $g_{\mu\nu,0} = 0$, as componentes $g_{0i} = 0$. Portanto, a equação de campo (3.18) torna-se

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_{00} &= -\frac{16\pi G\rho}{c^2}, \\ \nabla^2 f_{ik} &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

No limite não relativístico da aproximação de campo fraco, as equações de campo de Einstein com matéria reproduzem a equação de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$. Sendo assim, as soluções para as equações (3.25) são:

$$\begin{aligned} f_{00} &= -\frac{4\phi}{c^2}, \\ f_{ik} &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mas para um campo gravitacional fraco temos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

e da equação (3.7) obtemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}f^\lambda{}_\lambda. \quad (3.27)$$

As soluções para as equações de campo de Einstein para uma distribuição de matéria em repouso são obtidas substituindo as equações (3.26) em (3.27); o que nos dá

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right), \\ g_{ik} &= \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) \delta_{ik}, \\ g_{i0} &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

O elemento de linha é então

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{3.29}$$

As soluções (3.28) são válidas para dentro e fora da distribuição de matéria. O potencial gravitacional newtoniano para uma distribuição de matéria esfericamente simétrica com massa M é $\phi = -\frac{MG}{r}$ e a equação (3.29) toma a seguinte forma em coordenadas esféricas

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \tag{3.30}$$

onde definimos $m = \frac{MG}{c^2}$ e desprezamos termos da ordem de $\left(\frac{m}{r}\right)^2$. Observe que a solução de Schwarzschild dada por (1.1), a qual é uma solução exata para uma distribuição esférica de matéria em repouso, converge para (3.30) já que para um campo fraco podemos aproximar

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{2m}{r}. \tag{3.31}$$

3.1.2 Distribuição de Matéria em Rotação

Vamos considerar um corpo cilíndrico que gira lentamente com velocidade angular ω constante em torno do eixo $z = x^3$, como mostra a figura (3.1). O ponto Q está situado dentro do corpo em rotação e é localizado pelas coordenadas (X, Y, Z) , enquanto que o ponto P é localizado pelas coordenadas (x, y, z) e se encontra fora do corpo em rotação. A distância entre esses dois pontos é representada por $|\vec{r} - \vec{R}|$. Usaremos o sistema de coordenadas cilíndricas, no qual a velocidade tangencial $\vec{v} = v\hat{\theta}$, onde $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x}^1 + \cos \theta \hat{x}^2$.

Para $v \ll c$, manteremos apenas termos lineares em $\frac{v}{c}$. Neste caso as componentes domi-

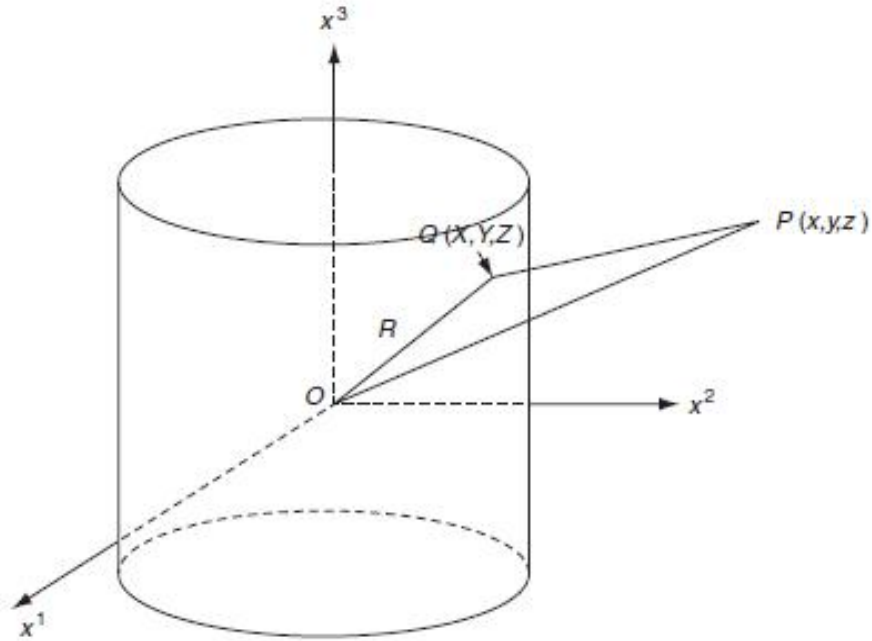


Figura 3.1: Corpo em rotação.

nantes do tensor energia-momento de 3.24 são

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho, \\ T^{01} &= -\rho \frac{v}{c} \sin \theta, \\ T^{02} &= \rho \frac{v}{c} \cos \theta, \end{aligned} \tag{3.32}$$

e as equações de campo (3.18) são

$$\square f_{00} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{00}, \tag{3.33}$$

$$\square f_{0i} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{0i}, \tag{3.34}$$

$$\square f_{ik} = 0. \tag{3.35}$$

Da equação (3.23) as soluções são, respectivamente,

$$f_{00} = \frac{4G}{c^2} \int \frac{T_{00}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3 R, \quad (3.36)$$

$$f_{0i} = \frac{4G}{c^2} \int \frac{T_{0i}}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3 R, \quad (3.37)$$

$$f_{ik} = 0. \quad (3.38)$$

Como não há dependência temporal na equação (3.36), uma vez que $T_{00} = \rho$, podemos reduzir a equação (3.33) a uma forma mais simples

$$\nabla^2 f_{00} = -\frac{16\pi G\rho}{c^2},$$

cuja solução foi encontrada na seção anterior e é

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right).$$

A solução (3.37), após uma expansão em série de Taylor da quantidade $|\vec{r} - \vec{R}|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2}\right)$ toma a forma

$$\begin{aligned} f_{0i} &= \frac{4G}{c^2} \int \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2}\right) T_{0i} d^3 R \\ &= \frac{4G}{c^2 r} \int T_{0i} d^3 X + \frac{4G}{c^2} \frac{x^j}{r^3} \int X_j T_{0i} d^3 X, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $j=1,2,3$ e $i=1,2$. O tensor energia-momento para $i=1$ pode ser escrito na forma

$$T_{01} = -\frac{\rho}{c} \frac{dX^1}{dt}.$$

Resolver a primeira integral de (3.39) é integrar $\frac{dX^1}{dt}$ sobre o movimento circular no plano (X^1, X^2) . Após a integral, a quantidade $\frac{dX^1}{dt}$, como pode ser verificado na figura (3.2a), terá dois sinais positivos e dois sinais negativos ao longo dos quatro quadrantes, portanto o primeiro termo da equação (3.39) não dará contribuições ao resultado final da integral. O segundo termo da equação (3.39) consiste de três integrais $X_1 \frac{dX^1}{dt}$, $X_2 \frac{dX^1}{dt}$ e

$X_3 \frac{dX^1}{dt}$. A quantidade $X_1 \frac{dX^1}{dt}$ assim como a primeira integral não terá contribuição, como pode ser observado na figura (3.2b). No entanto, $X_2 \frac{dX^1}{dt}$ terá uma contribuição não nula, ver figura (3.2c). A quantidade $X_3 \frac{dX^1}{dt}$, assim como $\frac{dX^1}{dt}$, não dará contribuição. Portanto

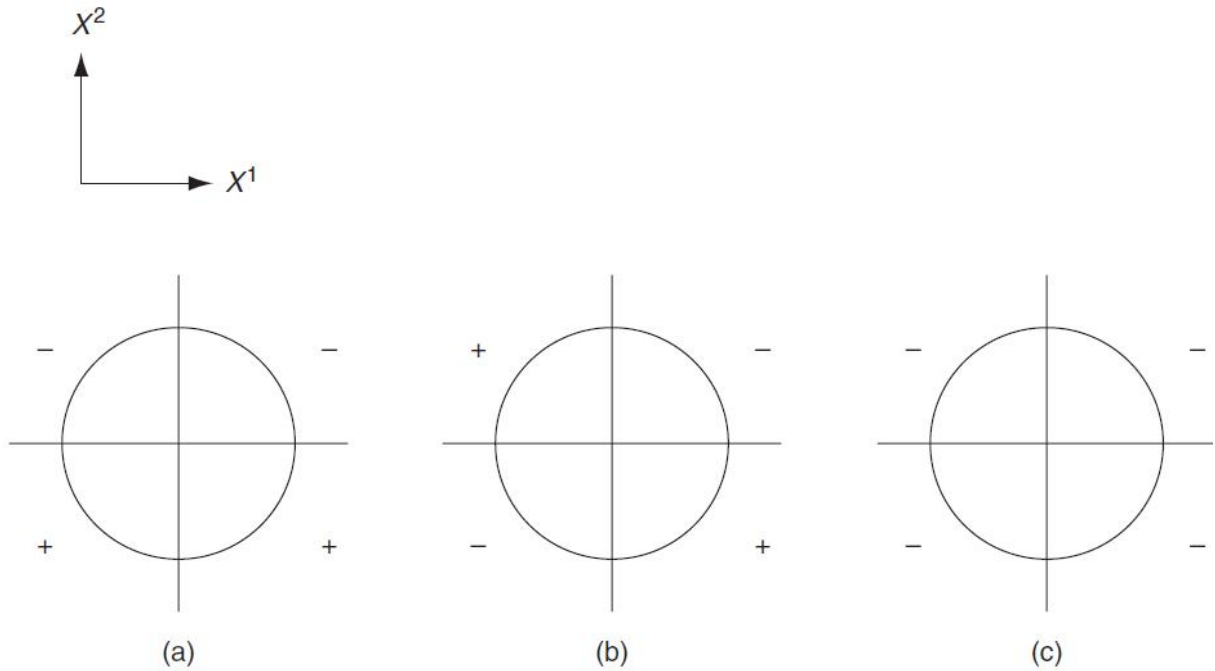


Figura 3.2: Os sinais das contribuições das integrais 3.39 nos quatro quadrantes. Figura extraída da referência [2]

a componente f_{01} é dada pela integral

$$f_{01} = -\frac{4Gy}{c^2 r^3} \int X^2 T^{01} d^3 X. \quad (3.40)$$

De maneira similar encontramos para a componente f_{02}

$$f_{02} = -\frac{4Gx}{c^2 r^3} \int X^1 T^{02} d^3 X, \quad (3.41)$$

onde $T_{0i} = -T^{0i}$. As integrais 3.40 e 3.41 podem ser relacionadas com o momento angular J^3 da fonte, conforme veremos a seguir.

O momento angular total $J^{\mu\nu}$ é dado em termos do tensor energia-momento como [11]

$$J^{\mu\nu} = c \int (X^\mu T^{0\nu} - X^\nu T^{\mu 0}) d^3 X, \quad (3.42)$$

onde a integração é feita sobre uma hipersuperfície espacial $x^0 = \text{constante}$. As componentes espaciais de 3.42 são

$$J^{ij} = c \int (X^i T^{0j} - X^j T^{i0}) d^3 X, \quad (3.43)$$

Como T^{0j} é a densidade da j -ésima componente de momento, podemos considerar J^{ij} como componentes espaciais do 3-vetor momento angular $\vec{J} = (J^1, J^2, J^3)$ onde

$$J^1 = J^{23} = c \int (X^2 T^{03} - X^3 T^{20}) d^3 X, \quad (3.44)$$

$$J^2 = J^{31} = c \int (X^3 T^{01} - X^1 T^{30}) d^3 X, \quad (3.45)$$

$$J^3 = J^{12} = c \int (X^1 T^{02} - X^2 T^{10}) d^3 X. \quad (3.46)$$

Se levarmos em conta que $T_{,\nu}^{\mu\nu} = T_{,0}^{\mu 0} + T_{,i}^{\mu i} = 0$; e que para simetria cilíndrica $T^{\mu 3} = 0$, ficamos com $T_{,1}^{\mu 1} + T_{,2}^{\mu 2} = 0$, já que para uma distribuição estacionária de matéria $T_{,0}^{\mu 0} = 0$. Multiplicando este resultado por $X^k X^m$ e integrando em todo espaço, temos

$$\int X^k X^m T_{,i}^{0i} d^3 X = 0. \quad (3.47)$$

Podemos reescrever a equação 3.47 como

$$\int [\partial_i (X^k X^m T^{0i}) - (\partial_i X^k) X^m T^{0i} - X^k (\partial_i X^m) T^{0i}] d^3 X = 0, \quad (3.48)$$

e pelo Teorema de Gauss a primeira integral se anula e ficamos com

$$\int (X^m T^{0k} + X^k T^{0m}) d^3 X = 0. \quad (3.49)$$

Fazendo $m = 1$ e $k = 2$ temos

$$\int X^1 T^{02} d^3 X = - \int X^2 T^{01} d^3 X, \quad (3.50)$$

substituindo (3.50) em (3.46) ficamos com

$$\frac{J^3}{2c} = \int X^1 T^{02} d^3 X = - \int X^2 T^{01} d^3 X. \quad (3.51)$$

Finalmente, substituindo esse resultado em (3.40) e (3.41), obtemos

$$f_{01} = \frac{2Gy}{c^3 r^3} J^3, \quad (3.52)$$

$$f_{02} = -\frac{2Gx}{c^3 r^3} J^3. \quad (3.53)$$

As soluções (3.52) e (3.53) são as soluções das equações de campo de Einstein para um corpo em rotação com simetria cilíndrica na aproximação de campo fraco, sendo válidas para fora do corpo em rotação. Para um corpo com simetria esférica as soluções (3.52) e (3.53) podem ser escritas numa forma geral como

$$f_{0i} = \frac{2G}{c^3 r^3} \epsilon_{ikm} x^k J^m, \quad (3.54)$$

onde ϵ_{ikm} é o símbolo anti-simétrico de Levi-Cívita, podemos dizer que o conjunto das soluções das equações de campo de Einstein para uma distribuição de matéria em rotação com momento angular \vec{J} na aproximação de campo fraco é

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right), \\ g_{ik} &= \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) \delta_{ik}, \\ g_{0i} &= \frac{2G}{c^3 r^3} \epsilon_{ikm} x^k J^m, \end{aligned} \quad (3.55)$$

com

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (3.56)$$

onde M é a massa total. Uma expressão compacta para o tensor métrico é dada na forma matricial por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & 1 - \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 \\ \zeta_2 & 0 & 1 - \frac{2\phi}{c^2} & 0 \\ \zeta_3 & 0 & 0 & 1 - \frac{2\phi}{c^2} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

onde fizemos $f_{0i} = \zeta_i$. Ressaltamos que essa não é uma solução exata das equações de campo de Einstein. A solução exata, que dá a métrica do espaço-tempo fora de um corpo

em rotação, foi obtida por Kerr [6] e dá as componentes (3.57) na aproximação apropriada. Os efeitos físicos associados aos potenciais g_{0i} são claramente consequências gravitacionais da fonte em rotação e não simplesmente consequências cinemáticas. Como previsto pela teoria da Relatividade Geral, a curvatura do espaço-tempo é produzida não só pela distribuição de matéria, mas também pelo seu movimento [8]. Estes efeitos são compreendidos, de uma maneira relativamente simples, usando uma analogia formal da Gravitação com o Eletromagnetismo. A idéia fundamental dessa analogia é que uma distribuição de massa em rotação produz um campo análogo ao campo magnético produzido por uma carga em movimento. Esses fenômenos são chamados efeitos gravitomagnéticos e serão abordados com mais detalhes a seguir. Do mesmo modo que a solução de Schwarzschild, a solução (3.55) está na base de alguns testes da Relatividade Geral. Os testes para esta solução incluem a precessão de um giroscópio em torno da Terra. O efeito que ocorre no plano orbital de um giroscópio foi estudado por Hans Thirring e Joseph Lense em 1918 e será discutido no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

GRAVITOMAGNETISMO NA RELATIVIDADE GERAL

“O que agrada a Deus, em minha pequena alma, é que eu ame minha pequenez e minha pobreza. É a esperança cega que tenho em sua misericórdia”.

Santa Terezinha do Menino Jesus

Na aproximação de campo fraco, as equações de campo da Relatividade Geral tem uma forte analogia com as equações de Maxwell do Eletromagnetismo. O chamado campo gravitomagnético, dado em termos das componentes g_{0i} do tensor métrico, está relacionado a correntes de matéria, da mesma forma que o campo magnético é associado ao movimento de cargas elétricas. Na verdade, as componentes g_{0i} surgem quando consideramos uma distribuição de matéria em rotação. Assim como no Eletromagnetismo o campo magnético produzido por uma esfera em rotação depende da sua velocidade angular, veremos que, também na teoria da Relatividade Geral na aproximação de campo fraco, essa dependência prevalece.

Nas seções seguintes mostramos a analogia das equações de movimento da Gravitação com as equações de Maxwell e com a força de Lorenz do Eletromagnetismo. Em seguida descrevemos o campo gravitomagnético de uma distribuição de matéria em rotação, tomando como caso particular a Terra. Os efeitos gravitomagnéticos discutidos aqui, os quais são da ordem de $(MG/Rc^2)(v/c) \cong 0,69 \times 10^{-9}(v/c)$, representam pequenas

correções na teoria newtoniana de gravitação e são muito difíceis de serem medidos.

4.1 Analogia da Gravitação e o Eletromagnetismo

A analogia entre a Lei da gravitação de Newton e a Lei de Coulomb da Eletricidade levou a uma descrição da teoria da gravitação de Newton em termos de um campo gravitoeletrico. Posteriormente, com o desenvolvimento do Eletromagnetismo, a descrição desta teoria não se limitou apenas a campos gravitoeletricos, mas também aos chamados campos gravitomagnéticos [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. O gravitomagnetismo é um fenômeno que consiste na interação gravitacional gerada pelo movimento de rotação de uma massa, da mesma forma que os fenômenos magnéticos são gerados a partir do movimento de cargas elétricas. Em geral o termo gravitomagnetismo é empregado para se referir aos efeitos gravitacionais envolvendo a precessão de giroscópios e partículas teste em órbita, os quais no âmbito da Relatividade Geral surgem de uma distribuição de matéria não-estática, ou seja, $g_{0i} \neq 0$ [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Em [33], Ciufolini propõe a distinção entre os efeitos gravitomagnéticos produzidos pelo movimento de translação de uma massa e aqueles produzidos pela rotação da mesma. Entretanto, nesta dissertação nos restringimos aos movimentos de rotação conforme descrito no capítulo 3, na aproximação linear.

4.1.1 Equações de Campo Tipo-Maxwell

O conjunto de equações que forma a base de todos fenômenos eletromagnéticos clássicos é conhecido como equações de Maxwell [34]

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E}_e &= 4\pi\rho_e, \\
 \nabla \cdot \vec{B}_e &= 0, \\
 \nabla \times \vec{E}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_e}{\partial t} &= 0, \\
 \nabla \times \vec{B}_e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_e,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde \vec{E}_e é o campo elétrico, \vec{B}_e é o campo magnético, ρ_e é a densidade de carga elétrica e \vec{J}_e

é a densidade de corrente elétrica. As equações (4.1) foram escritas no sistema gaussiano de unidades. Os campos elétrico \vec{E}_e e magnético \vec{B}_e podem ser definidos em termos do potencial eletrostático ϕ_e e do potencial vetor \vec{A}_e como

$$\vec{E}_e = -\nabla\phi_e - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$\vec{B}_e = \nabla \times \vec{A}_e. \quad (4.3)$$

Na seção 3.1 deduzimos as equações de Einstein na aproximação de campo fraco, ou seja

$$\square f_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

e observamos a analogia dessas equações sob a *condição harmônica*

$$f_{,\nu}{}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.5)$$

com as equações de Maxwell do Eletromagnetismo sob a condição de Lorenz. Agora queremos encontrar um conjunto de equações análogo a (4.1) na Relatividade Geral, que é conhecido como equações de campo tipo-Maxwell [14]. Para esse fim, vamos tomar a componente zero da equação (4.5) e, utilizando a equação (3.26), ficamos com

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi_g}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{A}_g}{4} \right) = 0, \quad (4.6)$$

onde fizemos $\phi_e = \phi_g$ e definimos o "potencial vetor gravitacional"

$$\vec{A}_g = \frac{2G}{c} \frac{\vec{r} \times \vec{J}}{r^3}, \quad (4.7)$$

sendo \vec{J} o momento angular da fonte. A equação (4.6) é o análogo gravitacional da condição de Lorenz do Eletromagnetismo, equação (3.22). De modo análogo ao que é feito no Eletromagnetismo, definimos os campos gravitoelétrico \vec{E}_g e gravitomagnético \vec{B}_g como [14]

$$\vec{E}_g = -\nabla\phi_g - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}_g}{4} \right), \quad (4.8)$$

$$\vec{B}_g = \nabla \times \vec{A}_g. \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.7) em (4.9) e realizando alguns calculos [35] podemos obter a seguinte expressão para o campo gravitomagnético \vec{B}_g .

$$\vec{B}_g = -\frac{G}{cr^3} \left[\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{J} \right]. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é o análogo gravitacional do campo magnético produzido por um dipolo magnético, o que nos leva a dizer que na Relatividade Geral o momento angular \vec{J} desempenha um papel similar ao do momento do dipolo magnético no Eletromagnetismo.

Podemos obter as equações de campo tipo-Maxwell homogêneas efetuando as operações $\nabla \times \vec{E}_g$ em (4.8) e $\nabla \cdot \vec{B}_g$ em (4.9), o que nos dá

$$\nabla \times \vec{E}_g + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}_g}{4} \right) = 0, \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_g = 0, \quad (4.12)$$

sendo (4.11) o análogo a Lei de Faraday e (4.12) o análogo a Lei de Gauss do Magnetismo. Uma das equações de campo tipo-Maxwell não-homogêneas pode ser obtida da equação (3.33), para $f_{00} = -\frac{4\phi_g}{c^2}$ e $T_{00} = \rho_g$, sendo ρ_g a densidade de matéria. Temos, então, a equação de onda para ϕ_g

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi_g = -4\pi G \rho_g. \quad (4.13)$$

Tomando a divergência de (4.8) e utilizando (4.6), ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{E}_g = -4\pi G \rho_g, \quad (4.14)$$

que é a primeira equação de campo tipo-Maxwell não-homogênea análoga à Lei de Gauss da Eletricidade. A outra equação pode ser obtida utilizando (3.34) lembrando que $T_{0i} = -\frac{\rho v_i}{c}$, ou seja, temos a equação de onda para \vec{A}_g

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_g}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A}_g = -\frac{8\pi G}{c} \vec{J}_g, \quad (4.15)$$

onde definimos a corrente de matéria $\vec{J}_g = \rho \vec{v}$. Aplicando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times$

$\vec{A}_g = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}_g) - \nabla^2 \cdot \vec{A}_g$, e utilizando (4.6) e (4.9), temos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_g}{\partial t^2} + \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi_g) + \nabla \times \vec{B}_g = -\frac{8\pi G}{c} \vec{J}_g. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.8) em (4.16), obtemos

$$\nabla \times \frac{\vec{B}_g}{4} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} = -\frac{4\pi G}{c} \vec{J}_g, \quad (4.17)$$

que corresponde a segunda equação tipo-Maxwell não-homogênea análoga à Lei de Ampère-Maxwell. Agrupando as quatro equações de campo tipo-Maxwell, temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_g &= -4\pi G \rho_g, \\ \nabla \cdot \vec{B}_g &= 0, \\ \nabla \times \vec{E}_g + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}_g}{4} \right) &= 0, \\ \nabla \times \frac{\vec{B}_g}{4} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} &= -\frac{4\pi G}{c} \vec{J}_g. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Observando o conjunto de equações (4.18), podemos concluir que é possível escrever as equações de campo da Relatividade Geral em uma forma semelhante às equações de Maxwell do Eletromagnetismo, quando consideramos a aproximação de campo fraco e baixa velocidade de rotação da fonte. As equações de campo de Einstein na forma (4.18) descrevem o campo gravitacional em torno de uma distribuição de massa em rotação em termos dos campos gravitoelétrico \vec{E}_g e gravitomagnético \vec{B}_g definidos por (4.8) e (4.9) respectivamente, tendo em conta (4.6). Podemos também escrever a métrica em termos dos campos se utilizarmos as equações (3.55) e (3.56), ou seja,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j - \frac{4}{c} dt (\vec{A}_g \cdot d\vec{r}). \quad (4.19)$$

4.1.2 Equação de Força Tipo-Lorenz

Para completar a analogia da Gravitação com o Eletromagnetismo, vamos considerar uma partícula submetida a um campo elétrico \vec{E}_e e um campo magnético \vec{B}_e dados

por (4.2) e (4.3). Uma partícula que se move com velocidade \vec{v} dentro desses campos experimentará uma força \vec{F} , conhecida como força de Lorenz, a qual é expressa por

$$\vec{F}_e = q \left(\vec{E}_e + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_e \right). \quad (4.20)$$

Tendo em conta (4.2) e (4.3), obtemos

$$\vec{F} = q \left[-\vec{\nabla}\phi_e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_e) \right], \quad (4.21)$$

e a aceleração da partícula é

$$\vec{a}_e = \frac{q}{m} \left[-\vec{\nabla}\phi_e - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_e) \right]. \quad (4.22)$$

Na teoria da Relatividade Geral a equação análoga a (4.22) é a equação da geodésica, a qual nos permite estudar o movimento de uma partícula teste. Considerando que uma partícula segue uma geodésica tipo tempo tal que $x^\mu = x^\mu(\tau)$, então

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (4.23)$$

Como queremos encontrar as acelerações $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$, com $x^i = x^i[t(\tau)]$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{dx^i}{d\tau} \right], \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-3} \frac{d^2 t}{d\tau^2} \frac{dx^i}{d\tau}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde usamos $\frac{d}{dt} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{d}{d\tau}$. Substituindo os termos $\frac{d^2 x^i}{d\tau^2}$ e $\frac{d^2 t}{d\tau^2}$ obtidos a partir da equação da geodésica (4.23) para $\mu = 0$ e $\mu = i$, na equação (4.24) temos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{\lambda\nu}^i \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma_{\lambda\nu}^0 \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^i}{dt}.$$

Fazendo $\nu, \lambda = 0$ e em seguida $\nu = k$ e $\lambda = m$ onde $k, m = 1, 2, 3$ as acelerações encontradas

são

$$a^i = -c^2\Gamma_{00}^i - 2c\Gamma_{0k}^i v^k - \Gamma_{km}^i v^k v^m + [c^2\Gamma_{00}^0 + 2c\Gamma_{0k}^0 v^k + \Gamma_{km}^0 v^k v^m] v^i. \quad (4.25)$$

Supondo que a partícula está sob a ação do campo gravitacional da Terra, podemos desprezar os termos ϕ^2 , $\phi\zeta_i$, $\zeta_i\zeta_k$ no cálculo das conexões a partir de (3.57), uma vez que para a Terra $\frac{\phi}{c^2} \approx 10^{-9}$ e $\zeta_i \approx 10^{-16}$. Desprezamos também o produto destes termos com suas derivadas espaciais e temporais. Portanto, encontramos para as conexões os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &\approx \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \nabla \phi, \\ \Gamma_{0k}^i &\approx \frac{1}{2} (\zeta_{i,k} - \zeta_{k,i}) - \frac{1}{c^3} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\ \Gamma_{km}^i &\approx \frac{1}{c^2} (\delta_{im} \nabla_k \phi - \delta_k^i \nabla_m \phi - \delta_m^k \nabla_i \phi), \\ \Gamma_{00}^0 &\approx -\frac{1}{c^3} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\ \Gamma_{0k}^0 &\approx \frac{1}{c^2} \nabla_k \phi, \\ \Gamma_{km}^0 &\approx -\frac{1}{2} (\zeta_{k,m} + \zeta_{m,k}) - \frac{1}{c^3} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Substituindo os valores das conexões na equação (4.25) obtemos

$$a_i = -\nabla_i \phi_g - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_g}{\partial t} - c(\zeta_{i,k} - \zeta_{k,i}) v^k,$$

onde desprezamos termos como $\frac{v}{c^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ e $\frac{v^2}{c^2} \nabla \phi$. Usando a definição (4.7), e também que ζ_i é dado por $\zeta_i = \frac{2G}{c^3 r^3} \epsilon_{ikm} x^k J^m$, esta última equação pode ser escrita na forma vetorial como

$$\vec{a}_g = -\vec{\nabla} \phi_g - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_g}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_g), \quad (4.27)$$

ou

$$\vec{F}_g = m \left[-\vec{\nabla} \phi_g - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_g}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_g) \right]. \quad (4.28)$$

Comparando (4.22) e (4.27), e lembrando que na gravitação o papel da carga elétrica q é desempenhado pela massa gravitacional, a qual é considerada igual à massa inercial, vemos mais uma vez uma forte analogia entre os dois formalismos, desde que façamos $\phi_e \rightarrow \phi_g$ e $\vec{A}_e \rightarrow \vec{A}_g$.

Para o caso estacionário a equação (4.27) dá

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi_g + \frac{2\vec{v}}{c} \times \vec{B}_g. \quad (4.29)$$

A conexão do campo gravitomagnético com a rotação pode ser observada a partir desta equação. De acordo com a mecânica newtoniana, quando um corpo se movimenta com velocidade \vec{v}' em um sistema de referência não inercial que gira com velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno de um eixo, verificamos que surge sobre o corpo uma força dada por $2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$ que é conhecida como força de Coriolis. Se além disto há sobre o corpo uma força aplicada $-m\vec{\nabla}\phi_g$, a aceleração resultante sofrida pelo corpo é descrita no referencial inercial como

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi_g - 2\vec{v}' \times \vec{\omega}, \quad (4.30)$$

onde \vec{a} é a aceleração no sistema de referência fixo e $-\vec{\nabla}\phi_g$ a aceleração gravitacional. O último termo da equação (4.30) é conhecido como aceleração de Coriolis e o efeito devido a essa aceleração é o efeito Coriolis. Esse efeito pode ser observado em um projétil próximo à superfície da Terra. No hemisfério norte o efeito Coriolis tende a desviar a direção inicial do movimento do projétil para a direita, como mostra o produto vetorial $\vec{v}' \times \vec{\omega}$. No hemisfério sul o desvio ocorrerá na direção oposta, isto é, para a esquerda e no equador o efeito é desprezível. De (4.29) e (4.30), é possível dizer que em um campo gravitomagnético \vec{B}_g produzido por um corpo em rotação, uma partícula em movimento dentro deste campo está submetida à uma força análoga a força de Coriolis.

4.2 Efeito Lense-Thirring como um Efeito Gravitomagnético

O efeito gravitomagnético mais famoso é o efeito Lense-Thirring, o qual é observado quando consideramos um corpo teste no campo de uma distribuição de matéria em rotação. Esse efeito foi derivado pela primeira vez em 1918 pelos físicos austríacos Hans Thirring e Josef Lense e por isso ficou conhecido como efeito Lense-Thirring. Eles previram a precessão do eixo de um giroscópio próximo a um corpo em rotação, como por exemplo a Terra. O arrastamento de sistemas inerciais, conforme será descrito detalhadamente no próximo capítulo, está intimamente relacionado com a existência do campo

gravitomagnético descrito na seção 4.1.1. Sendo assim, considerando a analogia da gravitação e do eletromagnetismo, o campo gravitomagnético produzido por um corpo esférico em rotação, como a Terra, é dado pela equação (4.10)

$$\vec{B}_g = -\frac{G}{cr^3} \left[\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{J} \right].$$

Um giroscópio em órbita em torno da Terra ficará sob a ação deste campo gravitomagnético. Sabemos do eletromagnetismo que o efeito de um campo magnético uniforme em um dipolo magnético é causar uma precessão no vetor momento angular. Por analogia, o giroscópio sofrerá um torque $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{c}\vec{L} \times \vec{B}_g$ que pode ainda ser escrito como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}, \quad (4.31)$$

onde \vec{L} é o momento angular do corpo e $\vec{\Omega}$ a velocidade de precessão. Portanto, $\vec{\Omega} = -\frac{\vec{B}_g}{c}$ ou

$$\vec{\Omega} = \frac{G}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{J} \right]. \quad (4.32)$$

Conforme veremos no próximo capítulo, a equação (4.32) dá origem ao arrastamento do plano orbital do giroscópio em torno da Terra em rotação, e por isso é muitas vezes chamado de "Arrastamento de Sistemas Inerciais"(Dragging of Inertial Frames) dos quais o giroscópio define um eixo. Esse efeito não é previsto pela gravitação newtoniana e é conhecido como efeito Lense-Thirring [36, 37].

CAPÍTULO 5

EFEITOS DA ROTAÇÃO: DESCRIÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL

*"A paz exige quatro condições essenciais:
verdade, justiça, amor e liberdade"*

Papa João Paulo II

Apesar da analogia das equações de Maxwell com as equações de Einstein para campo fraco fornecer uma base mais palpável para o entendimento dos efeitos gravitacionais da rotação, devemos lembrar que essa analogia somente é válida na aproximação linear e não é exata. É fundamental então que examinemos os efeitos gravitacionais de um corpo em rotação á luz da Relatividade Geral, a qual é a melhor teoria, até o momento, para a descrição do campo gravitacional. Veremos que além do efeito Lense-Thirring, surge também, devido à rotação, o efeito relógio gravitomagnético. Um outro efeito deduzido neste capítulo é a deriva geodética, conhecida como efeito de Sitter, que surge independentemente da rotação da fonte do campo gravitacional. O efeito Lense-Thirring, juntamente com o efeito de Sitter, foram verificados recentemente através da precessão de giroscópios em órbita terrestre. Nas seções seguintes explicamos esses efeitos dentro do contexto experimental usado para medi-los.

5.1 Precessão de Giroscópio

Em 1959 George E. Pugh [38] e em 1960, L. I. Schiff [39] sugeriram que um giroscópio em órbita em torno da Terra poderia ser usado para testar a teoria da Relatividade Geral. Schiff mostrou que o giroscópio em órbita em torno da Terra sofreria dois tipos de precessão com relação a um sistema de referência inercial. Um giroscópio é um corpo teste que mantém a direção do seu vetor momento angular de spin inalterada, quando livre de torques externos, em um espaço-tempo plano. Sendo assim, estudar o comportamento do spin de um giroscópio é uma forma de explorar a geometria do espaço-tempo. Nosso objetivo é encontrar a equação de movimento para o spin de um giroscópio em queda livre.

Na teoria da Relatividade Restrita o momento angular de spin \vec{S} é representado por um tensor anti-simétrico de segunda ordem $S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}$. Outra possibilidade é definir um 4-vetor S^α de maneira que no sistema de referência no qual o observador se encontra em repouso ele se reduz ao 3-vetor \vec{S} , isto é [40]

$$S_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} S^{\beta\sigma} U^\tau. \quad (5.1)$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}$ é o tensor de Levy-cívita anti-simétrico e $U^\tau = (\gamma, \gamma\vec{v}/c)$ é o 4-vetor velocidade. Consequentemente, usando o fato que $\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}$ é anti-simétrico em α e τ , obtemos

$$U^\alpha S_\alpha = 0. \quad (5.2)$$

Isto implica que os 4-vetores S_α e U^α são ortogonais em todos os sistemas de referência. Supondo que o 4-vetor S_α seja transportado paralelamente ao longo de uma geodésica cujo parâmetro é τ , temos

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda S_\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (5.3)$$

No entanto, estamos interessados em $\frac{dS_\alpha}{dt}$. Como $S_\alpha = S_\alpha[\tau(t)]$, podemos obter a sua parte espacial utilizando a equação (5.3) e abrindo as somas em λ e ν . Isto nos leva ao seguinte resultado

$$\frac{dS_i}{dt} = \Gamma_{i0}^0 S_0 \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{im}^0 S_0 \frac{dx^m}{dt} + \Gamma_{i0}^k S_k \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{im}^k S_k \frac{dx^m}{dt}. \quad (5.4)$$

Da equação (5.2), abrindo a soma em α , obtemos que

$$S_0 = -\frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt} S_i.$$

Sendo assim, para equação (5.4), temos

$$\frac{dS_i}{dt} = \left(-\Gamma_{i0}^0 \frac{dx^k}{dt} - \frac{1}{c} \Gamma_{im}^0 \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^k}{dt} + c\Gamma_{i0}^k + \Gamma_{im}^k \frac{dx^m}{dt} \right) S_k. \quad (5.5)$$

As conexões $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são calculadas por meio da equação (2.3), onde $g_{\mu\rho}$ são os potenciais gravitacionais. Para o cálculo de $g_{\mu\rho}$ as quantidades $\phi^2, \phi\zeta_i, \zeta_i\zeta_k$ serão desprezadas, uma vez que para a Terra, $\frac{\phi}{c^2} \approx 10^{-9}$ e $\zeta_i \approx 10^{-16}$. Estas quantidades não dependem diretamente do tempo, logo $g_{\lambda\rho,0} = 0$. O produto destas quantidades com suas derivadas parciais também serão desprezados. Obtemos portanto para as conexões os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i0}^0 &\approx \frac{1}{c^2} \nabla_i \phi, \\ \Gamma_{im}^0 &\approx -\frac{1}{2} (\zeta_{i,m} + \zeta_{m,i}), \\ \Gamma_{0i}^k &\approx \frac{1}{2} (\zeta_{k,i} - \zeta_{i,k}), \\ \Gamma_{im}^k &\approx \frac{1}{c^2} (\delta_{im} \nabla_k \phi - \delta_i^k \nabla_m \phi - \delta_m^k \nabla_i \phi). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Substituindo (5.6) em (5.5) e desprezando termos como v^2/c^2 , temos

$$\frac{dS_i}{dt} = \left[-\frac{1}{c^2} (\nabla_i \phi) v^k + \frac{c}{2} (\zeta_{k,i} - \zeta_{i,k}) + \frac{1}{c^2} (\delta_{im} \nabla_k \phi - \delta_i^k \nabla_m \phi - \delta_m^k \nabla_i \phi) v^m \right] S_k. \quad (5.7)$$

Na forma vetorial podemos escrever esta equação como

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{2}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{S}) \nabla \phi + \frac{1}{c^2} (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{S}) \vec{v} - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi) \vec{S} + \frac{c}{2} [\vec{S} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta})]. \quad (5.8)$$

É possível simplificar a equação (5.8) usando a condição de que o produto escalar é preservado no transporte paralelo, ou seja

$$\frac{d}{dt} (g^{\mu\nu} S_\mu S_\nu) = 0. \quad (5.9)$$

Abrindo a soma em μ e ν , e desprezando termos da ordem de $\frac{\zeta}{c}$ e $\frac{\phi}{c^4}$, chegamos na seguinte

expressão

$$\vec{S}^2 + \frac{2\phi}{c^2} \vec{S}^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{S})^2 = cte. \quad (5.10)$$

Introduzindo um novo vetor spin $\vec{\Sigma}$, tal que [2, 9]

$$\vec{S} = \left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right) \vec{\Sigma} + \frac{1}{2c^2} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{\Sigma}), \quad (5.11)$$

a equação (5.10) torna-se

$$\Sigma^2 = cte, \quad (5.12)$$

e de (5.11)

$$\vec{\Sigma} = \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \vec{S} - \frac{1}{2c^2} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{S}), \quad (5.13)$$

onde usamos aproximações como $\left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{\phi}{c^2}$, $\vec{v} \cdot \vec{\Sigma} \cong \vec{v} \cdot \vec{S}$ e desprezamos termos como $\frac{\phi}{c^4}$. O fato de $\vec{\Sigma}$ ser um vetor de magnitude constante, implica que sua variação $\frac{d\vec{\Sigma}}{dt}$ ocorrerá somente por mudança de direção. Sendo $\vec{\Sigma}$ o novo vetor spin, podemos encontrar a precessão procurada, a partir da derivada temporal de (5.13)

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} - \frac{1}{c^2} (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v}) \vec{S} + \frac{1}{2c^2} (\vec{v} \cdot \vec{S}) \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{2c^2} (\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{S}) \vec{v}, \quad (5.14)$$

onde usamos $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v}$ e $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\phi$ (isto é, a aceleração gravitacional) e desprezamos termos em $\frac{\phi}{c^2} \left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)$ e $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)$. Substituindo (5.8) em (5.14) temos

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = \frac{c}{2} [\vec{S} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta})] - \frac{3}{2c^2} [\nabla\phi(\vec{v} \cdot \vec{S}) - \vec{v}(\nabla\phi \cdot \vec{S})]. \quad (5.15)$$

Aplicando a identidade vetorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a})$ no termo entre parênteses, ficamos com

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = \vec{S} \times \left[\frac{c}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) + \frac{3}{2c^2} (\vec{v} \times \vec{\nabla}\phi) \right], \quad (5.16)$$

Definindo

$$\vec{\Omega} = -\frac{c}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}) - \frac{3}{2c^2} (\vec{v} \times \vec{\nabla}\phi). \quad (5.17)$$

Na ordem de aproximação usada podemos substituir \vec{S} no lado direito de (5.16) por $\vec{\Sigma}$,

obtemos então

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\Sigma}. \quad (5.18)$$

A equação (5.18) descreve a precessão do vetor $\vec{\Sigma}$ de magnitude constante, sendo $\vec{\Omega}$ sua velocidade de precessão. Substituindo os valores de ζ e ϕ (lembrando que $\zeta_i = f_{0i} = g_{0i}$) das expressões, (3.55) e (3.56) respectivamente, em (5.17) obtemos

$$\vec{\Omega} = -\frac{c}{2}\vec{\nabla} \times \frac{2G}{c^3} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{J} + \frac{3GM}{2c^2} \vec{v} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right),$$

ou

$$\vec{\Omega} = \frac{G}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{J} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{J} \right] + \frac{3GM}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v}. \quad (5.19)$$

O primeiro termo da expressão acima, conforme vimos antes, é a taxa de precessão Lense-Thirring (4.32). Para um corpo em rotação em torno de um eixo, o vetor momento angular \vec{J} segundo esse mesmo eixo pode ser dado por: $\vec{J} = I\vec{\omega}$, sendo I o momento de inércia e $\vec{\omega}$ a velocidade angular do corpo. Podemos, então, escrever a equação acima como

$$\vec{\Omega} = \frac{GI}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega} \right] + \frac{3GM}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v}, \quad (5.20)$$

e temos para a taxa de precessão Lense-Thirring $\vec{\Omega}_{LT}$

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{GI}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega} \right]. \quad (5.21)$$

O segundo termo é conhecido como deriva geodética ou efeito de Sitter,

$$\vec{\Omega}_{deSitter} = \frac{3GM}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v}, \quad (5.22)$$

tendo sido previsto por de Sitter em 1916. A diferença básica entre o efeito Lense-Thirring e o efeito de Sitter é que no primeiro caso a rotação da distribuição de massa produz uma deformação adicional no espaço-tempo [36]. O efeito de Sitter não depende da rotação $\vec{\omega}$, sendo um resultado da curvatura do espaço-tempo próximo a uma distribuição de matéria. Como consequência destes efeitos, um vetor, tal como o vetor momento angular de spin \vec{S} ao se deslocar no campo gravitacional, não será mais paralelo a sua orientação inicial ao completar um círculo [38]. Em particular, o sistema Terra-Lua pode ser considerado como um único corpo, que se move no campo gravitacional do Sol. Em outras

palavras, o sistema Terra-Lua é essencialmente um giroscópio no campo gravitacional do Sol. Para o sistema Terra-Lua, o efeito de Sitter, foi testado experimentalmente por Bertotti, Ciufolini e Bender em 1987, com uma precisão de aproximadamente 10% [41]; por Shapiro, Reasenberg, Chandler e Babcock em 1988, com uma precisão de 2% [42]; por Dickey *et al.* em 1989 com uma precisão de 2%; e Muller *et al.* em 1991 e Williams *et al.* em 1996 com uma precisão de aproximadamente 1% [43].

5.2 Efeito Relógio Gravitomagnético

Efeitos associados ao campo gravitacional devido à rotação da fonte, podem ser observados na diferença de tempo próprio de dois relógios em órbita terrestre. Para verificar esses efeitos, vamos considerar dois relógios inicialmente sincronizados em órbita em torno da Terra em direções opostas. Supondo que a Terra gira lentamente em torno do eixo z podemos escrever o elemento de linha em coordenadas cartesianas utilizando a matriz (3.57)

$$dS^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{4GJ}{r^3 c^3} (y dx - x dy) c dt + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.23)$$

onde fizemos $\phi = -\frac{GM}{r}$ e $\zeta_3 = 0$. Devido à simetria do problema, usaremos coordenadas esféricas, sendo o elemento de linha escrito como

$$dS^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GJ}{rc^3} \sin^2 \theta d\phi (c dt) + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.24)$$

O tensor métrico é escrito como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) & 0 & 0 & -\frac{2GJ}{rc^3} \sin^2 \theta \\ 0 & \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) & 0 \\ -\frac{2GJ}{rc^3} \sin^2 \theta & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

e seu determinante aproximaremos por

$$g \approx -r^4 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{4GM}{rc^2} \right). \quad (5.26)$$

Novamente usamos a aproximação para obter

$$g^{-1} \approx -\frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{4GM}{rc^2} \right), \quad (5.27)$$

e o tensor métrico contravariante

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{2GM}{rc^3} \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 \\ -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{2GM}{rc^3} & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Considerando uma órbita circular no plano equatorial, ou seja, $r = cte$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos

$$dS^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{4GJ}{rc^3} d\phi(cdt) + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) r^2 d\phi^2. \quad (5.29)$$

A equação da geodésica (4.23) para r é

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^1 \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (5.30)$$

Como no plano equatorial $\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = 0$ e $\frac{d\phi}{d\tau} = \omega \frac{dt}{d\tau}$ temos que

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 (c^2 \Gamma_{00}^1 + 2\omega c \Gamma_{03}^1 + \omega^2 \Gamma_{33}^1) = 0. \quad (5.31)$$

As conexões podem ser facilmente calculadas a partir da equação (2.3) e das matrizes

(5.25) e (5.28) e os resultados encontrados são

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &\approx \frac{GM}{r^2 c^2}, \\ \Gamma_{03}^1 &\approx \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{GJ}{r^2 c^3}, \\ \Gamma_{33}^1 &\approx -r \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right).\end{aligned}\quad (5.32)$$

Substituindo as conexões (5.32) em (5.31), e desprezando termos da ordem de $\frac{\phi}{c^2}$, a equação (5.31) toma a seguinte forma

$$\omega^2 + \frac{2GJ}{r^2 c^3} \omega - \frac{GM}{r^3} = 0, \quad (5.33)$$

que tem as seguintes soluções

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\left(\frac{GJ}{r^3 c^2}\right)^2 + \frac{GM}{r^3}} - \frac{GJ}{r^3 c^2}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\left(\frac{GJ}{r^3 c^2}\right)^2 + \frac{GM}{r^3}} + \frac{GJ}{r^3 c^2}.\end{aligned}\quad (5.34)$$

Essas soluções correspondem ao movimento retrógrado e progressivo, respectivamente e estão relacionadas ao tempo próprio de cada relógio. É possível, a partir da métrica (5.29), encontrar uma expressão para o tempo próprio, uma vez que $dS^2 = -c^2 d\tau^2$, $d\phi = \omega dt$ e para uma revolução $d\phi = 2\pi$, temos então

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) + \frac{4\pi G}{rc^2} J. \quad (5.35)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) + \frac{4\pi G}{rc^2} J. \quad (5.36)$$

Estamos interessados na diferença de tempo próprio, sendo assim vamos subtrair (5.35) de (5.36), ou seja

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right) 2\pi \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right). \quad (5.37)$$

Substituindo (5.34) em (5.37) e desprezando termos da ordem de $\frac{\phi}{c^2}$, obtemos

$$T_1 - T_2 \approx \frac{4\pi J}{Mc^2}. \quad (5.38)$$

Para $\vec{J} = \frac{2}{5}MR^2\vec{\omega}$, sendo $M = 5.98 \times 10^{24}kg$ a massa da terra, $R = 6.370km$ o raio da Terra e $\omega = 7,3 \times 10^{-5}rad/s$ a velocidade angular da Terra, temos

$$T_1 - T_2 = 1,7 \times 10^{-7}s. \quad (5.39)$$

A equação (5.38) manifesta o efeito relógio gravitomagnético ou atraso gravitomagnético dos relógios, conhecido como "gravitomagnetic time-delay" na literatura inglesa. Depois de uma revolução, os dois relógios, inicialmente sincronizados, irão diferir por um tempo da ordem de $1,7 \times 10^{-7}s$. É interessante notar que, nesta aproximação, a diferença temporal $T_1 - T_2$ é independente do raio da órbita e da constante gravitacional G .

Gronwald *et al.* [44] propõe uma missão denominada Gravity Probe C - (GPC), Sonda Gravidade C, que tem como objetivo medir o campo gravitomagnético da Terra utilizando o método descrito acima.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS EXPERIMENTAIS: SONDA GRAVIDADE B

"O primeiro passo na busca da verdade é a humildade. O segundo, a humildade. O terceiro, a humildade. E o último, a humildade!"

Santo Agostinho

Em geral, na física uma teoria é considerada consistente quando os testes experimentais/observações são realizados por diferentes pesquisadores independentes em diferentes laboratórios com metodologias diferentes [45]. Durante o século passado a Relatividade Geral foi alvo de muitos testes experimentais e, até o momento, ela apresenta resultados satisfatórios [36]. Entre esses testes podemos citar: o deslocamento de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional (redshift¹ gravitacional), precessão do perihélio de Mercúrio, deflexão da luz, efeito de Sitter e, inclusive, a confirmação do efeito Lense-Thirring. Recentemente, a Relatividade Geral foi testada pelo experimento Sonda Gravidade B, o qual foi desenvolvido com alta tecnologia e um custo de 750 milhões de dólares. Esse é o primeiro experimento que tem como um dos objetivos principais medir o efeito Lense-Thirring, o qual é extremamente pequeno para objetos do nosso sistema solar e medi-lo é uma tarefa que exige métodos precisos. No nosso sistema solar os efeitos

¹Desvio para o vermelho.

relativísticos são pequenas correções da teoria newtoniana, portanto medir o efeito Lense-Thirring em meio a uma série de efeitos clássicos é muito difícil [46, 47]. A seguir apresentamos as medidas do efeito Lense-Thirring do satélite LAGEOS² e dos giroscópios do teste Sonda Gravidade B.

6.1 Medidas dos Efeitos Lense-Thirring e de Sitter: O Teste da Sonda Gravidade B

A Sonda Gravidade B - Gravity Probe B (GPB) - é uma missão desenvolvida pela Universidade de Stanford e pela NASA (National Aeronautics and Space Administration), para testar, com uma precisão jamais obtida, os seguintes efeitos previstos pela Relatividade Geral de Einstein:

- O efeito de Sitter- devido à curvatura do espaço-tempo criada pela presença de um corpo massivo, como a Terra.
- O efeito Lense-Thirring- devido ao arrastamento do espaço-tempo em consequência da rotação da Terra.

A idéia de testar a Relatividade Geral com giroscópios em órbita foi sugerida independentemente por George Pugh em 1959 e por Leonard Schiff em 1960. Schiff, coordenador do Departamento de Física da Universidade de Stanford, discutiu suas idéias com dois colegas do Departamento de Física, os professores William Little e William Fairbank. O professor Robert Cannon, que havia chegado há pouco tempo na Universidade de Stanford, tinha experiência considerável com a mecânica de giroscópios e pretendia montar um laboratório no Departamento de Aeronáutica e Astronáutica em Stanford. Após uma reunião com Cannon, Fairbank e Schiff, surgiu a colaboração essencial dos dois departamentos para a realização do teste espacial da Relatividade Geral. Em janeiro de 1961, Fairbank e Schiff enviaram uma carta de três páginas para o Instituto de Ciências Espaciais (Office of Space Sciences) da NASA, propondo um possível experimento espacial para testar a Relatividade Geral usando giroscópios. Durante o primeiro ano de Nancy Roman

²Embora a existência do efeito Lense-Thirring seja confirmada na órbita do satélite LAGEOS, esse não era o objetivo da missão.

na NASA, o Instituto de Ciências havia recebido muitas propostas de testes espaciais inclusive a proposta de Fairbank e Schiff. Roman e outros pesquisadores da NASA estavam ansiosos para apoiar tal experimento, mas eram necessário físicos e engenheiros especialistas neste campo. Por iniciativa de Roman, uma conferência patrocinada pela NASA em testes espaciais, foi realizada na Universidade de Stanford de 20 a 21 de julho de 1961, da qual participou um grupo de físicos, engenheiros, Schiff, Cannon e dois estudantes de pós-graduação: Daniel DeBra, que estava concluindo o doutorado, e Benjamin Lange que era apenas um iniciante do curso de pós-graduação. Ambos eram alunos de Cannon. Em 1962, Fairbank encontrou Francis Everitt, um pesquisador da Universidade da Pensilvânia e o incentivou a ingressar em Stanford como primeiro membro a se dedicar exclusivamente ao teste espacial da Relatividade Geral. Durante este período, Fairbank e Cannon começaram a elaborar uma proposta mais detalhada para a NASA, a fim de obter o financiamento para o desenvolvimento de um satélite que orbitasse a Terra em queda livre sem sofrer os efeitos da pressão de radiação solar ou pressão atmosférica. Fairbank convidou Everitt para ajudar a elaborar essa proposta, que foi apresentada para a NASA em novembro de 1962, com Fairbank e Cannon como pesquisadores principais e Schiff como assessor do projeto. A proposta foi aceita e financiada pela NASA em novembro de 1963. Em 1966, Cannon deixou Stanford e Debra foi promovido para o cargo de pesquisador principal da área de Aeronáutica e Astronáutica. Debra atualmente é professor da Universidade de Stanford e continua como pesquisador principal do Departamento de Aeronáutica e Astronáutica. O teste do redshift gravitacional e este teste espacial foram denominados, Sonda Gravidade A e Sonda Gravidade B, respectivamente, em 1971 pela NASA.

Em 1977, a equipe do GPB acreditava que a parte teórica do experimento estava concluída e a NASA em 1980 convocou uma equipe para avaliar a estrutura tecnológica do GPB. Essa análise é chamada fase A do estudo do GPB. Em 1981, Francis Everitt havia se tornado a pessoa mais informada sobre todos os aspectos do experimento GPB. Por esse motivo ele foi promovido para cargo de pesquisador principal na área da Física e continua nesse cargo. Animados com os resultados da fase A, a NASA e Stanford realizaram um estudo muito mais detalhado, em 1982, chamado fase B. O custo para realizar o experimento era muito alto e inaceitável. Em 1983, Everitt, a NASA e a equipe de Stanford reestruturaram o projeto reduzindo o custo total do GPB sem sacrificar seus objetivos iniciais. Em 1994 todo o equipamento para colocar o experimento em prática estava pronto e a data prevista para o lançamento do satélite seria outubro de 2000. Durante este período, como

a construção do satélite estava em andamento, a equipe do GPB cresceu muito chegando a 300 pessoas. Os anos seguintes representaram um período crítico para o GPB e devido a alguns problemas inesperados, como a condução de calor dentro e fora da sonda, a data do lançamento foi adiada para abril de 2004.

Por alguma razão, George Pugh não foi convidado a participar da Conferência de 1961, embora sua proposta de 1959 de testar a Relatividade Geral usando giroscópio ter sido lida por Schiff na época. Apesar de Cannon e seus alunos estarem cientes da proposta de Pugh, devido às referências de Schiff, nenhum deles realmente leu ou viu a proposta até 1990. Aparentemente, Francis Everitt foi o primeiro membro da equipe do GPB, com exceção de Schiff, que realmente leu a proposta de Pugh³. Em 1989, após dar uma palestra sobre GPB, Everitt recebeu uma cópia do artigo de Pugh. Após a leitura, Everitt parabenizou Pugh pelo seu trabalho e o convidou para participar de uma festa de aniversário de Debra em julho de 1990, durante a qual Pugh deu uma palestra para toda a equipe do GPB sobre sua proposta de 1959. Assim, em 1990, a proposta de Pugh foi finalmente distribuída e lida por outros membros da equipe do GPB.

O GPB é o segundo experimento da NASA para testar a Relatividade Geral. O primeiro, Sonda Gravidade A, estudou o efeito do campo gravitacional sobre as medidas de tempo usando relógios de hidrogênio. Esse experimento, o redshift gravitacional, foi o primeiro teste da gravitação proposto por Einstein e é conhecido como um dos três testes clássicos da Relatividade Geral. A existência do redshift gravitacional decorre do princípio da equivalência, de modo que um relógio em um campo gravitacional é indistinguível de outro relógio idêntico em um referencial acelerado. A primeira medida precisa do redshift gravitacional, 1% de precisão, foi realizada por Robert Pound e Glen Rebka, em 1960, usando dois relógios atômicos em movimento vertical na torre da Universidade de Havard. O teste do redshift gravitacional mais preciso foi realizado por Vessot *et al.* [48] em 1976. A Sonda Gravidade A comparou o tempo decorrido em dois relógios de hidrogênio idênticos, um na Terra e o outro viajando por aproximadamente duas horas em um foguete. O satélite do Sonda Gravidade A foi lançado no dia 18 de junho de 1976 a uma altitude de 10.000 km em uma trajetória aproximadamente vertical. Esse experimento confirmou a previsão do redshift gravitacional com uma precisão de 0,02 %.

O satélite do Sonda Gravidade B foi lançado por um foguete Delta II em 20 de abril de 2004, da Base militar de Vandenberg, depois de mais de 44 anos de preparação. A

³Possivelmente, o desconhecimento da proposta de Pugh deve-se ao local não usual para a publicação de um artigo científico: Department of Defense Weapons Systems Evaluation Group; memo # 11 [38].

missão GPB consiste de um satélite em órbita polar em torno da Terra a uma altura de 642 km. A órbita precisa ser alta o suficiente para que o satélite esteja quase livre da atmosfera terrestre, mas próxima da Terra o suficiente para que os efeitos gravitomagnéticos sejam observados no satélite. O satélite do GPB carrega quatro giroscópios e um telescópio. O telescópio e o eixo de rotação de cada giroscópio foram alinhados com um sistema de referência por um ano. Em seguida, foram realizadas as medidas das mudanças do eixo de rotação de cada giroscópio no plano da órbita (precessão de Sitter) e perpendicular ao eixo de rotação da Terra (precessão Lense-Thirring).

Os quasares⁴ constituem um sistema de referência adequado para medir as variações no eixo de rotação dos giroscópios do GPB, uma vez que, estando a uma distância muito grande da Terra, suas posições são consideradas fixas. No entanto, a luminosidade dos quasares é demasiadamente fraca para qualquer telescópio óptico. Assim, o telescópio é alinhado com uma estrela próxima e mais brilhante cujo movimento pode ser mapeado em relação ao quasar. Entre as 1.400 estrelas analisadas, a estrela que foi escolhida como a estrela guia do GPB é a chamada IM Pegasi (HR8703)⁵, a qual está situada na nossa galáxia à uma distância de aproximadamente 300 anos-luz da Terra. Como a IM Pegasi é uma fonte de rádio, seu movimento próprio é monitorado pela tecnologia do telescópio de rádio, de modo que a variação no eixo de rotação dos giroscópios não é afetada pelo seu movimento próprio.

Os giroscópios do GPB são esferas com 3,81 cm de diâmetro, revestidas com uma fina camada de nióbio, um metal que se torna supercondutor a uma temperatura de $-263\text{ }^{\circ}\text{C}$. Os giroscópios ficam em uma câmara evacuada dentro de um tanque com 2.440ℓ de hélio a $-271,4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Para conhecer e acompanhar a orientação do eixo de rotação dos giroscópios o grupo da Universidade de Stanford se apoiou no fenômeno conhecido como momento London⁶. Quando uma esfera de metal supercondutor gira, ela cria ao seu redor um campo magnético. O eixo do campo magnético se alinha perfeitamente com o eixo de rotação da esfera. É o que acontece com os giroscópios da GPB, quando eles giram,

⁴Os quasares (Quasi Stellar Radio Sources) foram descobertos em 1961, como intensas fontes de rádio, com aparência ótica aproximadamente estelar, azuladas. Edwin Ernest Salpeter (1925-2008) e Yakov Borisovich Zeldovich (1914-1989) propuseram em 1964 que os quasares seriam, provavelmente, galáxias com buracos negros fortemente ativos no centro. Os quasares são objetos extremamente compactos e luminosos, emitindo mais energia do que centenas de galáxias juntas [49].

⁵A IM Pegasi é um sistema binário (HR 8703 e HD 216489) situado na constelação de Pegasus. A IM Pegasi (HR 8703) é uma estrela gigante tipo K, com $1,8M_{\odot}$ e temperatura de 4.800 K. A segunda estrela é tipo G e sua massa é da ordem da massa solar ($1M_{\odot}$).

⁶O momento magnético de um supercondutor em rotação com relação a um sistema de referência inercial é conhecido como momento magnético London.

criam um campo magnético cujo eixo coincide com o eixo de rotação. Portanto, para saber para qual direção o giroscópio aponta, é necessário monitorar a orientação do campo magnético. Isto é feito por um aparelho chamado SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) - dispositivo de interferência quântica - que é ligado ao giroscópio por um aro fino que o enlaça. Quando o eixo do giroscópio se inclina, o momento London do campo magnético se inclina também. O SQUID detecta essa variação na direção do campo magnético. O SQUID é capaz de detectar até uma variação de $5 \times 10^{-14} \text{gauss}$.

O objetivo do experimento GPB era medir o efeito de Sitter com uma precisão de 0,01% e o efeito Lense-Thirring com 0,1% [50]. O experimento GPB testou estes dois efeitos medindo precisamente a precessão de quatro giroscópios em órbita em torno da Terra por um período de um ano e comparou os resultados experimentais com os resultados previstos pela Relatividade Geral. Como vimos no capítulo 5, a taxa de precessão total de um giroscópio em torno da Terra em rotação, na teoria da Relatividade Geral de Einstein, é dada por

$$\vec{\Omega} = \frac{GI}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega} \right] + \frac{3GM}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v}, \quad (6.1)$$

onde o primeiro termo é o efeito Lense-Thirring e o segundo termo é o efeito de Sitter.

A magnitude do efeito Lense-Thirring é calculada tomando o valor médio da expressão

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{GI}{c^2 r^3} \left[\frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega} \right], \quad (6.2)$$

visto que o produto escalar $(\vec{\omega} \cdot \vec{r})$ varia para pontos diferentes da órbita. Considerando um movimento no plano XZ, temos que $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, $\vec{r} = r(\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{k})$ e conseqüentemente $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \omega r \sin \omega t$. Isto nos dá

$$\vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \omega r^2 (\cos \omega t \sin \omega t \hat{i} + \sin^2 \omega t \hat{k}). \quad (6.3)$$

de maneira que o valor médio

$$\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle = \frac{GI}{c^2 r^3} \left\langle \frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\omega} \right\rangle, \quad (6.4)$$

resulta em

$$\langle \vec{\Omega}_{LT} \rangle = \frac{GI}{c^2 r^3} \frac{\omega}{2} \hat{k}. \quad (6.5)$$

Com o momento angular da Terra dado por $\vec{J} = I\vec{\omega}$ ⁷, a expressão acima é escrita como

$$\langle \Omega_{LT} \rangle = \frac{GJ}{2c^2 r^3}. \quad (6.6)$$

Sendo assim, a magnitude do efeito Lense-Thirring para um giroscópio em órbita em torno da Terra (com momento angular $J = 5,861 \times 10^{33} m^2 kg \text{ rad}$ [52]) a uma altitude de aproximadamente $642 km$ e raio da órbita $r = 7.012 km$ é

$$\Omega_{LT} = 41 \text{ milissegundo de arco/ano}, \quad (6.7)$$

O segundo termo da equação (6.1) é conhecido como deriva Geodética ou efeito de Sitter.

$$\vec{\Omega}_{deSitter} = \frac{3GM}{2c^2 r^3} \vec{r} \times \vec{v}. \quad (6.8)$$

Sua magnitude para um giroscópio em órbita com velocidade $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ para $r = 7.012 km$ é

$$\Omega_{deSitter} = 6.606,1 \text{ milissegundo de arco/ano}. \quad (6.9)$$

sendo $M = 5.98 \times 10^{24} kg$ a massa da Terra e $R = 6.370 km$ o raio da Terra.

A taxa de precessão de Sitter $\vec{\Omega}_{deSitter}$ não depende da velocidade angular $\vec{\omega}$. Ela é a mesma em todas as órbitas de mesmo raio (polar, equatorial e intermediária). No entanto, a orientação do vetor spin \vec{S} na órbita é importante. Para estudar as direções das duas taxas de precessão, vamos supor um vetor unitário \vec{h} tal que $\vec{r} \times \vec{v} = |\vec{r} \times \vec{v}| \vec{h}$, ou seja, \vec{h} é perpendicular ao plano da órbita. Então $\vec{\Omega}_{deSitter} \sim \vec{h}$ e $\delta \vec{S}_{deSitter} \sim \vec{h} \times \vec{S}$. Para maximizar a precessão, \vec{S} deve estar no plano da órbita. Precisamos encontrar uma órbita na qual as duas taxas de precessão, de Sitter e Lense-Thirring, sejam medidas separadamente. Inicialmente, vamos considerar a órbita equatorial. Nessa órbita, $\vec{\Omega}_{LT} \sim \vec{\omega}$ e a precessão Lense-Thirring $\delta \vec{S}_{LT} \sim \vec{\omega} \times \vec{S}$ está no plano da órbita, no mesmo sentido da rotação. Isso está em acordo com a equação (6.5). A taxa de precessão de Sitter $\vec{\Omega}_{deSitter}$, como vimos anteriormente, é proporcional ao vetor \vec{h} , $\vec{\Omega}_{deSitter} \sim \vec{h}$, de modo que a precessão de Sitter $\delta \vec{S}_{deSitter} \sim \vec{h} \times \vec{S}$, na órbita equatorial, também está no plano da órbita, devendo se dar no mesmo sentido ou sentido contrário da rotação da Terra, dependendo do sentido do

⁷O momento de inércia da Terra pode, na equação (6.5), ser considerado como o momento de inércia de uma esfera, $I = \frac{2}{5} MR^2$, uma vez que, as correções no momento de inércia devido à não esfericidade da Terra são desprezíveis [51].

vetor velocidade \vec{v} do giroscópio. Em ambos os casos os dois efeitos serão paralelos ou antiparalelos, e portanto não conseguiremos medir as duas precessões separadamente. Na órbita polar, a precessão Lense-Thirring é igual ao caso estudado anteriormente. A precessão de Sitter na órbita polar, para um giroscópio que se move no sentido norte-sul, é perpendicular à precessão Lense-Thirring e seu sentido é norte-sul. Portanto, a órbita ideal para medir os dois efeitos separadamente é a órbita polar.

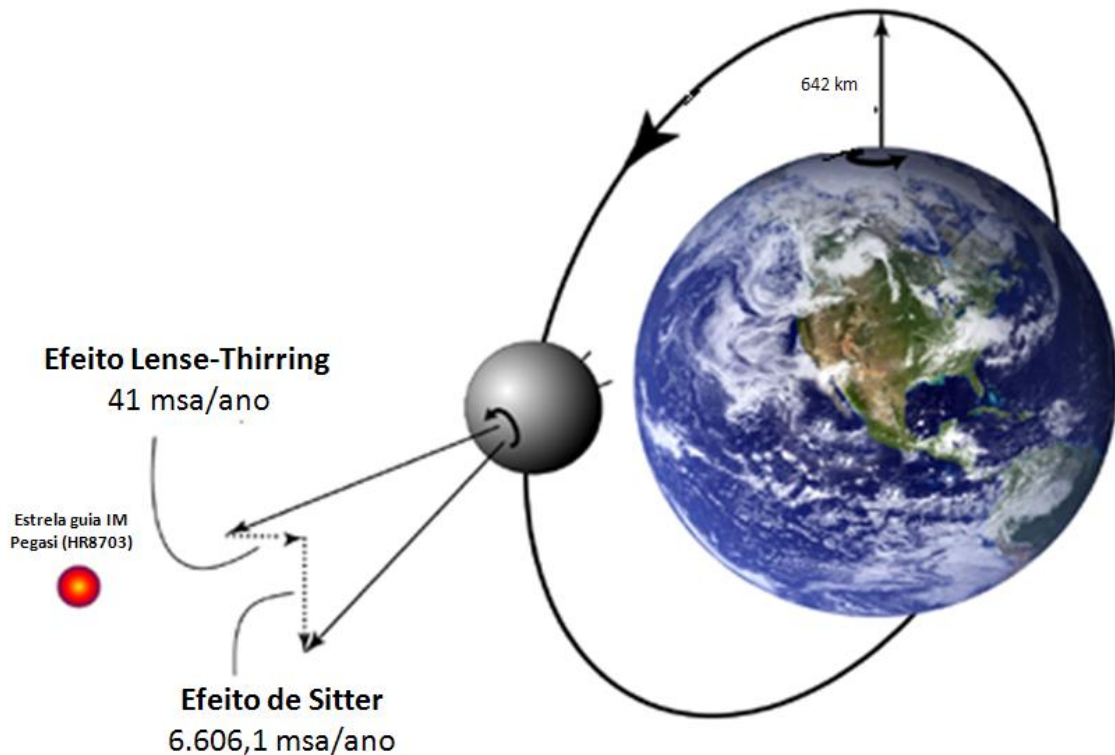


Figura 6.1: Os dois tipos de precessão do giroscópio em torno da Terra: Precessão Lense-Thirring (horizontal) e precessão de Sitter (vertical). Figura adaptada da referência [53]

As duas precessões previstas por (6.2) e (6.8) de um giroscópio em relação à estrela guia IM Pegasi (HR8703) são representadas esquematicamente na figura (6.1).

Em 14 de abril de 2007, após 18 meses de análises dos dados, foram apresentados os primeiros resultados do experimento GPB. O efeito de Sitter era claramente visível nos giroscópios GPB, confirmando as previsões de Einstein com uma precisão da ordem de 1,5 % [53]. A equipe da GPB explicou que os desvios dos resultados esperados surgiram dos torques produzidos no giroscópios [50]. Os resultados apresentados em setembro de 2009

Tabela 6.1: Tabela de resultados do teste Sonda Gravidade B. Tabela adaptada da referência [54]

Fonte	Efeito de Sitter (msa/ano)	Efeito Lense-Thirring (msa/ano)
Giroscópio 1	6.588,6±31,7	41,3±24,6
Giroscópio 2	6.707,0±64,1	16,1±29,7
Giroscópio 3	6.610,5±43,2	25,0±12,1
Giroscópio 4	6.588,7±33,2	49,3±11,4
Média	6.601,8±18,3	37,2±7,2
Previsão teórica	6.606,1	41,0

mostraram claramente a existência do efeito Lense-Thirring, o qual foi medido com uma precisão de aproximadamente 14%, e o efeito de Sitter também foi medido com uma precisão superior ao apresentado em 2007 [50]. Os resultados finais, apresentados na tabela (6.1), foram divulgados no dia 4 de maio de 2011 e o efeito Lense-Thirring é agora medido com uma precisão de aproximadamente 19%, enquanto o efeito de Sitter com aproximadamente 0,28 % de precisão [50, 54, 55]. A tabela (6.1) apresenta os resultados individuais dos quatro giroscópios combinados e o valor teórico previsto pela Relatividade Geral de Einstein.

O teste Sonda Gravidade B, embora não ter alcançado seu objetivo inicial, comprovou as previsões de Einstein no Sistema Solar, com precisão relativamente satisfatória, tendo em conta que os efeitos sofridos pelos giroscópios são minúsculos. Isso implica não só em uma grande conquista no campo da Física, em especial, com profundas implicações na astrofísica, como também em uma motivação para os físicos teóricos adeptos à Relatividade Geral de Einstein. Contestações futuras da Relatividade Geral, necessariamente, terá que apresentar resultados superiores aos apresentados pelo Sonda Gravidade B.

6.2 Outros Experimentos: Os Satélites LAGEOS

O LAGEOS (LAsEr GEOdynamics Satellite) I foi construído pela NASA e lançado em órbita em torno da Terra no dia 4 de maio de 1976, da base aérea de Vandenberg da Califórnia. O LAGEOS é basicamente uma esfera de alumínio de raio igual a 60 cm e massa 409 kg. O satélite é coberto por 426 superfícies refletoras. O objetivo da missão LAGEOS é realizar medidas que nos auxiliem na compreensão do movimento da crosta terrestre o que é particularmente útil para monitorar áreas sujeitas a terremotos. Para isso, o satélite

deve ser pesado o suficiente para minimizar os efeitos das forças não gravitacionais, mas leve o suficiente para ser colocado em alta órbita. O LAGEOS foi lançado em uma órbita quase circular com aproximadamente 5.800 km de altitude. Um segundo satélite, o LAGEOS II, foi lançado pela NASA e a ASI (Italian Space Agency), Agência Espacial Italiana, em 1992, em uma altitude de aproximadamente 5.800 km. A missão LAGEOS II é baseada na missão LAGEOS I. Existem planos para o lançamento do LAGEOS III, que é um projeto da França, Alemanha, Itália, Espanha e Estados Unidos. Os dados do LAGEOS III serão usados para medir os efeitos gravitomagnéticos como previsto pela Relatividade Geral [56].

O plano orbital de um planeta, da lua ou de um satélite, é um grande giroscópio que sofre os efeitos da Relatividade Geral, demonstrados no capítulo 4. O efeito Lense-Thirring no plano orbital dos satélites LAGEOS I e LAGEOS II é aproximadamente 31 milissegundo de arco/ano [57, 58, 59]. Para determinar este efeito na órbita de um satélite, precisamos medir com alta precisão a posição do satélite. Usando a técnica de variação de laser podemos medir com alta precisão a órbita dos satélites LAGEOS, e então o efeito Lense-Thirring pode ser também determinado. A técnica de variação de laser (laser-ranging) é ideal para medir distâncias de satélites artificiais como o LAGEOS. Essa técnica consiste em enviar raios laser para o satélite, seguido do reenvio do feixe por vários refletores colocados sobre o satélite. Medindo o tempo de ida e volta, é possível determinar a distância do satélite com alta precisão. O efeito Lense-Thirring pode ser medido de forma precisa na órbita do satélite LAGEOS se todas as perturbações orbitais forem controladas. Algumas fontes de erros, comuns a outros experimentos, podem ser divididas em duas categorias.

- Erros de perturbação gravitacional. Uma das principais perturbações nos planos orbitais do satélite LAGEOS é a simetria não esférica do potencial da Terra, o potencial gravitacional da Terra produz grandes perturbações no plano orbital do satélite.
- Erros de perturbação não gravitacional. Nesta categoria incluem-se a pressão de radiação solar, pressão de radiação da Terra, radiação térmica e radiação infravermelha.
- Erros na incerteza dos parâmetros da órbita do satélite e, particularmente, na inclinação da órbita.

A incerteza no campo gravitacional da Terra foi, em parte, superada em março

de 2002 quando a NASA enviou o satélite GRACE - Gravity Recovery and Climate Experiment - (Recuperação de [Dados sobre a] Gravidade e Experiência Climática) a uma altitude de aproximadamente 400 km. Segundo Ciufolini [60], o valor experimental do efeito Lense-Thirring estava, em 2003, dentro de aproximadamente 20% do que é previsto pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Posteriormente, ao analisar os dados do satélite LAGEOS em 2004, o efeito Lense-Thirring foi medido com uma precisão de 10% [36, 61].

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

"Ai da alma, se seu Senhor, o Cristo, nela não habitar! Abandonada, encher-se-á com o mau cheiro das paixões, virará moradia dos vícios".

São Macário

7.1 Conclusões

Nesta dissertação, após uma breve apresentação da Relatividade Geral, deduzimos as equações de Einstein na aproximação de campo fraco no capítulo 3, o que nos permitiu escrever as equações de campo em uma forma mais simples de serem resolvidas. Em seguida, encontramos as soluções dessas equações para uma distribuição de matéria em repouso. Encontramos também uma solução aproximada da solução de Kerr, ou seja, uma solução que descreve o espaço-tempo exterior a uma distribuição de matéria em rotação. Para nossa solução, consideramos que a distribuição de matéria girava lentamente, de modo que a simetria esférica pode ser preservada. Devido à rotação, encontramos em nossa solução termos cruzados da métrica, g_{0i} , e mostramos que esta componente tem

dependência direta com o vetor momento angular da fonte. Mostramos também que os efeitos físicos associados aos componentes $g_{0i} \neq 0$ do tensor métrico se manifestam como uma deformação adicional do espaço-tempo de uma distribuição de massa esféricamente simétrica em rotação. Esses efeitos são compreendidos, de uma maneira relativamente simples, usando uma analogia formal da Gravitação com o Eletromagnetismo.

No capítulo 4, após a definição de campos especiais, denominados campo gravitoelétrico e campo gravitomagnético, mostramos que as equações de Einstein tem uma forma similar às equações de Maxwell do Eletromagnetismo. Mostramos também que a equação de movimento de uma partícula sob a ação dos potenciais gravitoelétrico e gravitomagnético na Relatividade Geral tem a forma da força de Lorenz. Dentro dessa analogia, verificamos que o campo gravitomagnético produz efeitos semelhantes aos efeitos da força de Coriolis na gravitação newtoniana. Esse efeito, que recebe o nome Lense-Thirring, descreve o arrastamento de sistemas inerciais e é uma das previsões da Relatividade Geral. No capítulo 5, usando a Relatividade Geral na aproximação de campo fraco, deduzimos os efeitos Lense-Thirring (arraste dos referenciais inerciais), de Sitter (deriva geodética) e o efeito relógio gravitomagnético (atraso gravitomagnético dos relógios). Mostramos como o efeito Lense-Thirring pode ser medido com giroscópios em órbita em torno da Terra. Vimos que a taxa de precessão de Sitter, diferentemente da taxa de precessão Lense-Thirring, não depende do movimento da distribuição de matéria, mas apenas do movimento do corpo-teste no espaço-tempo curvo. Medir essas duas precessões separadamente foi o objetivo do teste Sonda Gravidade B.

No capítulo 6, mostramos os resultados experimentais obtidos para o efeito Lense-Thirring, tanto na órbita do satélite LAGEOS como no eixo dos giroscópios usados no teste Sonda Gravidade B. Nesse último, o efeito Lense-Thirring foi medido com uma precisão de aproximadamente 19% e o efeito de Sitter com aproximadamente 0,28 % de precisão.

7.2 Perspectivas

As equações de Einstein formam um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. No entanto, em circunstâncias especiais, quando o campo gravitacional é fraco, podemos escrevê-las como equações lineares. As soluções das equações de campo da Relatividade Geral linearizadas para uma fonte em baixa rotação nos per-

mitem estudar os chamados efeitos gravitomagnéticos: o efeito Lense-Thirring e o atraso gravitomagnético dos relógios. A aproximação de campo fraco não é restrita apenas à Relatividade Geral. A teoria de gravidade de Brans-Dicke [62], cujas equações de campo são também não-lineares, pode ser desenvolvida utilizando a aproximação de campo fraco. Os efeitos físicos associados às soluções dessas equações de campo, para uma distribuição de matéria que gira lentamente também podem ser estudados na teoria de Brans-Dicke. O valor teórico do efeito Lense-Thirring na teoria de Brans-Dicke é indistinguível, através de experimentos do tipo Sonda Gravidade B, do valor previsto pela Relatividade Geral [63, 64, 65, 66]. No entanto, na teoria de Brans-Dicke, a equação de movimento de uma partícula sob a ação dos potenciais gravitoelétrico e gravitomagnético não tem a forma da força de Lorenz, mesmo no caso estacionário, devido ao termo dependente do campo escalar [64].

Como perspectivas futuras deste trabalho, temos o seguinte:

- Ampliar a analogia com o Eletromagnetismo para movimentos gerais de massa, e não apenas movimento de rotação.
- Desenvolver a aproximação de campo fraco para teorias $f(R)$ de gravidade.
- Ampliar a aproximação linear das teorias $f(R)$ para fontes com rotação e estudar os efeitos análogos, Lense-Thirring e efeito relógio gravitomagnético, para essas teorias de gravidade.

REFERÊNCIAS

- [1] LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A. e MINKOWSKI, H. **Textos Fundamentais da Física Moderna**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.
- [2] RYDER, L. **Introduction to General Relativity**. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [3] FALCIANO, F. T. **Geometria, Espaço-tempo e Gravitação: Conexão entre Conceitos da Relatividade Geral**. Revista Brasileira de Ensino de Física, **31**, 4, 2009.
- [4] LETELIER, P. S. **Soluções Exatas das Equações de Einstein com Simetria Axial**. Revista Brasileira de Ensino de Física, **27**, 1, 2005.
- [5] KRAMER, D. et.al **Exact Solutions of Einstein's Field Equations**. New York: Cambridge University Press, 1980.
- [6] KERR, R. P. **Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics**. Physical Review Letters, **11**, 5, 237-238, 1963.
- [7] COHEN, J. M. **Note on the Kerr Metric and Rotating Masses**. Journal of Mathematical Physics, **8**, 7, p. 1477-1478, 1967.
- [8] HARTLE, J. B. **Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity**. New York: Addison Wesley, 2003.
- [9] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York: John Wiley and Sons, 1972.

- [10] PADMANABHAN, T. **Gravitation: Foundations and frontiers**. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [11] LANDAU, L. D. e LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. New York: Pergamon Press, 1987.
- [12] IORIO, L.; LICHTENEGGER, I. M.; RUGGIERO, M. L.; CORDA, C. **Phenomenology of the Lense-Thirring Effect in the Solar System**. arXiv:1009.3225v2 [gr-qc]
- [13] MASHHOON, B. **Gravitoelectromagnetism: A Brief Review**. arXiv:0311030v2 [gr-qc]
- [14] RUGGIERO, M. L. e TARTAGLIA, A. **Gravitomagnetic Effects**. Nuovo Cimento B, **117**, p. 743-768, 2002. arXiv:0207065v2 [gr-qc]
- [15] TARTAGLIA, A. e RUGGIERO, M. L. **Gravito-electromagnetism versus Electromagnetism**. Journal of Physics **25**, p. 203-210, 2004. arXiv:0311024v1 [gr-qc]
- [16] MALEKOLKALAMI, B. e FARHOUDI, M. **About Gravitomagnetism**. Modern Physics Letters A **24**, p. 601-613, 2009. arXiv:0610095v2 [gr-qc]
- [17] MASHHOON, B. e SINGH, D. **Dynamics of Extended Spinning Masses in a Gravitational Field**. Physical Review D **74**, 124006 p. 1 - 12, 2006.
- [18] TSUBELIS, D.; ECONOMOU, A. e STOGHIANIDIS, E. **Local and global gravitomagnetic effects in Kerr spacetime**. Physical Review D **36**, 4, p. 1045 - 1052, 1987.
- [19] SCHAFER, G. **Gravitomagnetic Effects**. General Relativity and Gravitation **36**, 2223, 2004. arXiv:gr-qc/0407116v1
- [20] TSUBELIS, A. et. al **Local and Global Gravitomagnetic Effects in Kerr Spacetime**. Physical Review D, **36**, 4, p. 1045-1053, 2007.
- [21] IORIO, L. **Gravitomagnetic Effects for Polar Circular Geodesic Orbits Around a Central Rotating Body**. Nuovo Cimento B, **118**, p. 243-248, 2003. arXiv:gr-qc/0203035v3
- [22] HERRERA, L. **On the Gravitomagnetic Effects in Cylindrically Symmetric Spacetimes**. Journal of Mathematical Physics, **42**, 10, p. 4956-4962, 2001.

- [23] VIRGILIO, A. D. et. al. **A Laser Gyroscope System to Detect the Gravitomagnetic Effect on Earth.** arXiv:1007.1861v1 [gr-qc]
- [24] WU, N **Coupling Between the Spin and Gravitational Field and the Equation of Motion of the Spin.** arXiv:0603104V1 [gr-qc]
- [25] IORIO, L. **On Possible a-priori "Imprinting" of General Relativity Itself on the Performed Lense-Thirring Tests with LAGEOS Satellites.** arXiv:1001.3446V1 [gr-qc]
- [26] PFISTER, H. **On the of the So-called Lense-Thirring Effect.** *General Relativity and Gravitation*, **39**, 11, p. 1735-1748, 2007.
- [27] STEDMANY, G. E. **Ring-laser Tests of Fundamental Physics and Geophysics.** *Reports on Progress in Physics*, **60**, p. 615688 , 1997.
- [28] MURPHY, T. W.; NORDTVEDT, K. e TURYSTHEV, S. G. **Gravitomagnetic Influence on Gyroscopes and on the Lunar Orbit.** *Physical Review Letters*, **98**, 071102, p.1-4, 2007.
- [29] NÚÑEZ, M. **Possibility of Kinematic Axisymmetric Dynamos near Rotating Black Holes.** *Physical Review Letters*, **79**, 5, p. 796-798, 1997.
- [30] NORDTVEDT, K. **Gravitomagnetic Interaction and Laser Ranging to Earth Satellites.** *Physical Review Letters*, **61**,23, p. 26472649, 1988.
- [31] RINDER, W. **The Case Against Space Dragging.** *Physics Letters A*, **233**, p. 25-29, 1997.
- [32] CHICONE, C. e MASHHOON. B. **Gravitomagnetic Jets.** *Physical Review D*, **83**, 064013 p.1 - 22 , 2011.
- [33] CIUFOLINI, I. **Gravitomagnetism, Frame-Dragging and Lunar Laser Ranging.** arXiv:0704.3338v2 [gr-qc]
- [34] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics.** Second edition. New York: John Wiley and Sons, 1983
- [35] MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo.** 2. ed. Ponta Grossa: UEPG , 2005.
- [36] CIUFOLINI, I. **Dragging of Inertial Frames.** *Nature*, **449**, p. 41-47, 2007.
- [37] ASHBY, N. **Frame-dragging Confirmed.** *Nature*, **431**, p. 918-919, 2004.

- [38] PUGH, G. E. **Proposal for a Satellite Test of the Coriolis Prediction of General Relativity**. encontrado em <http://einstein.stanford.edu/MISSION/mission2.html>.
- [39] SCHIFF, L. I. **Possible New Experimental Test of General Relativity Theory**. *Physical Review Letters*, **4**, 5, p. 215-217, 1960.
- [40] O'Connell R. F. **Rotation and Spin in Physics**. arXiv:1009.4401v1 [gr-qc]
- [41] CIUFOLINI, I. e WHEELER, J. A. **Gravitation and Inertia**. New Jersey: Princeton Series in Physics, 1995.
- [42] SHAPIRO, I. I.; REASENBERG, R. D.; CHANDLER, J. F. e BABCOCK, R. W. **Measurement of de Sitter Precession of the Moon: A Relativity Three-Body Effect**. *Physical Review Letters* , **61**, p. 2643-2646, 1988.
- [43] WILLIAMS, J. G.; NEWHALL, X. X. e DICKEY, J. O. **Relativity Parameters Determined from Lunar Laser Ranging**. *Physical Review D* , **53**, 12, p. 6730-6739, 1996.
- [44] GRONWALD, E. G.; GRUBER, E.; LICHTENEGGER, H. e PUNTIGAM, R. A. **Gravity Probe C_{lock} - Probing the Gravitomagnetic field of the Earth by means of a clock Experiment**. arXiv:9712054v1 [gr-qc]
- [45] IORIO, L. **On Some Critical Issues of the LAGEOS-based Tests of the Lense-Thirring Effect**. *Journal Modern Physics* **2**, p. 210-218, 2011. arXiv:1104.4464v1 [gr-qc]
- [46] STELLA, L. e POSSENTI, A. **Lense-Thirring Precession in the Astrophysical Context**. *Space Science Reviews*, **148**, p. 105-121, 2010.
- [47] BARKER, B. M. e O'CONNELL, R. F. **Effect of the Earth's Revolution Around the Sun on the Proposed Gyroscope Test of the Lense-Thirring Effect** . *Physical Review Letters* , **25**, 21, p. 1511-1512, 1970.
- [48] VESSOT, R. F. C. et. al. **Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser**. *Physical Review Letters*, **45**, 26, p. 2081-2085, 1980.
- [49] KEPLER, S.O. e SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004
- [50] Gravity Probe B website. <http://einstein.stanford.edu/> Acesso em: 06 junho. 2011

- [51] RUFFINI, R. J e SIGISMONDI, C. **Nonlinear Gravitodynamics The Lense-Thirring Effect**. New York: World Scientific, 2003.
- [52] website. <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/weekly/7Page83.pdf> Acesso em: 23 junho. 2011
- [53] EVERITT, C. W. F et al. **Gravity Probe B Data Analysis: Status and Potential for Improved Accuracy of Scientific Results**. *Classical and Quantum Gravity*, **25**, 114002, p. 1-11, 2008.
- [54] EVERITT, C. W. F. et. al **Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity**. *Physical Review Letters*, **106**, 221101, p. 1 - 5, 2011. arXiv:1105.3456v1 [gr-qc]
- [55] WILL, C. M. **Finally, Results from Gravity Probe B**. *Physics*, **4**, 43, 2011.
- [56] NASA website. <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/> Acesso em: 02 maio. 2011.
- [57] CIUFOLINI, I. e et. al **Towards a One Percent Measurement of Frame Dragging by Spin with Satellite Laser Ranging to LAGEOS, LAGEOS 2 and LARES and GRACE Gravity Models**. *Space Science Reviews*, **148**, 71-104, 2009
- [58] CIUFOLINI, I. **Measurement of the Lense-Thirring Drag on High-Altitude, Laser-Ranged Artificial Satellites**. *Physical Review Letters* , **56**, 4, p. 278-281, 1986.
- [59] CIUFOLINI, I. e PAVLIS, E. C. **A confirmation of the General Relativistic Prediction of the Lense-Thirring Effect**. *Nature*, **431**, p. 958-960, 2004.
- [60] CIUFOLINI, I. **Frame Dragging and Lense-Thirring Effect**. *General Relativity and Gravitation*, **36**, 10, p. 2257-2270, 2004.
- [61] O’CORNNEL, R. F. **A Note on Frame Dragging**. *Physical Review Letters*, **22**, 3815-3816, 2005.
- [62] BRANS, C. e DICKE, R. H. **Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation**. *Physical Review*, **124**,3, p. 925-935, 1961.
- [63] BARROS, A. e ROMERO, C. **On The Weak Feld Approximation of Brans-Dicke Theory of Gravity**. *Physics Letters A* **245**,p. 31-34, 1998. arXiv:9712080v1 [gr-qc]

- [64] SILVA, J. R. **Gravitomagnetismo no Contexto da Teoria Gravitacional de Brans-Dicke**. 2010. 77f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação em Física. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br>. Acesso em: 02 abril. 2011.
- [65] BARROS, A. e ROMERO, C. **Gravitomagnetic Time Delay and the Lense-Thirring Effect in Brans-Dicke Theory of Gravity**. *Modern Physics Letters A*, **18**, p. 2117-2124, 2003. arXiv:0304025v1 [gr-qc]
- [66] BARROS, A.; BEZERRA, V. B. e ROMERO, C. **On Some Aspects of Gravitomagnetism in Scalar-Tensor Theory of Gravity**. *Brazilian Journal of Physics*, **35**, 4b , 2005.
- [67] CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. Mc Graw-Hill, 1975.

APÊNDICE A

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA

Equações como 3.18 são exemplos de um tipo especial de equação conhecida como equação de onda. A equação de onda é uma equação de derivadas parciais que descreve a propagação de um sinal $\Psi(\vec{r}, t)$, sua estrutura matemática sendo dada por

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = F(\vec{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

onde $F(\vec{r}, t)$ é uma distribuição conhecida de fontes e c é a velocidade de propagação do sinal. Uma das formas de resolver a equação de onda com termos de fonte é pelo método de Green. Para determinar a função de Green vamos resolver a equação diferencial

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t) = -\delta(\vec{r})\delta(t). \quad (\text{A.2})$$

Usando transformada de Fourier a equação de Green se reduz a

$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^2}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\tilde{G}(\vec{k}, \omega)$ é a transformada de Fourier de $G(\vec{r}, t)$, isto é

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} G(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (\text{A.4})$$

Mas de (A.3)

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{c^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k^2 c^2 - \omega^2)}. \quad (\text{A.5})$$

Então

$$G(\vec{r}, t) = \frac{c^2}{16\pi^4} \int d^3\vec{k} \int d\omega \frac{e^{-i(\vec{r}\cdot\vec{r}-\omega t)}}{k^2 c^2 - \omega^2}. \quad (\text{A.6})$$

Quando não há superfícies de fronteira, a função de Green deve ter uma simetria esférica. Portanto, em coordenadas esféricas $d^3\vec{k} = k^2 \sin\theta d\theta d\phi dk$ a equação (A.6) toma a forma

$$G(\vec{r}, t) = \frac{c^2}{8\pi^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 c^2 - \omega^2} \int_0^\pi e^{ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta. \quad (\text{A.7})$$

Realizando a ultima integral a equação (A.7) se torna

$$G(\vec{r}, t) = \frac{c^2}{ir8\pi^3} \int_0^\infty k dk (e^{ikr} - e^{-ikr}) \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 c^2 - \omega^2}. \quad (\text{A.8})$$

A segunda integral pode ser calculada pelo método dos resíduos. Pelo Teorema de Cauchy-Goursat [67]

$$\oint \frac{dz e^{-izt}}{z_0^2 - z^2} = 0, \quad (\text{A.9})$$

onde fizemos $z_0 = kc$ e o caminho fechado escolhido para a integração é aquele mostrado na figura (A.1). Fazendo o raio do percurso tender para o infinito obtemos, pelo uso do Teorema dos Resíduos,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 c^2 - \omega^2} &= -\pi i \Sigma \text{ resíduos} \\ &= -\pi i (R_1 + R_2). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para o cálculo dos resíduos R_1 e R_2 nos pólos $\omega = \pm kc$ temos a função $f(z)$ dada por

$$f(z) = \frac{e^{-izt}}{z_0^2 - z^2}. \quad (\text{A.11})$$

A fórmula dos resíduos dos dá

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow -z_0} (z + z_0) f(z) = \frac{e^{iz_0 t}}{2z_0}. \quad (\text{A.12})$$

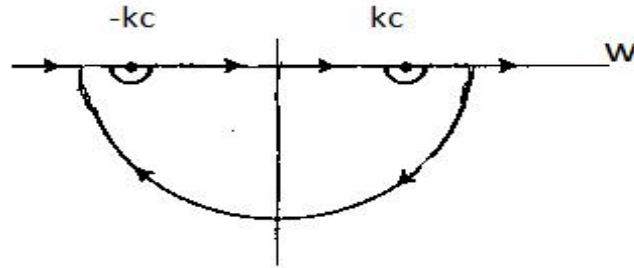


Figura A.1: Caminho de integração no plano complexo usado na integração da equação A.9.

Para R_2 temos

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = -\frac{e^{-iz_0 t}}{2z_0}. \quad (\text{A.13})$$

Sendo assim a segunda integral de (A.8) resulta em

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 c^2 - \omega^2} = -\frac{\pi i}{2z_0} (e^{iz_0 t} - e^{-iz_0 t}). \quad (\text{A.14})$$

Substituindo a equação (A.14) em (A.8) temos

$$G(\vec{r}, t) = -\frac{c}{16r\pi^2} \int_0^{\infty} dk (e^{ikr} - e^{-ikr})(e^{ikct} - e^{-ikct}). \quad (\text{A.15})$$

Efetuada a multiplicação dos parênteses e lembrando que é possível reescrever os limites de integração de 0 a ∞ para $-\infty$ a ∞ a equação (A.15) toma a seguinte forma

$$G(\vec{r}, t) = -\frac{c}{16r\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk [e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}]. \quad (\text{A.16})$$

Usando a representação para a função delta de Dirac

$$\delta(r + ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(r+ct)}, \quad (\text{A.17})$$

podemos escrever a equação (A.16) como

$$G(\vec{r}, t) = -\frac{c}{4\pi r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)]. \quad (\text{A.18})$$

Como para $t > 0$, $\delta(r + ct) = 0$, ficamos com

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t' \\ \frac{c}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta[|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t - t')] & \text{se } t > t' \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

A solução da equação de onda com o termo de fonte é dada por

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) &= - \int \int d^3r' dt' F(\vec{r}', t') G(\vec{r} - \vec{r}', t - t'), \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int d^3r' \int dt' F(\vec{r}', t') \frac{\delta[|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t - t')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Integrando em t' temos

$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{F(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (\text{A.21})$$

O tempo $\tau = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ é o tempo necessário para um sinal (perturbação de onda) viajar a distância $|\vec{r} - \vec{r}'|$ à velocidade c . No eletromagnetismo a função

$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{F(\vec{r}', t - \tau)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (\text{A.22})$$

é chamado potencial retardado porque o termo de fonte no integrando é avaliado em um tempo anterior $t - \tau$.

Generalizando para a notação de 4-vetores, ou seja, para a equação de onda obtida no capítulo 3 desta dissertação

$$\square f_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.23})$$

temos uma solução particular dada por

$$f_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^2} \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (\text{A.24})$$

A solução geral é a superposição de uma solução particular com a solução da equação de onda homogênea (sem termos de fonte).