Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT

A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos em uma abordagem para o Ensino Médio

Jorian Pereira dos Santos

Natal - RN, 30 de Agosto de 2016

Jorian Pereira dos Santos

A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos em uma abordagem para o Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Probabilidade e Teoria

dos Jogos

Orientadora

Professora Dra Débora Borges Ferreira

Natal, Agosto de 2016

Jorian Pereira dos Santos

A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos em uma abordagem para o Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Probabilidade e Teoria dos Jogos

Aprovado em / /

Banca Examinadora

Prof^{a} Dr^{a} Débora Borges Ferreira
Departamento de Matemática - UFRN

Prof^{o} Dr^{o}Fagner Lemos de Santana
Departamento de Matemática -

Prof^{o} Dr^{o}Thiago Prado
Departamento de Matemática -

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Santos, Jorian Pereira dos.
A teoria da probabilidade e a teoria dos jogos em uma abordagem para o ensino médio / Jorian Pereira dos Santos. - Natal, 2016.
v, 64f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Débora Borges Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Teoria da probabilidade – Dissertação. 2. Teoria dos jogos – Dissertação. 3. Jogos – Dissertação. 4. Ensino de probabilidade – Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 519.21

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus e aos meus familiares em especial a minha mãe Terezinha do Carmo Pereira e meu pai Joaquim Gomes dos Santos (in memorian), aos meus filhos Maria Emília de Medeiros Santos e Joaquim Gomes dos Santos Neto e a minha esposa Conceição Alvanuza da Silva Lima.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente ao meu bom e maravilhoso Deus, que me concede a oportunidade de acordar todos os dias e contemplar o quanto ele maravilhoso, agradeço também a minha mãe Terezinha do Carmo Pereira e ao meu pai Joaquim Gomes dos Santos (In Memorian), que na simplicidade de uma dona de casa e de um agricultor me educaram e me ensinaram a ser um cidadão. A minha irmã Mariza Pereira dos Santos, por ter sido uma incentivadora incondicional dos meus estudos, no nome da qual estendo aqui o meu agradecimento a todos os meus irmãos. Agradeço também a minha esposa Conceição Alvanuza da Silva Lima, que sempre me incentivou e me ajudou a superar os maiores obstáculos e aos meus filhos Maria Emília de Medeiros Santos e Joaquim Gomes dos Santos Neto, por serem presentes de Deus em minha vida.

Quero agradecer a todos os professores do Programa de Mestrado em Rede Nacional de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte da turma de 2014, dos quais destaco aqui a minha querida professora, orientadora e referência profissional, a professora Dr Débora Borges Ferreira, que com muita dedicação e respeito me ajudou a concluir mais essa etapa.

Agradeço também ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) por revolucionar no quesito capacitação de professores da educação básica. Quero agradecer também, ao Ministério da Educação, a CAPES e ao Governo Federal nos mandatos de Luíz Inácio Lula da Silva e Dilma Vana Rousseff que fomentaram o desenvolvimento do PROFMAT em todo Brasil.

Por fim, a todos os meus amigos e colegas que me ajudaram a concluir o mestrado profissional em Matemática em rede nacional. Deus abençoe a todos.

Resumo

Neste trabalho é proposta uma aplicação da Teoria dos Jogos e da Teoria da Probabilidade na educação básica como uma alternativa para o tratamento de interações que caracterizam-se por jogos e para o ensino de probabilidade na educação básica. Será apresentada uma introdução à história da probabilidade, bem como os fundamentos probabilísticos que norteiam as aplicações da teoria dos jogos a nível de ensino médio e, por fim, será proposta uma aplicação através de uma sequência didática que une tópicos das duas teorias no ensino de probabilidade.

Palavras-chaves: Teoria da Probabilidade. Teoria dos Jogos. Jogos. Ensino de Probabilidade.

Abstract

This work proposes an application of the game theory and probability theory in basic education as an alternative for the treatment of interactions which is characterized as games and for probability teaching. An introduction to the history of probability will be presented and the probabilistic foundations that guide applications in game theory to the high school level and, finally, it is proposed an application through a didactic sequence that unites topics of the two theories in teaching probability.

Keywords: Probability Theory. Games Theory. Games. Probability teaching.

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem por objetivo servir de material de apoio para professores de matemática do Ensino Médio que desejem relembrar os principais fundamentos da teoria da Probabilidade, entender a formalização da Teoria dos Jogos e apresentar sugestões de como aplicá-la juntamente com a probabilidade em sala de aula.

Para tanto, estudam-se situações de cotidiano e espera-se que os alunos reconheçam situações conflituosas que podem ser modeladas por Teoria dos Jogos. Uma das principais ferramentas dessa teoria é a probabilidade, que nos potencializa a determinar nível de incerteza de certos eventos e assim fundamentar argumentações a cerca dos mesmos.

A motivação para realização deste trabalho nasceu na necessidade do desenvolvimento de novas aplicações e metodologias para o ensino de matemática e em específico para a teoria da probabilidade. As dificuldades das escolas públicas na educação básica é um fator preponderante para os péssimos resultados nos exames nacionais e internacionais de avaliação da educação básica. Os fatores que influenciam este mau resultado são diversos e não é nosso objetivo investigá-los, no entanto é nosso dever propor estratégias que venham a minimizar tais dificuldades do ensino de probabilidade. O porquê de estudar matemática nunca foi tão ouvido pelos profissionais em educação. Tal fato revela o quanto as teorias são enfatizadas e o quanto as aplicações deixam de ser apresentadas como ferramenta motivacional para a aprendizagem.

A partir desta motivação a teoria dos jogos e a teoria da probabilidade compõe uma base para construção de uma nova proposta de aplicação das competências e habilidades para o ensino aprendizagem de probabilidade, levando em consideração o conhecimento científico, os fatores sociais e a formação cidadã. As aplicações da teoria da probabilidade estão em todas as áreas do conhecimento, fortalecendo seus conceitos teóricos básicos, para preparar os estudantes para as aplicações futuras. Uma destas aplicações está nos jogos que por sua vez tornou-se teoria através de Jhon Von Neumann e Oskar Mongenstern quando apresentaram diversas situações sócio econômicas que são modeladas através dos jogos. O objetivo era modelar interações entre dois ou mais personagens (jogadores) que interagem entre si com objetivos comuns, diversos ou estritamente opostos, através de confrontos simultâneos, sequenciais e(ou) repetitivos, demonstrando ao final seus ganhos para os quais se justificam todas as decisões tomadas durante a interação.

A teoria dos jogos teve seu desenvolvimento ligado aos avanços nos estudos probabilísticos em aplicações de situações problemas que remetem a confrontos. Um outro grande matemático que contribuiu significativamente para o desenvolvimento desta teoria foi Jhon Forbes Nash, que em seus estudos sobre equilíbrio analisou os jogos do ponto de vista dos personagens, propondo soluções ótimas para cada jogador de uma determinada interação, tal proposição ficou conhecida como Equilíbrio de Nash. Um fator importante para esta teoria são as soluções dos jogos, sendo estas estritamente dependentes das estratégias adotadas. Dentre as estratégias puras e mistas, as mistas se destacam como uma das principais aplicações de probabilidade pois há jogos que não possuem equilíbrio de Nash em estratégias puras, e uma alternativa é considerá-lo do ponto de vista probabilístico, isto é, o jogador deve escolher uma distribuição de probabilidade sobre suas estratégias puras.

A teoria dos jogos é fascinante em suas particularidades e capacidade de modelar situações de confronto, o fomento ao empreendedorismo, o respeito aos adversários ou interlocutores de opiniões adversas e a demonstração de que nos ganhos ou nas perdas as tomadas de decisões são fatores de implicação natural. Podemos afirmar então que a Teoria dos Jogos ajuda a formar cidadãos.

No primeiro capítulo desta dissertação é tratado o contexto histórico da teoria da probabilidade, mostrando em um pequeno resumo os principais fatos e personagens que contribuíram significativamente para a teoria da probabilidade e ajudaram a fazer desta teoria uma peça fundamental na formação profissional, cidadã e do desenvolvimento humano. Ainda no primeiro capítulo enfatizamos os principais resultados básicos da teoria da probabilidade que serão necessários para o bom desenvolvimento das aplicações da teoria dos jogos na educação básica, mostrando exemplos de aplicações na teoria dos jogos.

No segundo capítulo apresentamos a teoria dos jogos em seus fatores históricos, definições e características, formalizando o conceito de jogos e seus componentes destacando os jogos segundo suas soluções, estratégias e ganhos. Enfatizamos ainda os jogos sequenciais e suas representações em forma de diagramas em árvore como uma forma de demonstrar didaticamente a Teoria da Probabilidade no contexto dos jogos.

Finalizamos com o terceiro capítulo onde construímos uma sequência didática propondo a composição das duas teorias em aplicações que venham a propiciar uma nova oportunidade de apredizado de tópicos da teoria da probabilidade e introdução à teoria dos jogos de forma sucinta e adequada a este nível da educação.

As principais fontes que nortearam este trabalho foram: Teoria dos Jogos: com Aplicações em Economia, Administração em Ciências Sociais de Ronaldo Fiani (Rio de Janeiro editora CAMPUS, 2006) e Uma Introdução a Teoria dos Jogos de Humberto José Bortolossi (II Bienal da SBM. Universidade Federal da Bahia, 2004).

Capítulo 1

Introdução à Probabilidade

1.1 Um Resumo Histórico da Teoria da Probabilidade

Neste capítulo iremos apresentar um pequeno resumo dos principais fatos da história da teoria da probabilidade. Em sequência cronológica passearemos desde a pré história ao período moderno.

Segundo GADELHA[7] em *Uma Pequena História da Probabilidade*, a história da probabilidade caracteriza-se em cinco períodos: Pré-história, Origens, Maturação da Probabilidade Clássica, Escola de São Petersburgo e Período Moderno.

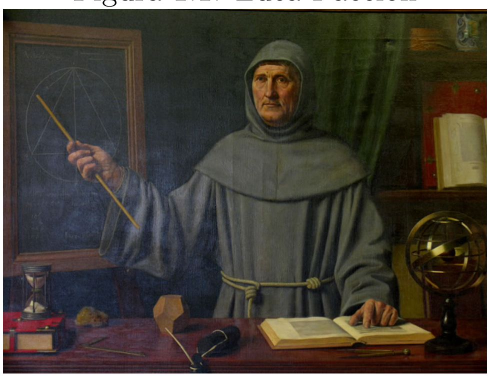
1.2 Pré-história

No primeiro período (Pré-história) foram encontrados registros de 3.500 anos a.C. em tumbas egípcias que mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados, feitos a partir do astragalus (osso do calcanhar), onde os jogadores tentam obter vantagens em uma disputa e evitam perdas advindas da imprevisibilidade. Com datação de 3.000 anos a.C. no norte do Iraque, foram encontrados dados de seis faces, provavelmente utilizados por habitantes daquela região em jogos regionais. Também é importante mencionar o uso do triângulo de Pascal por hindus, segundo registros que datam de 200 a.C. As raízes da probabilidade vão se desenvolvendo de forma empírica, baseadas na análise de resultados dos jogos de azar ou censos demográficos constituídos desde os grandes impérios.

1.3 Origens

A teoria matemática da probabilidade só ganha força no século XIV, com o trabalho de *Gerolamo Cardano* (1501 – 1576), no livro *Liber de Ludo Aleae*, "Livro de Jogos de Azar", onde Cardano define probabilidade de um evento como a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados para o caso equiprovável. Cardano influenciou vários trabalhos, por exemplo, o *Sopra le scorpeta dei dadi* ou "Sobre o jogo de dados" de *Galileo Galilei* (1564 – 1642), onde ele identifica aglomerações simétricas em torno de resultados verdadeiros e a probabilidade do erro decrescer com seu tamanho, sendo este, o precursor dos estudos sobre Distribuição Normal. Antes de Cardano, *Luca Paccioli* (1445 - 1514) propôs O Problema dos Pontos. Esse problema foi investigado por vários estudiosos, mas ganhou notoriedade após a análise e proposições de resultados dos franceses Pierre de Fermat e Blaise Pascal. O conceito fundamental de probabilidade, isto é, as chances de medir a ocorrência de um evento submisso ao acaso, surgiu com as correspondências trocadas por Fermat e Pascal. Ainda sobre este problema em 1556, Nicolo Tartáglia realizou cálculos de probabilidade e escreveu o trabalho *Tratado Geral Sobre Números e Medidas*.

Figura 1.1: Luca Paccioli



Fonte:https://lenta.ru/articles/2015/11/21/pacioli. Visita em 31 de Agosto de 2016, hora: 17:23

O problema dos pontos possui diversas variantes, abordaremos uma que consiste na seguinte situação:

Exemplo 1 *Os jogadores A e B estão em um jogo honesto de cara (C) e coroa (K), onde se ocorrer cara ganha o jogador A e coroa o jogador B. Eles concordam em continuar até que um deles vença n rodadas. O jogo é interrompido no momento em que para o jogador A restam a pontos para vencer e para o jogador B restam b pontos para a vitória. Supondo $a > b$ e a e b menores que n, como devem ser divididas as apostas?*

Fermat particularizou o problema apresentando uma solução onde o jogador A havia computado oito pontos e o jogador B sete pontos, em jogo que o jogador que atingir dez pontos vence o jogo, implicando em no máximo mais quatro rodadas para finalizar o jogo: ($n = 10$, $a = 2$ e $b = 3$) as tabelas representam as quatro jogadas restantes possíveis.

Tabela 1.1: Jogadas Favoráveis ao Jogador A

Jogadas	*Resultados*	*Jogadas*	*Resultados*
01	$CCCC$	06	$CCKK$
02	$CCCK$	07	$CKKC$
03	$CCKC$	08	$KKCC$
04	$CKCC$	09	$KCCK$
05	$KCCC$	10	$KCKC$
		11	$CKCK$

Tabela 1.2: Jogadas Favoráveis ao Jogador B

Jogadas	*Resultados*
01	$KKKK$
02	$KKKC$
03	$KKCK$
04	$KCKK$
05	$CKKK$

Pelo enunciado do problema a ocorrência do evento cara é favorável ao jogador A e a ocorrência do evento coroa é favorável ao jogador B. As Tabelas 1 e 2 apresentam 11 casos favoráveis para o jogador A e 5 para B. Fermat concluiu que o prêmio seria melhor dividido na razão 11/16 para o jogador A e 5/16 para o jogador B.

Pascal por sua vez apresentou a sua solução geral usando o artifício da análise combinatória, a partir do Triângulo Aritmético, onde apresentou uma solução genérica onde para a razão das partes do prêmio.

$$\frac{\text{Casos Favoráveis}}{\text{Casos Possíveis}} = \frac{\binom{a+b-1}{0} + \ldots + \binom{a+b-1}{b-1}}{\binom{a+b-1}{0} + \ldots + \binom{a+b-1}{a-1}}. \tag{1.1}$$

Em 1657 *Christiaan Huygens* (1629 – 1695), um estudioso da área de Ciências da Natureza e Matemática, publicou no apêndice do livro *Exercitationes Mathematicae* de *Frans van Schooten*, o Ratiociniis em Ludo Aleae ou *"Raciocínio em Jogos Aleatórios"*, considerada a primeira publicação da Teoria da Probabilidade. Em visita a Paris, Huygens tomou conhecimento das correspondências entre Pascal e Fermat e dos problemas por eles investigados, porém seguiu seus estudos e conseguiu resolver dezoito problemas ligados aos jogos de azar sem usar análise combinatória, os quais foram publicados em um livreto, que foi bastante utilizado na introdução à teoria da probabilidade até o século XVIII.

Figura 1.2: Christiann Huygens

Fonte: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Huygens.html, 31 de Agosto de 2016, as 17h e 31min

Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, também deu sua contribuição à probabilidade no trabalho de 1666 *Ars Combinatória* que propunha um modelo para descobrir verdades a partir de combinações de conceitos, analisando-os exaustivamente e metodicamente quanto às suas validades, sendo esta uma das origens da lógica computacional. A ideia de Leibniz era que todo raciocínio e descoberta podem ser reduzidos a uma combinação ordenada de elementos.

Figura 1.3: Gottfried W. Leibniz

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm, 31 de Agosto de 2016, as 18h e 03min.

1.4 Maturação da Probabilidade Clássica

Nesse período, vários cientistas, filósofos e pesquisadores de várias áreas do conhecimento contribuíram para o amadurecimento da Teoria da Probabilidade. As grandes contribuições iniciam-se a partir da obra *Ars Conjectandi* ou a *"Arte das Conjecturas"*, escrito pelo matemático suíço *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705). O livro apresentou a Lei dos Grandes Números[1], sendo esta sua principal contribuição para os estudos da probabilidade, porém, a conclusão e a publicação desta obra, só ocorreu após a sua morte, através do seu sobrinho *Nicolaus Bernoulli* (1687 – 1759) que editou e publicou em 1713. Em sua estrutura a Arte das Conjecturas apresenta quatro grandes pilares: no primeiro J. Bernoulli apresenta uma reedição do livreto de Huygens, o segundo foi intitulado de *"A Doutrina das Permutações e Combinações"*, no terceiro apresentou uma série de aplicações da teoria das combinações aos jogos de azar e no quarto e último aplicou a teoria da probabilidade em problemas cívicos, econômicos e morais. Já Nicolaus Bernoulli propôs um problema que posteriormente seria conhecido como *Paradoxo de São Petersburgo* e entraria para os Anais da Academia Imperial de São Petersburgo através do trabalho de seu primo *Daniel Bernoulli* (1700 – 1782).

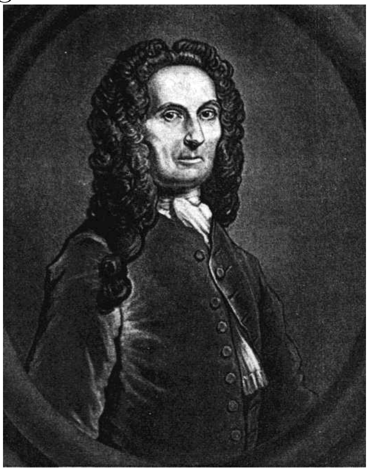
Johan Bernoulli, pai de Daniel, teve como aluno um dos principais matemáticos da história *Leonhard Euler* (1707 – 1783), que conviveu com a família Bernoulli durante sua juventude e entrou aos 19 anos na Academia de Ciências de São Petersburgo ocupando a vaga de Nicolaus Bernoulli (falecido). A partir desta oportunidade desenvolveu aplicações da teoria da probabilidade em estudos sobre loterias, demografia e seguros. A sua obra *"Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humain"*, ou Pesquisa Geral sobre a Mortalidade e Multiplicação da Humanidade, tornou-se a base da Demografia Matemática atual.

Ainda no período de Maturação da Probabilidade Clássica, o matemático francês *Abraham DeMoivre* (1667 – 1554) publicou o livro *Doctrine of Chances*, ou *"Doutrina das Chances"*, onde propôs frações geratrizes como soluções para equações diferenciais e indiretamente técnicas de redução de problemas da probabilidade a estas equações. DeMoivre também publicou estudos sobre a distribuição normal e apresentou uma prova para

[1]Se um evento de probabilidade p é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao total número de repetições converge em direção a p à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande.

a aproximação $n! \approx \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$. Bernoulli e DeMoivre foram os maiores contribuintes para a teoria da probabilidade antes de Laplace.

Figura 1.4: Abraham DeMoivre



Fonte:http://alchetron.com/Abraham-de-Moivre-1078669-W, 31 de Agosto de 2016, 18h e 12min.

O Marquês *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827) escreveu um tratado em dois volumes da obra Théorie Analytique des Probabilités, ou *"Teoria Analítica das Probabilidades"*. Laplace apresentou uma nova prova para o Teorema Central do Limite, reuniu, sistematizou e ampliou os resultados de seus predecessores fundamentando classicamente a teoria da probabilidade. Era adepto do determinismo, não acreditando em chance na natureza, o que o fez contribuir com a probabilidade a priori no cálculo das probabilidades inversas, originalmente introduzida por *Thomas Bayes* (1702 – 1761). Laplace contribuiu também com a teoria da probabilidade na análise dos erros de medições, estudado inicialmente por *Thomas Simpson* (1730 – 1761), em 1756.

Figura 1.5: Pierre Simon de Laplace

Fonte: http://www.explicatorium.com/biografias/pierre-laplace.html, 31 de Agosto de 2016, 18h e 55min.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e *Siméon–Denis Poisson* (1781 – 1840) finalizaram a fase do amadurecimento da teoria da probabilidade, por meio do estabelecimento do erro de medidas com a curva normal, o desenvolvimento do método dos mínimos quadrados por parte de Gauss e a dedução da distribuição de Poisson, originalmente conhecida como a Lei dos Pequenos Números e utilizada até os dias atuais em aplicações nas Ciências da Natureza e estudos probabilísticos da parte de Poisson.

Figura 1.6: Carl Friedrich Gauss

Fonte:http://classroom.orange.com/pt/biografia-de-carl-friedrich-gauss.html, 31 de Agosto de 2016, 18h e 58min

1.4.1 Escola de São Petersburgo

A Escola de São Petersburgo contribuiu significativamente para o desenvolvimento dos estudos sobre probabilidade em meados do século XIX, sendo a Rússia neste período o único país no mundo onde os fundamentos matemáticos da teoria da probabilidade eram pesquisados. Fundada por *Pafnuty L'vovich Chebyshev* (1821–1884), matemático russo que teve por inspiração os sucessores de Daniel Bernoulli e Euler, a escola ficou conhecida como o berço da probabilidade moderna, sendo Chebyshev o primeiro matemático a apresentar variáveis aleatórias[2] e o estudo sobre momentos. Foi o professor de *Andrei Andreiwich Markov* (1856–1922) que usou o conceito de momentos para provar rigorosamente o Teorema Central do Limite[3]. Markov ficou conhecido pelos seus estudos sobre a relação de dependência das variáveis aleatórias em tempo discreto, o qual ganhou o

[2]Variável aleatória é uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios. Matematicamente, variável aleatória é uma função que associa elementos de um espaço amostral a valores numéricos.

[3]O teorema mostra que quando o tamanho da amostra aumenta, a distribuição amostral da sua média aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal.

nome de *"Cadeias de Markov"*. São Petersburgo ainda foi palco de vários avanços nas aplicações desta teoria: *Ludwig Boltzmann* (1844–1906) demonstrou que a segunda Lei da Termodinâmica e o conceito de Entropia podiam ser explicadas aplicando-se a teoria da probabilidade no comportamento cinético do átomo. *Josiah Willard Gibbs* (1839–1903) foi o responsável pela consolidação da Física Estatística como um dos ramos da investigação científica, destacando-se por uma série de palestras apresentadas na Universidade Yale.

Figura 1.7: Andrei Andreiwich Markov

Fonte: http://www.math.iupui.edu/ momran/m118/markov.htm, 31 de Agosto de 2016 19h e 05min

1.4.2 O Período Moderno

No final do século XIX, tem início o Período Moderno da probabilidade. No livro *Calcul des Probabilités* de 1899, o matemático francês *Joseph Bertrand* (1822 – 1900) propôs o famoso *"Paradoxo de Bertrand"* que consiste em calcular a probabilidade de se obter uma corda de um círculo de raio um com comprimento maior que $\sqrt{3}$, Bertrand apresentou diferentes respostas ao problema, o que é inaceitável para matemática, limitando assim por um período a credibilidade da teoria da probabilidade. A probabilidade necessitava de um rigor matemático, que veio a ser alcançado através do estudo axiomático proposto por *Andrei Nikolaevich Kolmorov* (1903 – 1987) que em 1929 publicou o trabalho *Teoria geral de medidas e teoria de probabilidade*, onde apresentou os axiomas da teoria de medidas. Já em 1933 Kolmorov publicou o livro: *Fundamentação do Cálculo de Probabilidades* onde desenvolveu rigorosamente a teoria da probabilidade, através de axiomas influenciados pela teoria da medida, obtendo base matemática para o estudo de diversos fenômenos observados ao longo do tempo.

Como consequências destas definições *Joseph Leo Doob* (1910 - 2004) e *Paul Lévy* (1886 – 1971) deram contribuições significativas como o desenvolvimento da teoria de martingales, base para teoria moderna de probabilidade no estudo de fenômenos observados em ao longo do tempo (processos estocásticos). A maneira axiomática de fazer a teoria da probabilidade de Kolmorov trouxe esta teoria para um patamar de modernidade e desenvolvimento.

A Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Jogos, pertencem ao cotidiano de todo cidadão, porém de forma implícita, no entanto, é estratégico apresentar aos estudantes da educação básica essas teorias e como elas se relacionam, com objetivo de construir novas leituras de mundo e mostrar o quão importante é a matemática em suas vidas. Vejamos a seguir um pouco da teoria da probabilidade apresentada na educação básica.

1.5 Principais Definições e Resultados da Teoria da Probabilidade

Para iniciarmos precisamos definir os experimento aleatório, espaço amostral e evento, segundo a Teoria da Probabilidade.

Definição 1 *Um Experimento Aleatório é aquele que ao ser repetido em situações e condições semelhantes pode produzir resultados diferentes, sem a possibilidade de sua determinação antecipada, apenas o conhecimento do conjunto de possíveis resultados. Desta forma um experimento aleatório depende de uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais chamamos de acaso.*

Exemplo 2 *O lançamento de uma moeda e observação do resultado, ou o sorteio de uma bola em uma urna com* n *bolas numeradas de* 1 *até* n *ou a escolha de um número real qualquer entre 0 e 1 são exemplos de experimentos aleatórios.*

Definição 2 *O Espaço Amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Em geral, denominamos por* Ω.

Um espaço amostral pode ser finito ou infinito, enumerável ou não-enumerável quando finito ou infinito enumerável, dizemos que o espaço amostral é discreto, caso contrário o espaço amostral é contínuo.

Exemplo 3 *Nos experimentos lançamento de uma moeda e observação do resultado e o sorteio de uma bola de uma urna com* n *bolas numeradas de* 1 *a* n, Ω *é um espaço amostral finito dado pelos conjuntos:* $\Omega = \{cara, coroa\}$ *e* $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ *respectivamente.*

Veja que usamos os números de 1, 2, ..., n para representar as bolas com o objetivo de facilitar a escrita.

Exemplo 4 *O experimento da escolha de número real qualquer entre* 0 *e* 1, *temos* $\Omega = [0, 1]$.

Definição 3 *Chamamos de Eventos os subconjuntos do espaço amostral* Ω. *Representamos por letras maiúsculas A, B, ... e diremos que um evento A ocorre se ao ser realizado o experimento, o resultado observado pertencer ao conjunto A. Um evento pode ainda ser classificado como:*

- **Evento Complementar:** *Seja um evento qualquer* $A \subset \Omega$, *então seu evento complementar* A^c *será definido pelos elementos de* Ω *que não estão em A. A união do evento A e seu complementar* A^c *gera o espaço amostral* Ω;

- **Evento Disjunto:** *Dois eventos quaisquer A e B são disjuntos, ou mutuamente excludentes se* $A \cap B = \oslash$;

- **Evento Elementar em Espaço Amostral Discreto:** *Seja um espaço amostral finito* $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, *em que* w_i,*com* $i = 1, 2, ..., n$, *são resultados do experimento. Diremos que o evento* A_i *será um evento elementar quando* $A_i = \{w_i\}, i = 1, 2, ..., n$.

- **Evento Elementar em Espaço Amostral Contínuo:** *É todo evento cujo os espaços amostrais são associados a intervalos numéricos da forma:*

  $$\{a, b\} = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$$

  Pois qualquer que seja $A \subset \Omega$, *poderá ser escrito como união, intersecção ou diferenças de conjuntos associados aos eventos em* Ω.

Exemplo 5 *No laçamento da moeda temos que A = cara e B = coroa são eventos elementares. O evento C = {1, 2, 3} pertence ao experimento do sorteio de uma bola da urna. Assim, se ao sortear sair a bola com o número 3 ou 2 podemos dizer que o evento C ocorreu.*

A partir do exemplo a seguir utilizaremos situações ou jogos da teoria do jogos com o objetivo de nos familiarizarmos com esta teoria. Para iniciar vamos utilizar o jogo "Delação Premiada" que será evidenciado no próximo capítulo.

Exemplo 6 *No jogo "Delação Premiada", dois réus são acusados a partir de provas de cometerem um determinado crime, e receberão um benefício legal caso aceitem colaborar com a investigação. Assim, cada réu terá as seguintes possibilidades: negar, confessar, colaborar ou silenciar. O espaço amostral relativo a este jogo será composto de vetores com duas entradas, a primeira refere-se ao primeiro réu e a segunda ao segundo réu:*

$$\begin{gathered}\Omega = \{(\text{negar, negar}), (\text{negar, confessar}), (\text{negar, delatar}), (\text{negar, silenciar}),\\ (\text{confessar, negar}), (\text{confessar, confessar}), (\text{confessar, delatar}), (\text{confessar, silenciar}),\\ (\text{delatar, negar}), (\text{delatar, confessar}), (\text{delatar, delatar}), (\text{delatar, silenciar}),\\ (\text{silenciar, negar}), (\text{silenciar, confessar}), (\text{silenciar, delatar}), (\text{silenciar, silenciar})\}.\end{gathered}$$

Cada vetor apresentado no espaço amostral representa um evento simples. Portanto ao estudar o conjunto de possibilidades ou saídas que cada réu possui estamos estudando um espaço amostral que em geral não é equiprovável.

A definição a seguir é uma das mais importante da teoria da probabilidade. Foi apresentada por volta de 1780 no tratado *Teoria Analítica das Probabilidades* escrito em dois volumes pelo Marques Pierre Simon Laplace e estudada por Gerolano Cardano e De Moivre em séculos anteriores.

Definição 4 *Segundo Laplace, sendo Ω o conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório, Ω não-vazio e finito, e supondo que cada subconjunto elementar de Ω tem igual possibilidade de ocorrer. Então, para qualquer subconjunto $A \subset \Omega$, definimos a probabilidade do evento A ocorrer como:*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{n^{\text{o}} \text{ de elementos de } A}{n^{\text{o}} \text{ de elementos de } \Omega}. \tag{1.2}$$

Exemplo 7 *No Exemplo 5 da retirada da bola da urna, temos*

$$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{3}{10}.$$

Há situações em que a Probabildade Clássica não pode ser usada, são os casos em que os eventos elementares não são equiprováveis. Por exemplo, no lançamento da moeda se a mesma não for honesta, então

$$P(\text{cara}) \neq \frac{1}{2}.$$

Precisamos definir probabilidade de modo mais geral.

Definição 5 *Seja Ω um espaço amostral e P uma função definida para todos os subconjuntos de Ω, chamamos P de função de probabilidade se*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ *para todo evento* $A \subset \Omega$*;*

2. $P(\oslash) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$*;*

3. *Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, $A \cap B = \oslash$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Exemplo 8 *Uma moeda desonesta é lançada. Sabendo que $P(\{cara\}) = \frac{1}{3}$. Assim, para P ser de fato uma probabilidade $P(\{coroa\}) = \frac{2}{3}$. Então,*

$$P(\{cara,\ coroa\}) = P(\{cara\}) + P(\{coroa\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Exemplo 9 *O jogo do par ou ímpar é considerado um exemplo rústico de jogo na Teoria dos Jogos. Jogam-se duas pessoas, onde cada jogador escolhe par ou ímpar, eles colocarão aleatoriamente um número de 0 a 5 correspondente aos dedos. Soma-se os resultados e verifica se é par ou ímpar. Podemos então construir a matriz dos resultados da soma e analisar por exemplo, qual a probabilidade do resultado ser um número maior que três?*

Vamos construir inicialmente o espaço amostral Ω do experimento;

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (0,2), ..., (5,5)\},$$

onde a primeira entrada é o número da primeira pessoa e a segunda entrada o número da segunda pessoa. Como queremos analisar a soma, podemos construir uma tabela com os possíveis resultados.

Seja A o evento (número maior que três) e Ω o espaço amostral descrito na tabela, então

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

Tabela 1.3: Soma Jogo do Par ou Ímpar

Soma Jogo do Par ou Ímpar						
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Fonte: www.ufjf.br/epd042/files/2009/02/jogos, acesso em 02/08 as 19h e 32min.

Em diversas situações torna-se mais simples calcular a probabilidade do evento complementar do que do evento propriamente dito. Para tais situações temos uma consequência da definição de probabilidade.

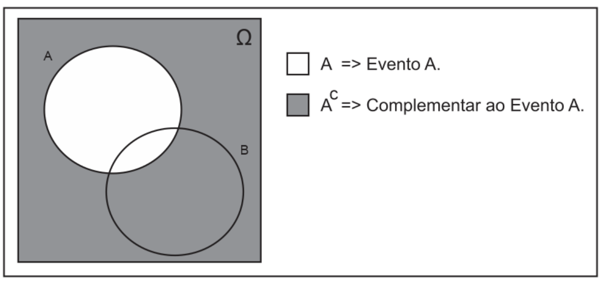
Proposição 1 *A Probabilidade do Evento Complementar é dado por*

$$P(A^c) = 1 - P(A) \tag{1.3}$$

Demonstração:

Sabemos que $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, *pois* $A \cap A^c = \oslash$. *Portanto* $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Figura 1.8: Eventos Complementares



Exemplo 10 *A partir do Exemplo 9, vamos calcular a probabilidade de se obter um número menor ou igual a três.*

Pela Proposição 1

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}$$

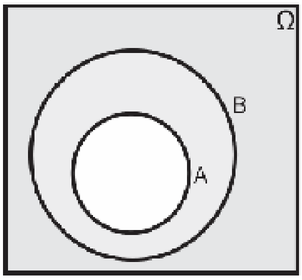
.

Proposição 2 *Se $A \subset B$, então*

$$P(A) = P(B) - P(B - A) \tag{1.4}$$

.

Figura 1.9: Probabilidade do Evento A quando $A \subset B$



Demonstração:

Como o evento A e $B - A$ são mutuamente excludentes,isto é, $A \cap (B - A) = \oslash$ temos

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow P(A) = P(B) - P(B - A).$$

Corolário 1 *Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.*

Demonstração:

Se $A \subset B$, então $P(A) = P(B) - P(B - A)$. Como $P(B - A) \geq 0$ (pois a imagem de toda função de probabilidade pertence ao intervalo $[0, 1]$), então

$$P(B) - P(A) = P(B - A) \geq 0 \Rightarrow$$
$$P(A) \leq P(B).$$

Proposição 3 *A Probabilidade da União de Dois Eventos:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.5}$$

Demonstração:

Podemos escrever $A = (A - B) \cup (A \cap B) e B = (B - A) \cup (B \cap A)$, ambas uniões disjuntas, então $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ e $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ se tomarmos $P(A) + P(B)$,teremos

$$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) \Leftrightarrow$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Basta ver que $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ essas duas uniões são disjuntas, isto é, união de eventos excludentes.

Proposição 4 *A Probabilidade da União de Finitos Eventos*
Usando o Princípio da Inclusão e Exclusão [4] temos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) -$$
$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$
$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - ... +$$
$$(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

Demonstração:

Para tal demonstração basta garantirmos que toda ocorrência do evento A_i com $i = 1, 2, 3, ..., n$, seja contada apenas uma vez na probabilidade $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$. Seja $p = 1, 2, ..., n$ temos que cada elemento que pertence p dos eventos $A_{i's}$ é contado exatamente uma vez na união das probabilidades acima. De fato, pertencendo a p dos eventos $A_{i's}$ ele será contado:

- *Nos eventos (A_i), temos $\binom{p}{1}$ vezes em $\sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i)$;*
- *Nos eventos $(A_{i_1} \cap A_{i_2})$, temos $\binom{p}{2}$ vezes em $\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2})$, o que já foi contado no item anterior, portanto devemos subtrair;*
- *Nos eventos $(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$, temos $\binom{p}{3}$ vezes em $\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$;*
- *Nos eventos $(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n})$, temos $\binom{p}{p}$ vezes em $\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 ... \leq i_p \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p})$*

[4] Princípio da Inclusão Exclusão: $\#(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \#(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - ... + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n)$.

Ora, é claro que a interseção de mais que p eventos não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento em questão pertence exatamente p dos eventos $A_1, A_2, ..., A_n$.

Equacionando a contagem acima, temos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + ... + (-1)^{i-1}\binom{p}{p}.$$

Por propriedade do Binômio de Newton[5]

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i.1^{p-i} = (-1+1)^p = 0.$$

Temos que

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + ... + (-1)^{i-1}\binom{p}{p} = 0 + \binom{p}{0} = 1.$$

O que demonstra que cada evento da probabilidade da união de finitos eventos, será contado apenas uma vez quando a união for representada pela fórmula:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) =$$
$$\sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) -$$
$$... + (-1)^{n-1}P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n).$$

O Exemplo a seguir é adaptado do jogo "A Batalha das Lanchonetes" da Teoria dos Jogos, onde é analisado uma disputa comercial entre duas empresas que vendem refeições a uma clientela restrita de uma mesma região e fornecem os mesmos produtos.

Exemplo 11 *Duas lanchonetes concorrem a um público de* 1.000 *consumidores de uma mesma região com produtos idênticos. Supondo que este público não sofra variação em sua quantidade, que cada cidadão pode lanchar em uma ou em mais de uma lanchonete se assim deseje, e que cada lanchonete deve decidir se aumenta, mantém ou diminui os preços praticados de acordo com a tabela a seguir, representando o ganho em número de clientes de cada lanchonete. (Obs.:a primeira entrada representa a quantidade de clientes da lanchonete A e a segunda de B.)*

[5] Em geral, o Binômio de Newton é escrito da seguinte forma: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}(stackrelni)a^i b^{n-i}$.

Tabela 1.4: Tabela de ganho da Quantidade de Clientes das Lanchonetes

	Lanchonete B		
Lanchonete A	*Aumentar*	*Manter*	*Diminuir*
Aumentar	(300, 250)	(450, 600)	(300, 850)
Manter	(650, 400)	(500, 500)	(450, 750)
Dimunir	(750, 250)	(750, 450)	(600, 600)

Observando a tabela anterior, pergunta-se:

Se a lanchonete A mantiver o preço e a B diminuir, segundo a tabela de ganhos, qual a probabilidade de dado um cliente, ele escolher a lanchonete A e B?

Solução:

Seja A o evento *escolha da lanchonete* A e B o evento *escolha da lanchonete* B, logo

- $P(A)$ probabilidade da escolha da lanchonete A;
- $P(B)$ probabilidade da escolha da lanchonete B;
- $P(A \cap B)$ probabilidade da escolha das lanchonetes A e B;
- $P(A \cup B)$ probabilidade da escolha da lanchonete A ou B.

Analisando os ganhos na tabela, podemos ver que

$$\#(A) = 450, \#(B) = 750 \text{ } e \text{ } \#(A \cup B) = 1000. \text{ Logo,}$$
$$P(A) = \tfrac{450}{1000} \ = \ \tfrac{9}{20} \text{ e}$$
$$P(B) = \tfrac{750}{1000} \ = \ \tfrac{3}{4} \ P(A \cup B) = 1$$

Ora, pela probabilidade da união de dois eventos, temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$1 = \frac{9}{20} + \frac{3}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{20} + \frac{3}{4} - 1 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Definição 6 *Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de ocorrer B dado que A ocorreu, denotado por $P(B/A)$, é definida por:*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1.6}$$

É importante lembrar que a Definição só é válida para $P(A) > 0$.

Proposição 5 *Propriedades da Probabilidade Condicional: Seja A um evento e $P(A) > 0$, então*

1. $P(\oslash/A) = 0, P(\Omega/A) = 1, 0 \leq P(B/A) \leq 1$.

2. $P((B \cup C)/A) = P(B/A) + P(C/A)$, se $B \cap C = \oslash$.

Demonstração

1. $P(\oslash/A) = \frac{P(\oslash \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\oslash)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$ e $P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.

2. $P((B \cup C) \cap A) = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$.

O que mostra que a probabilidade condicional também é uma probabilidade, esta de acordo com a Definição 5.

Exemplo 12 *Muito popular na época da guerra fria, o Jogo do Covarde, retrata uma competição entre dois adolescentes, que dirigem seus carros em alta velocidade um em direção ao outro. O objetivo do jogo é identificar quem desviará primeiro, ou simplesmente desviará, sendo este o covarde. O jogo tem sua matriz de recompensa com as seguintes informações:*

- Se ambos desviarem ao mesmo tempo ninguém perde o jogo;
- Se ambos forem "durões" e não desviarem provocam um grave acidente, com riscos as próprias vidas;

A tabela a seguir representa os ganhos ou perdas dos jogadores. Os valores negativos significam perdas, o par ordenado segue a seguinte ordem de entradas(Adolescente I, Adolescente II).

Tabela 1.5: Jogo do Covarde

	Adolescente II	
Adolescente I	*Desviar*	*Não Desviar*
Desviar	*(0 , 0)*	*(-1 , 2)*
Não Desviar	*(2 , -1)*	*(-2 , -2)*

Fonte: Teoria dos Jogos, R. Fiani, p. 23

O jogo do covarde tem sido empregado para descrever situações de competição de mercado econômico, neste caso o melhor decisão é evitar o enfrentamento. E baseado neste jogo, podemos obter aplicações da teoria da probabilidade. Por exemplo:

Qual a probabilidade do adolescente II não desviar, sabendo que o adolescente I não desviará?

Sabendo que o adolescente I não desviará, vamos calcular a probabilidade do adolescente II não desviar, isto é, a probabilidade dos adolescentes provocarem um acidente. Seja A o evento adolescente I não desviar e B o evento do adolescente II não desviar, então o evento $(A \cap B)$ representa o evento dos dois adolescentes não desviarem. Observando a matriz do ganho do jogo é fácil ver que o evento $(A \cap B)$ é um em quatro possibilidades, logo $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ e $P(A) = 1$ (evento certo). Pela probabilidade condicional temos

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}. \tag{1.7}$$

A independência entre os eventos, ou seja, independente da decisão do adversários o jogador tomará sua decisão. Na teoria da probabilidade a independência entre eventos também é um fator preponderante e pode ser definida da seguinte forma.

Definição 7 *Dois eventos A e B são chamados independentes se*

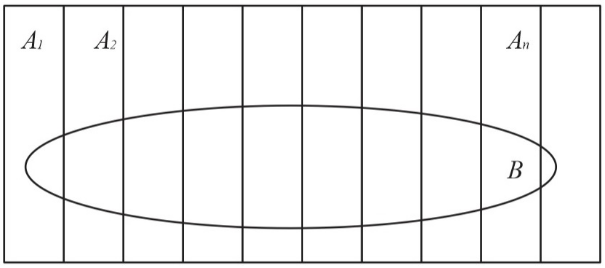
$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1.8}$$

Vejamos agora o Teorema da Probabilidade Total.

Teorema 1 *Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos dois a dois $A_1, A_2, ..., A_n$ e $P(A_1) \geq 0, P(A_2) \geq 0, ..., P(A_n) \geq 0$.Então*

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + ... + P(A_n)P(B/A_n). \tag{1.9}$$

Figura 1.10: Probabilidade Total



Fonte: Análise Combinatória e Probabilidade, Augusto Cesar Morgado, página 152.

Demonstração: Como $B \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ então $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \Leftrightarrow B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$. Logo, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$ uma vez que são disjuntos, como $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$, então:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + ... + P(A_n)P(B/A_n).$$

Como consequência do teorema anterior, temos o Teorema de Bayes.

Teorema 2 *Nas condições do teorema anterior, se* $P(B) \geq 0$*, então, para todo* i*,* $i = 1, 2, ..., n$*, temos*

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)}. \tag{1.10}$$

Demostração: Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 2, temos

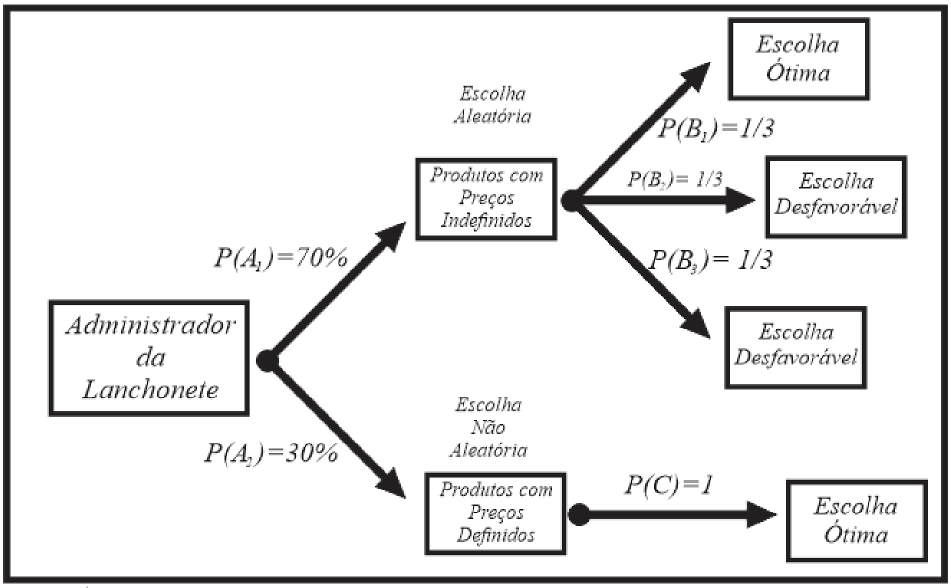
$$P(A_i/B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(B)}. \tag{1.11}$$

Usando o Exemplo 11 e particularizando para analisarmos a situação do ponto de vista do administrador da lanchonete A, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 13 *No Jogo "A Batalha das Lanchonetes" o administrador possui* 3 *possibilidades para a definição dos preços de cada item são estas: aumentar, manter ou diminuir, sendo que apenas uma delas oferece o resultado ótimo para ele. Portanto, para cada item, se o administrador fizer uma escolha aleatória tem a probabilidade de* 1/3 *de definir o preço que lhe dará maior lucro e* 1 *se sabe a escolha certa. O administrador sabe definir* 30% *dos preços dos itens da sua lanchonete. Se ele definiu um preço corretamente para um dos itens, qual é a probabilidade dele ter realizado uma escolha aleatória?*

Solução: Seja A_1 o evento escolha aleatória do preço e B o evento o administrador definiu o preço corretamente.

Figura 1.11: Árvore de Probabilidade



Fonte: Análise Combinatória e Probabilidade, Augustos C. Morgado, p. 150

Pelo Teorema de Bayes temos

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{\frac{7}{10}.\frac{1}{3}}{\frac{7}{10}.\frac{1}{3} + \frac{3}{10}.1} = \frac{7}{16}.$$

Capítulo 2

Uma Introdução à Teoria dos Jogos

A interpretação de certas situações do cotidiano econômico através do estudo de jogos determinou a formatação de uma nova teoria denominada Teoria dos Jogos. A partir da publicação da obra *Theory of Games and Economic Behaviour* (1944) de [14] John Von Neumann e Oskar Morgenstern houve um despertar para grandeza das aplicações dessa teoria. Caracterizada primordialmente pelo estudo de situações que envolvam interações racionais entre personagens com objetivos em comum, a Teoria dos Jogos passou a ser a maior ferramenta para modelagem de interações sociais, econômicas e políticas, com a utilização do conceito de *jogo*.

O conceito de jogo, para a Teoria dos Jogos, nos remete a interações estratégicas com objetivos bem definidos entre personagens de maneira racional, ou seja, os personagens empregam os meios mais adequados aos objetivos, excluindo qualquer avaliação de natureza moral. Segundo Fiani[6] (p. 12, 2006) *"Um jogo é um modelo formal. Isso significa que a teoria dos jogos envolve técnicas de descrição e análise, ou, em outras palavras existem regras preestabelecidas para apresentar e estudar um jogo".* Podemos caracterizar um jogo: através das suas normas preestabelecidas, por suas interações, agentes e por comportamento estratégico exigido.

Fiani[6] (p. 9, 2006) afirma que *"A Teoria dos Jogos ajuda a entender teoricamente o processo de decisão de agentes que interagem entre si, a partir da compreensão da lógica da situação em que estão envolvidos".*

Comparada a outras teorias, a dos jogos é relativamente jovem, tendo seus primeiros registros no século XVIII com a análise de um jogo de cartas *"le Her"* realizada por James Waldegrave e Nicolas Bernoulli, onde foi registrada a primeira solução de equilíbrio de estratégia mista, ou seja, a solução obtida através da utilização de mais de uma estratégia, obtendo o melhor ganho possível para ambos os personagens. Já em 1838, Antoine Augustin Cournot publicou *Recherches sur les Principes Mathématiques de La Théorie dês Richesse* (Investigações sobre os Princípios Matemáticos da Teoria das Riquezas), onde apresentou um modelo de duopólio chamado a *A competição de Cournot* em sua homenagem. Esse duopólio consiste em uma competição entre duas empresas que fabricam bens idênticos. Cournot chegou a uma solução de equilíbrio para produção dos bens e maximização dos lucros de ambas.

Figura 2.1: Antoine Augustin Cournot

Fonte:http://www.tseconomist.com/archives/-interview-with-antoine-augustin-cournot1801-77-by-m-carlingmaster-2-student-2011-2012, visitado em 03 março de 2016, 17h e 41min.

Um outro grande precursor da Teoria dos Jogos foi o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, que demonstrou em 1913 que dado um jogo finito de informações perfeitas (os personagens possuem todas as informações dos seus adversários), entre dois personagens, em que os jogadores se alternam em suas jogadas e o acaso não afeta o processo de decisão, se o jogo não pode terminar em empate, então um dos jogadores necessariamente terá a estratégia vitoriosa. Já o matemático francês Félix Edouard Justin Emile Borel demonstrou através da Probabilidade que especulações financeiras e econômicas são equivalentes a problemas relacionados a jogos.

Figura 2.2: Edouard Justin Emile Borel

Fonte:http://alchetron.com/Emile-Borel-1227242-W, visitado em 03 de Março de 2016 as 17h e 55min.

Dentre todas as contribuições à Teoria dos Jogos, nenhuma foi tão significativa quanto a do matemático e cientista Jhon Von Neumann.

> Para a história da ciência Von Neumann é conhecido como um dos mais eficientes matemáticos do século XX de grandes realizações em diversas áreas da matemática pura, como na mecânica quântica, física atômica, ciências da computação e teoria dos jogos. LEONARD[11],(p. 4, 2007 tradução nossa)

Neumann, em 1928, em seu segundo artigo, axiomatiza o conceito de jogo, baseando-se no cálculo funcional e na topologia, provando a existência de um valor de equilíbrio em jogos discretos de dois personagens, sendo esta conhecida por prova Minimax. [1] Ainda em seu segundo artigo de 1928, Neumann relata *"[...] principal problema da economia clássica: como um completo egoísta o 'homo economicus' vai agir dada uma situação externa?"* VON NEUMANN [15] (p. 13, artigo 1928*b*, tradução nossa) e em 1944 em parceria com o economista Oskar Mangesters escreveu o livro *Theory of Games and Economic Behavior* ou *A Teoria dos Jogos e o Comportamento Econômico*, formalizando e contribuindo para o desenvolvimento dos jogos de soma zero e suas aplicações nos contextos econômicos.

Os estudos sobre Teoria dos Jogos ao longo da história sempre buscaram a representação do melhor resultado, porém quando temos uma melhor solução é imprescindível saber, a solução é melhor para quem? Ao pensar desta forma, a ideia de se construir uma situação que todos minimizem suas perdas e maximizem seus ganhos, nos leva a construção do conceito de um equilíbrio para as soluções dos jogos e as situações por esta modeladas. O maior contribuinte para este contexto foi Jhon Forbes Nash que escreveu *"Equilibrium Points in n-Person Games"* em 1949 como parte dos estudos de sua pós graduação, no qual provou a existência do ponto de equilíbrio nos jogos não cooperativos com n pessoas.

Nash escreve *"Um ponto de equilíbrio é uma n-tupla s tal que cada estratégia mista de cada jogador maximiza seu pay-off(ganho) se as estratégias dos outros jogadores são mantidas fixas. Então cada estratégia do jogador é ótima contra a dos outros"* NASH [8](p. 287, 1950).

O equilíbrio de Nash é um dos conceitos mais aplicados na Teoria dos Jogos contemporânea, favorecendo diversas aplicações em modelos econômicos, estratégias de negociação e planejamento empresarial entre muitas outras aplicações.

[1] Minimax ou Teorema do Minimax foi demonstrado por Jhon Von Neumann 1926. Neumann disse que em uma interação entre dois personagens existe uma estratégia que minimiza as perdas e maximiza os ganhos. Por este Teorema, ele ficou conhecido como o pai da Teoria dos Jogos.

Figura 2.3: Jhon Forbes Nash

Fonte: https://www.princeton.edu/main/news/archive/S43/27/52G52/index.xml?section=featured, visitado em 04 de Março de 2016 as 16h e 02min.

Definir a Teoria dos Jogos é definir uma teoria matemática que estuda as escolhas em situações conflituosas, desta forma, para um jogo existir, precisamos de jogadores e perfis de estratégias que se relacionam para obtenção ou não das soluções ótimas. Segundo Fiani[6], (p.12, 2006) "Situações que envolvam interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente podem ser analisadas formalmente como um jogo."

2.1 Representação de um Jogo na Teoria dos Jogos

Definição 2.1.1 (Jogo Estratégico): Um cenário no qual participam dois ou mais jogadores (indivíduos ou grupos), onde as escolhas e decisões de comportamento têm impacto sobre os outros competidores.

Definição 2.1.2 (Elementos de um Jogo): Um jogo possui os seguintes elementos básicos: um conjunto finito de jogadores $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$, onde cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito de estratégias puras $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, ..., s_{im_i}\}$, tal que $(m_i \geq 2)$. Um perfil de estratégia pura é um vetor do tipo $\vec{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{nj_n})$, de forma que s_{ij_i} é uma estratégia pura do jogador g_i. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam o produto cartesiano

$$S = \Pi_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n. \quad (2.1)$$

Para cada jogo existem os ganhos ou perdas de cada jogador, representados por uma função utilidade.

Definição 2.1.3 (Função Utilidade de um Jogador): Seja u_i uma função que associa um perfil de estratégia pura ao seu ganho (pay-off), isto é,

$$\begin{array}{rccc} u_i: & S & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{s} & \to & u_i(\vec{s}). \end{array}$$

Para cada jogo existe os ganhos ou perdas de cada jogador, representados por uma matriz de pay-off (ganho) do jogador i.

Seja G_i a matriz do ganho do jogador $g_i \subset G$:

$$G_i = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Onde u_{ij} representa o ganho do jogador i quando adotar a estratégia j.

Exemplo 14 *No jogo "Delação Premiada", dois réus g_1 e g_2 acusados a partir de provas de cometerem um determinado crime receberão um benefício legal caso aceitem fazer uma delação para a investigação. Assim, cada réu terá as seguintes possibilidades: negar, confessar, delatar ou silenciar a cerca das acusações feitas pela polícia. Para cada estratégia adotada por cada jogador temos as seguintes consequências:*

- *Se ambos confessarem, então ficarão presos 4 anos;*
- *Se ambos negarem, então ficarão presos 7 anos;*
- *Se ambos delatarem, então ficarão presos 2 anos;*
- *Se ambos silenciarem,então ficarão presos, 7 anos;*
- *Se um confessar e o outro negar, o que confessar ficará preso por 3 anos e o que negar por 8 anos;*
- *Se um confessar e o outro delatar, o que confessar ficará preso por 5 anos e o que delatar por 1 ano;*
- *Se um confessar e o outro silenciar, o que confessar ficará preso por 2 anos e o que silenciar por 8 anos;*
- *Se um negar e o outro silenciar, o que negar ficará preso por 8 anos e o que silenciar por 8 anos;*

- *Se um negar e o outro delatar, o que negar ficará preso por 10 anos e o que delatar por 2 anos;*
- *Se um delatar e o outro silenciar, o que delatar ficará preso por 2 anos e o que silenciar por 7 anos.*

Usando a definição dos elementos de um jogo, temos:

dois jogadores $G = \{g_1, g_2\}$, *com* S_1 *e* S_2 *o conjunto de estratégias de* g_1 *e* g_2 *respectivamente, onde* $S_1 = S_2 = \{negar,\ confessar,\ colaborar,\ entregar\}$. *O conjunto de todos perfis estratégicos é dado por* $S = S_1 \times S_2$, *isto é o produto cartesiano de* S_1 *e* S_2:

$S = \{(negar,\ negar), (negar,\ confessar), (negar,\ delatar), (negar,\ silenciar),$
$(confessar,\ negar), (delatar,\ negar), (silenciar,\ negar), (confessar,\ delatar),$
$(confessar,\ silenciar), (confessar,\ confessar), (delatar,\ colaborar), (delatar,\ confessar),$
$(delatar,\ sileciar), (silenciar,\ confessar), (silenciar,\ delatar), (silenciar,\ silenciar)\}.$

Observe que S *coincide com o espaço amostral* Ω *do Exemplo 6, do capítulo anterior. Um exemplo de perfil estratégico do jogo é* $\vec{s} = (negar,\ delatar)$, *onde o jogador* g_1 *escolheu a estratégia negar, e o jogador* g_2 *escolheu a estratégia colaborar.*

Vamos mostrar as funções utilidade de g_1 *e* g_2 *em cada perfil estratégico:*

Sendo u_1 *e* u_2 *as funções de utilidade dos réus* g_1 *e* g_2, *respectivamente, vamos calcular os "ganhos" de cada um, lembrando que o "ganho" neste caso é a quantidade de anos de prisão.*

$$u_1(negar,\ negar) = -7, u_1(negar,\ confessar) = -8,$$
$$u_1(negar,\ delatar) = -10, u_1(negar,\ silenciar) = -8,$$
$$u_1(confessar,\ negar) = -3, u_1(confessar,\ silenciar) = -3,$$
$$u_1(confessar,\ delatar) = -5, u_1(confessar,\ confessar) = -4,$$
$$u_1(delatar,\ negar) = -2, u_1(delatar,\ confessar) = -1,$$
$$u_1(delatar,\ silenciar) = -2, u_1(delatar,\ delatar) = -2,$$
$$u_1(silenciar,\ negar) = -8, u_1(silenciar,\ confessar) = -2,$$
$$u_1(silenciar,\ delatar) = -7, u_1(silenciar,\ silenciar) = -7$$
$$u_2(negar,\ negar) = -7, u_2(negar,\ confessar) = -3,$$
$$u_2(negar,\ delatar) = -2, u_2(negar,\ silenciar) = -8,$$
$$u_2(confessar,\ negar) = -8, u_2(confessar,\ silenciar) = -8,$$
$$u_2(confessar,\ delatar) = -1, u_2(confessar,\ confessar) = -4,$$

$$u_2(\textit{delatar, negar}) = -10, u_2(\textit{delatar, confessar}) = -5,$$
$$u_2(\textit{delatar, silenciar}) = -7, u_2(\textit{delatar, delatar}) = -2,$$
$$u_2(\textit{silenciar, negar}) = -8, u_2(\textit{silenciar, confessar}) = -8,$$
$$u_2(\textit{silenciar, delatar}) = -2, u_2(\textit{silenciar, silenciar}) = -7$$

A partir dos ganhos podemos organizar os dados das funções utilidade em uma tabela.

Tabela 2.1: Matriz de ganho do Jogo Delação Premiada

g_1/g_2	*Confessar*	*Negar*	*Delatar*	*Silenciar*
Confessar	$(-4,-4)$	$(-3,-8)$	$(-5,-1)$	$(-3,-8)$
Negar	$(-8,-3)$	$(-7,-7)$	$(-10,-2)$	$(-8,-8)$
Delatar	$(-1,-5)$	$(-2,-10)$	$(-2,-2)$	$(-2,-7)$
Silenciar	$(-2,-8)$	$(-8,-8)$	$(-7,-2)$	$(-7,-7)$

Assim definimos o jogo "Delação Premiada" em conceitos da Teoria dos Jogos.

Exemplo 15 *Seja o jogo do par ou ímpar onde o jogador A apostou "par", isto é, a soma dos números dados pelos dedos de uma das mãos de cada competidor é par. Sejam* $G = \{g_1, g_2\}$ *os dois únicos jogadores,* $S_1 = S_2 = \{n^o \textit{ par de dedos, } n^o \textit{ ímpar de dedos}\}$ *os conjuntos de estratégias* g_1 *e* g_2*. Assim* $s_{11} = n^o$ *par de dedos,* $s_{12} = n^o$ *ímpar de dedos. Do mesmo modo* $s_{21} = n^o$ *par de dedos e* $s_{22} = n^o$ *ímpar de dedos.*

Um exemplo de perfil de estratégia pura é $\vec{s} = (n^o \textit{ par de dedos, } n^o \textit{ ímpar de dedos})$*, isto significa que* g_1 *escolheu um número de dedos par como estratégia (primeira entrada do vetor) e* g_2 *um número de dedos ímpar como estratégia (segunda entrada do vetor).*

$$S = \{(\textit{número par, número par}), (\textit{número par, número ímpar}),$$
$$(\textit{número ímpar, número par}), (\textit{número ímpar, número ímpar})\}$$

é o conjunto de todos os perfis de estratégia pura. Assim,

$$u_1 : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

é tal que $u_1(n^o\textit{par, } n^o \textit{ par}) = 1 = u_1(n^o \textit{ ímpar, } n^o \textit{ ímpar})$ *e* $u_1(n^o \textit{ par, } n^o \textit{ ímpar}) = 0 = u_2(n^o \textit{ ímpar, } n^o \textit{ par})$*. Podemos representar pela tabela a seguir*

Tabela 2.2: Ganho da aposta par no jogo do *"par ou impar"*

	B (nº de dedos par)	*B (nº de dedos ímpares)*
A (nº de dedos pares)	1	0
A (nº de dedos ímpares)	0	1

Fonte: adaptado do Exemplo 1, p. 2, Notas de Aulas de Fernando Nogueira (UFJF)

Pela tabela temos que se o jogador A escolher a quantidade de dedos par e o adversário também, o jogador A ganha um ponto, pois soma dois números pares também par, ou seja, $u_{11} = 1$. *Caso o jogador A escolha par e o adversário ímpar,* $u_{12} = 0$, *ou seja o jogador A não ganha. para as duas outras possibilidades temos* $u_{21} = 0$ *ou* $u_{22} = 1$.

> ***Exemplo 16*** *: A Batalha do Mar de Bismarck. Em dezembro de 1942 durante a segunda guerra mundial o alto comando de guerra japonês decidiu transferir um maciço reforço da China e do Japão para Lae, em Papua – Nova Guiné. Isso permitiria aos japoneses se recuperarem da derrota de Guadacanal e se prepararem para a próxima ofensiva aliada. Contudo, a movimentação de um volume grande de tropas por mar tinha um risco elevado: o poderio aéreo aliado na área era fortíssimo.*
>
> *Um dado importante da situação era o fato de que o comboio japonês dispunha de duas rotas alternativas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas, por outro lado, somente possuíam aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que a busca em qualquer uma das rotas consumiria um dia inteiro.*
>
> *Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque em seguida. Porém, se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeios. FIANI (p. 172, 2006)*

Nesta situação, podemos observar dois personagens (jogadores) $G = \{$*Forças Aliadas, Comboio Japonês*$\}$, *os perfis de estratégia pura dos dois jogadores* $S_{Aliados} = \{$*Rota Norte 1º dia, Rota Sul 1º dia*$\}$, $S_{Japonês} = \{$*Rota Sul (tempo bom), Rota Norte (tempo ruim)*$\}$ *e os perfis de estratégias puras do jogo,* $S = \{$*(Rota Norte 1º dia, Rota Norte (tempo ruim)),* *(Rota Norte 1º dia, Rota Sul (tempo bom)), (Rota Sul 1º dia, Rota Norte (tempo ruim)), (Rota Sul 1º dia, Rota sul (tempo bom))}.*

Tabela 2.3: Matriz de ganho da Batalha de Bismarck

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	*Rota do Sul (Tempo bom)*	*Rota do Norte (tempo ruim)*
Rota do Sul 1º dia	3	1
Rota do Norte 1º dia	2	2

Teoria dos Jogos com Aplicações em Econômia, Administração e Ciências Sociais, Ronaldo Fiani, p. 2, 2006.

Análise dos ganhos da função de utilidade dos Aliados, representando o número de dias de bombardeio ao comboio japonês.

$U_{Aliados}$*(Rota Norte 1º dia, Rota Norte (tempo ruim))* $= 2$,
$U_{Aliados}$*(Rota Norte 1º dia, Rota sul(tempo bom))* $= 2$,
$U_{Aliados}$*(Rota Sul 1º dia, Rota Norte (tempo ruim))* $= 1$,
$U_{Aliados}$*(Rota Sul 1º dia, Rota Sul (tempo bom))* $= 3$.

Análise dos ganhos da função de utilidade dos Japoneses, representando o número de dias de bombardeio das forças aliadas:

$U_{Japonês}$*(Rota Norte (tempo ruim), Rota Norte 1º dia)* $= 2$,
$U_{Japonês}$*(Rota Norte (tempo ruim), Rota Sul 1º dia)* $= 1$,
$U_{Japonês}$*(Rota Sul (tempo bom), Rota Norte 1º dia)* $= 2$,
$U_{Japonês}$*(Rota Sul (tempo bom), Rota Sul 1º dia)* $= 3$.

2.2 Caracterização dos Jogos

A caracterização dos jogos leva em consideração a ordem de interação, a cooperação ou não entre os jogadores, a repetição e as informações completas ou incompletas aos jogadores. Desta forma os jogos podem ser tipificados, como: jogos simultâneos, sequenciais, cooperativos, repetitivos, de informação completa ou incompleta e(ou) de soma de ganhos constante.

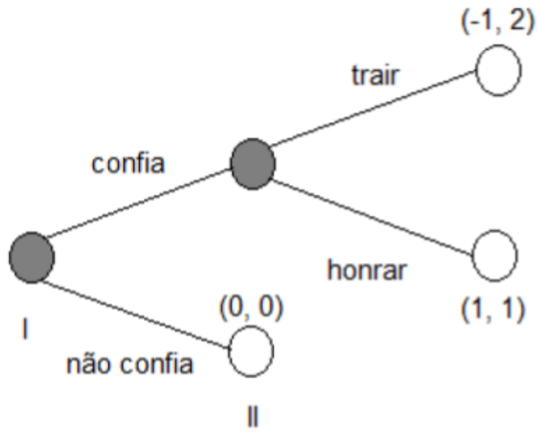
Jogos Simultâneos: Caracterizam-se por interação simultânea entre seus jogadores com informação incompleta, isto é, um jogador não possui o conhecimento da estratégia de seu adversário.

Podemos exemplificar o jogo do par ou ímpar do Exemplo 15, como um Jogo Simultâneo, tendo em vista o modelo de interação entre os participantes e as informações disponíveis a cada jogador durante a realização do jogo. Já o exemplo a seguir é um jogo de caracterização não simultânea, pois possui uma sequência de interação predefinida, portando os jogadores interagem em sequência e não simultaneamente.

Exemplo 17 *No jogo "Confiar ou Não Confiar" determinado jogador* (g_2) *faz uma proposta para jogador* g_1*. em resposta o jogador* g_1 *pode confiar ou não confiar. Caso o jogador* g_1 *confie cabe ao jogador* g_2 *honrar ou trair a confiança de* g_1*.*

Veja a figura a seguir expõe a árvore de interação do jogo:

Figura 2.4: Jogo Confiar ou Não Confiar



Jogos Sequenciais: Neste tipo de jogo os participantes seguem uma ordem preestabelecida em seus movimentos ou ações, onde as consequências de cada ação são cumulativas, o que implica diretamente nos ganhos finais de cada jogador;

Observamos que o exemplo anterior (Exemplo 17) é um exemplo claro de jogo sequencial e logicamente é trivial perceber que se um jogo é de interação simultânea, então ele não será de interação sequencial. Logo, exemplos como o jogo *"O Dilema do Prisioneiro"* e *"A Batalha no Mar de Bismarck"* podem ser caracterizados como jogos não sequenciais, pois são jogos de interação simultânea.

Jogos de Repetição: Caracteriza-se pela repetição de um mesmo modelo de jogo alterando apenas as estratégias e as fases do jogo;

Existem exemplos em nosso cotidiano de jogos de repetição: O jogo de pôquer por exemplo, possui várias rodadas (repetições), a brincadeira *"Pedra, Papel e Tesoura"*, também pode ser repetida quantas vezes os participantes quiserem e *"O jogo do Par ou Ímpar"* no Exemplo 15 são jogos de repetição do nosso cotidiano. Um jogo dito de repetição pode ser caracterizado também como sequência no caso do pôquer ou simultâneo no caso do par ou impar.

Podemos exemplificar também um jogo que não é de repetição: *"O Jogo do Covarde"* do Exemplo 12,é um jogo que não se caracteriza por interações repetitivas.

Jogos Cooperativos: Destacam-se pela comunicação entre os participantes, tal fato tem por objetivo a cooperação sobre determinadas estratégias ou ações. No cotidiano este tipo de jogo é conhecido como cartel, geralmente ocorre entre empresas. Vale salientar que os acordos definidos entre os participantes são cumpridos rigorosamente;

Os jogos cooperativos são mais comuns no mundo dos negócios. Em alguns caso a disputa por um determinado mercado encaminha os participantes desta disputa a se comunicarem, combinarem estratégias e evitarem um embate que minimizem seus lucros. Este de interação se encaixa na definição de jogos cooperativos, porém segundo nossas leis este tipo de conduta é crime previsto em lei como formação cartel.

Já qualquer outro tipo de jogo cuja a interação entre os participantes não haja a cooperação é denotado como jogo não cooperativo que será definido a seguir.

Jogos Não Cooperativos: São os jogos onde os participantes não se comunicam, não cooperam entre si e não fazem acordo sobre possíveis estratégias a serem adotadas;

Um exemplo clássico de jogo Não Cooperativo, é O Dilema do Prisioneiro, tendo em vista que os participantes não se comunicam, cooperam e não tem como fazerem acordo.

Jogos de Informações Completas ou Incompletas: Dizemos que um jogo é de informação completa quando os oponentes têm todas informações sobre seus adversários, exemplo: localização, quantidade e estratégia. O jogo é dito de informação completa, caso contrário o jogo é de informações incompletas.

Podemos exemplificar como jogos de informações completas, todo jogo de interação cooperativa. O que justifica tal fato é a obtenção de informações do adversário para que os acordo sejam realizados. Portanto todo jogo cooperativo também é de informações completas, caso contrário é de informações incompletas.

Jogos de Soma Constante São jogos que possuem soma de ganhos constante, quando o ganho de um jogador é igual à perda de seu adversário. No caso em que a soma constante é igual a zero, chamamos estes jogos de *Jogos de Soma Zero*.

Os jogos de soma constantes são os jogos mais comuns na teoria dos jogos. Por exemplo o jogo combinar moedas (matching pennies) dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador entrega sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar sua moeda pra o segundo. É um jogo de soma constante, tendo em vista que o ganho de um dos participantes é a perda do seu adversário.

Já o jogo *"A batalha das lanchonetes"* no Exemplo 13, não é um jogo de soma constante, pois os ganhos são variados e o ganho do adversário não implica diretamente na perda do jogador.

Exemplo 18 *Sejam os dois jogadores dois gerentes de diferentes bares A e B. Ambos os gerentes estão, simultaneamente, considerando introduzir uma oferta especial para os seus clientes, reduzindo o preço de sua cerveja. Cada um escolhe entre fazer a oferta especial ou não. Se um deles faz a oferta, mas o outro não, o gerente que faz a oferta irá ganhar alguns clientes do outro e uma popularidade maior. Mas, se ambos fazem a oferta, não ganham clientes do outro, embora ambos ganhem maior popularidade. Qualquer aumento de clientes gera maior receita para o bar. Vamos considerar que as receitas semanais de A e B, sem a promoção, sejam de R$ 7000,00 e R$ 8000,00 respectivamente.*

Neste tipo de jogo se faz necessária a análise com o auxílio da matriz de resultados ou matriz de ganho. Caracteriza-se por ser um jogo simultâneo, não cooperativo, de informações incompletas e de soma não constante. Os valores na tabela a seguir são em milhares de reais.

Tabela 2.4: Matriz de ganho do Jogo Gestores de Bar

	Gerente A	
Gerente B	*Ofertar*	*Sem Ofertar*
Ofertar	$(10, 14)$	$(18, 6)$
Sem Ofertar	$(4, 20)$	$(7, 8)$

Por exemplo, se considerarmos o Jogo Gestores de Bar, qual seria uma solução plausível para os dois gerentes? Para tanto basta analisar o jogo do ponto de vista dos dois gerentes e decidir qual estratégia maximiza os ganhos. Análise do ponto de vista do *Gerente A*. *O Gerente B poderá ofertar ou não ofertar. Se ele ofertar, a melhor estratégia é ofertar também, pois assim terei ganho de R$ 14.000,00 e ele de R$ 10.000,00, não ganharei clientes, porém ganharei popularidade. Caso ele não oferte, o melhor ainda será ofertar, pois ganharia R$20.000,00, popularidade e clientes. Então, independente da decisão dele, o melhor é ofertar.*

Após definir e caracterizar os jogos, o estudo das soluções dos jogos se faz necessário.

Definição 8 *As soluções de um jogo na teoria dos jogos é o conjunto de possíveis resultados baseados nas estratégias de cada participante.*

A solução de um determinado jogo é uma previsão realizada a partir dos estudos das estratégias utilizadas pelos participantes para antever o resultado final. Vamos apresentar os dois conceitos mais comuns: solução por estratégias puras e mistas, com perfis dominantes ou de equilíbrio de Nash.

Para a definição a seguir iremos utilizar um perfil de estratégia na qual apenas a estratégia de um único jogador $g_i \in G$ irá variar, enquanto que as estratégias dos demais jogadores permanecerão fixas. Chamaremos este conjunto de s_{-i} e escrevemos $s_{-i} = \left(s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, ..., s_{nj_n}\right) \in S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$.. Portanto, por conveniência podemos escrever um perfil estratégico com essa característica da seguinte forma.

$$s = (s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}) = \left(s_{1j_1}, s_{2j_2}, ..., s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_(i+1)}, ..., s_{nj_n}\right).$$

A definição a seguir apresenta o conceito de estratégia pura estritamente ou fracamente dominada.

Definição 9 *Uma estratégia pura $s_{ip} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é estritamente dominada pela estratégia $s_{iq} \in S_i$ se $u_i(s_{iq}, s_{-i}) > u_i(s_{ip}, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. A estratégia $s_{ip} \in S_i$ é fracamente dominada pela estratégia $s_{iq} \in S_i$ se $u_i(s_{iq}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ip}, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.*

A Definição 9 apresenta um processo de comparação entre as funções de utilidades (ganhos), então a partir destas comparações podemos eliminar as estratégias estritamente dominadas e consequentemente escolher as melhores estratégias para um melhor resultado possível nos jogos.

Exemplo 19 *Considere o jogo determinado pela matriz de ganho a seguir, onde a primeira entrada no par ordenado representa o ganho do jogador 1 e a segunda o ganho do jogador 2:*

Tabela 2.5: Matriz de ganho

	Jogador 02	
Jogador 01	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$(2,1)$	$(1,1)$
s_{12}	$(4,3)$	$(2,4)$

Usando a definição determinamos qual a melhor estratégia. Por exemplo, para o jogador 1 o ganho para a estratégia s_{11} é estritamente dominado pelo ganho da estratégia s_{12}, pois $u_1(s_{12}, s_{21}) > u_1(s_{11}, s_{21})$. Para o jogador 2 a estratégia s_{21} é fracamente dominada pela estratégia s_{22}, $u_2(s_{22}, s_{-2}) \geq u_2(s_{21}, s_{-2})$ para todo $s_{-2} \in s_{-2}$. Portanto o jogador 1 possui uma estratégia estritamente dominada, enquanto o jogador 2 possui uma estratégia fracamente dominada, onde $s_{-1} = s_2$ e $s_{-2} = s_1$.

Definição 10 *Um perfil estratégico* $\vec{s}^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ *é chamado de equilíbrio de Nash em estratégias puras se*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, s_{-i}^*) \tag{2.3}$$

para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$ *e todo* $j_i = 1, 2, ..., m_i$.

Uma solução do equilíbrio de Nash de um jogo é um ponto onde cada jogador não é motivado a mudar sua estratégia se os demais jogadores não mudarem.

Exemplo 20 *Um casal decidiu que iria, naquela noite, ao cinema ou ao jogo de futebol. O marido, João e a mulher, Maria, preferem ir juntos a ir sozinhos. Embora João prefira ir com Maria ao futebol, preferiria ir com ela ao cinema a ir sozinho ao futebol. Da mesma forma, a primeira preferência de Maria é a de ir junto ao cinema, mas ela também preferiria ir ao jogo de futebol com João a ir sozinha ao cinema. A matriz que representa esse jogo é apresentada na tabela a seguir. Os resultados refletem a ordem das preferências dos jogadores.*

Tabela 2.6: A Batalha dos Sexos

	Mulher	
Homem	*Futebol*	*Cinema*
Futebol	$(10, 5)$	$(0, 0)$
Cinema	$(0, 0)$	$(5, 10)$

Fonte: Teoria dos J. e a Matemática do E.M. Thiago O. Nascimento, p. 31, 2014

O jogo apresenta dois equilíbrios de Nash, quando um dos dois participantes renunciar seu ganho maior, ou seja, nos casos (Futebol, Futebol) e (Cinema, Cinema).

Exemplo 21 *Jogo de combinar moedas (matching pennies). Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador entrega sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar sua moeda pra o segundo. Esse jogo se encontra representado por sua matriz de ganho dada abaixo.*

Tabela 2.7: Jogo de Combinar Moedas

Jogador 1— Jogador 2	*Cara*	*Coroa*
Cara	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
Coroa	$(-1, +1)$	$(+1, -1)$

Fonte: Teoria dos J. e a Matemática do E.M. Thiago O. Nascimento, p. 32, 2014

Analisando a tabela do jogo, vemos que $u_1(\text{cara, cara}) = 1 \geq u_1(\text{coroa, cara}) = -1$. Para que (cara, cara) seja um Equilíbrio de Nash, é necessário que $u_2(\text{cara, cara}) \geq u_2(\text{coroa, cara})$, mas isso não ocorre. Repetindo o argumento para (coroa, coroa), vemos que o perfil (coroa, coroa) também não é um Equilíbrio de Nash. Logo, esse jogo não possui Equilíbrio de Nash para estratégias puras e precisamos de outra alternativa para escolha de melhor solução. Uma delas é fazer a análise do ponto de vista probabilístico, isto é, sobre as estratégias puras devemos escolher uma distribuição de probabilidade (estratégias Mistas). Para tanto definiremos a seguir a solução por estratégia mista.

Definição 11 *Uma estratégia mista p_i para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador, isto é, p_i é um elemento do conjunto*

$$\Delta_{m_i} = \{(x_1, ..., x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} | x_1 \geq 0, ..., x_{m_i} \geq 0 \text{ e} \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1\}. \tag{2.4}$$

Assim se $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{im_i})$, então

$$p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0, ..., p_{im_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1.$$

Onde p_{ik} é a probabilidade do jogador g_i usar a estratégia s_{ik}.

Uma outra definição importante para a difusão da Teoria dos Jogos é o conceito de equilíbrio nas soluções de jogos estratégicos "O Equilíbrio de Nash". Jhon Forbes Nash, o mais importante precursor deste conceito, apresenta o equilíbrio como mais uma estratégia de minimizar as perdas ou maximizar lucros.

Definição 12 *Dizemos que um perfil de estratégia mista*

$$p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times ... \times \Delta_{m_n}$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p_{ij_i}, p_{-j}^*) \tag{2.5}$$

com $1 \leq i \leq n$ *e* $1 \leq j \leq n$ *e para todo* $p_j \in \Delta_{m_i}$ *nenhum jogador sente o desejo de trocar sua estratégia mista se os seus adversários não o fizerem.*

Para os casos de estratégias mistas em especial com equilíbrio de Nash, é importante lembrar que a resposta ótima de cada jogador é dada por distribuição de probabilidade, então precisamos definir esta aplicação.

Definiremos a seguir a Distribuição de Probabilidade em Estratégias Mistas.

Definição 13 *Seja* $p = (p_1, p_2, ..p_n) \in \Delta$ *um perfil de estratégia mista que determina o ganho esperado através das médias dos próprios ganhos ponderada pelas distribuições de probabilidade* $p_1, ...p_n$. *Se cada distribuição está associada a uma tomada de decisão em um perfil estratégico, temos* $p = (p_1, ..., p_n)$, *onde* $p_1 = (p_{11}, p_{12}, ..., p_{1m_1}); p_2 = (p_{21}, ..., p_{2m_2})...p_n = (p_{n1}, ..., p_{nm_n})$. *Assim a função de utilidade de todas as estratégias será*

$$u_i(p) = \sum_{j_1=1}^{m_1} ... \sum_{j_n=1}^{m_n} (\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, ...s_{nj_n})). \tag{2.6}$$

Vamos analisar se o jogo “Combinar Moedas” do Exemplo 21 possui um equilíbrio de Nash.

Seja p a distribuição de probabilidade do jogador 1 escolher inicialmente a estratégia cara e $(1-p)$ a estratégia da escolha da face coroa como resposta e q a distribuição de probabilidade do jogador 2 escolher inicialmente a estratégia cara e $(1-q)$ a estratégia da escolha da face coroa como resposta. Pela matriz de ganho temos:

Jogador 1:

$$\begin{gathered}
u_1(p_1,p_2) = pq.u_1(\text{cara, cara}) + p(1-q).u_1(\text{cara, coroa}) \\
+(1-p)q.u_1(\text{coroa, cara}) + (1-p)(1-q).u_1(\text{coroa, coroa}) \\
u_1(p_1,p_2) = pq - p(1-q) - (1-p)q + (1-p)(1-q) = \\
4pq - 2p - 2q + 1
\end{gathered}$$

Jogador 2:

$$\begin{gathered}
u_2(p_1,p_2) = pq.u_2(\text{cara, cara}) + p(1-q).u_2(\text{cara, coroa}) \\
+(1-p)q.u_2(\text{coroa, cara}) + (1-p)(1-q).u_2(\text{coroa, coroa}) \\
u_2(p_1,p_2) = -4pq + p(1-q) + (1-p)q - (1-p)(1-q) = \\
-4pq + 2p + 2q - 1
\end{gathered}$$

Ora, queremos p e q para $u_1(p_1,p_2)$ e $u_2(p_1,p_2)$ serem os maiores ganhos dentre todas funções utilidades. Mas

$$\begin{gathered}
u_1(p_1,p_2) = -u_2(p_1,p_2) \Rightarrow u_1(p_1,p_2) = u_2(p_1,p_2) = 0 \\
\text{Então, } 4pq - 2p - 2q + 1 = 0 \Leftrightarrow 2p(2q-1) - (2q-1) = 0 \\
(2q-1)(2p-1) = 0 \Leftrightarrow q = \tfrac{1}{2} \text{ e } p = \tfrac{1}{2}.
\end{gathered}$$

Logo, $p = q = \frac{1}{2}$ o que garante o equilíbrio de Nash.

O teorema a seguir revolucionou e impulsionou a teoria dos jogos quando foi provado por Jhon Von Neumann em 1928. O Teorema do Minimax garante que sempre há uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos, cujos interesses são completamente opostos.

Teorema 3 *Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representando pela Matriz de Ganho A do jogador da linha, sempre existe um perfil de estratégia mista pertencente* *ao conjunto de todas as estratégias do jogo, isto é, existe* $(p*, q*) \in \Delta_i \times \Delta_j$ *tal que, o maior valor entre os menores valores das linhas equivale ao menor valor entre os maiores valores das colunas, ou seja, sendo* $v_l(A)$ *o valor máximo entre os menores valores dos ganhos do jogador das linhas e* $v_c(A)$ *o menor valor entre os maiores valores dos ganhos do jogador cujo os ganhos pertencem as coluna da matriz de ganhos A,* $v_l(A)$ *é igual a* $v_c(A)$.

Tabela 2.8: Matriz Teorema do Minimax.

	Jogador coluna			
Jogador Linha	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1n}, b_{1n})
	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2n}, b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Fonte: Anais do CNMAC - O Teorema do Minimax, Fabrício A. O. e Maria Angélica A., p.1063, 2010

Exemplo 22 *Duas redes de televisão competidoras, Mega e Plus, estão planejando levar ao ar programas de uma hora de duração para o mesmo horário. A rede Mega pode escolher um entre os programas A e B e a rede Plus um entre os programas C e D. Nenhuma delas sabe qual programa a outra vai levar ao ar. Ambas contratam o mesmo instituto de pesquisa de opinião para lhes dar uma estimativa de como as possibilidades de transmitir os dois programas vão dividir a audiência. O instituto fornece a percentagem da audiência para a rede Mega representada na Tabela a seguir. Qual programa cada rede deveria levar ao ar para maximizar a audiência?*

Tabela 2.9: Ganhos em percentuais para Rede Mega

	Programa da Rede Plus	
Programa da Rede Mega	*C*	*D*
A	30	55
B	45	60

Fonte: Teoria dos J. e a Relação entre Minimax e o Equilíbrio Nash, p. 4, 2007

Os valores da tabela representam os ganhos da rede Mega, os ganhos da rede Plus são os representados por valores opostos aos exibidos na tabela, assim se a rede Mega ganha $x\%$ de audiência, então a rede Plus perde $x\%$, ou seja $-x\%$ caracterizando assim este jogo como um jogo de soma zero. O objetivo de cada emissora é maximizar sua audiência, porém levando em conta que sua oponente fará o melhor contra movimento possível. Assim, cada rede tomará as decisões que minimizem os riscos e maximizem os possíveis ganhos.

Tabela 2.10: Solução Minimax para o jogo

	C	D
A	30	55
B	45	60

Fonte: Teoria dos J. e a Relação entre Minimax e o Equilíbrio Nash, p. 4, 2007

Análise do maior valor possível entre os menores ganhos da rede Mega (minimização das perdas):

- Na primeira linha o menor valor ocorrido é 30%;
- Na segunda linha o menor valor ocorrido é 45%;
  Logo o maior entre os menores valores das linhas é o 45%.

Análise do menor valor possível entre os maiores ganhos da rede Mega (maximização dos ganhos):

- Na primeira coluna o maior valor ocorrido é 45%;
- Na segunda coluna o maior valor ocorrido é 60%.

Logo o menor entre os maiores valores das colunas é também o 45%.
Desta forma, o minimax ocorre quando a rede Mega decidir pelo programa B e a rede Plus decidir pelo programa C, nos casos em que o maior entre os menores valores das linhas coincide com o menor entre os maiores valores das colunas, chamamos este caso de ponto de sela, representado por (B, C). Lembrando que o ganho da rede Plus são valores opostos aos valores da rede Mega, consequentemente a rede Plus perde 45% da audiência total quando o ganho para rede Mega de 45% da audiência.

Capítulo 3

Probabilidade e Teoria de Jogos na Educação Básica

Os estudos sobre a probabilidade e suas aplicações são de fundamental importância para educação básica, em especial para o ensino médio. O que motiva tal importância é o estudo sobre a idéia de incerteza associada aos fenômenos aleatórios e ao cotiano social dos educandos. Os modelos probabilísticos têm papel importante no auxílio do desenvolvimento da leitura dos diversos cenários do cotidiano social dos estudantes e ajudam na construção de conclusões a respeito de diversas interações dos jovens com o meio em que vivem. O fato do conhecimento da probabilidade de jogar e ganhar em uma loteria por exemplo, faz o cidadão pensar melhor se deve ou não apostar, bem como o conhecimento da probabilidade de uma determinada decisão implicar em um bom lucro auxilia o cidadão em sua reflexão.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [14] (p. 78, volume 2, 2006) *"Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação"*. Desta forma o professor da educação básica deve buscar, propor ou construir junto aos estudantes, modelos probabilísticos (aplicações) que maximizem as oportunidades de aprendizado sobre probabilidade.

Com o objetivo de oportunizar ao estudante ver novos modelos que venham a contribuir para sua formação é que apresentaremos a teoria dos jogos como uma ferramenta para aprender probabilidade e fortalecer o processo de tomada de decisões dos estudantes e futuro cidadãos. Para Fiani[6](p. 10, 2006) *"A teoria dos jogos ajuda a desenvolver a* *capacidade de raciocinar estrategicamente, explorando as possibilidades de interação dos agentes, possibilidades estas que nem sempre correspondem à intuição".*

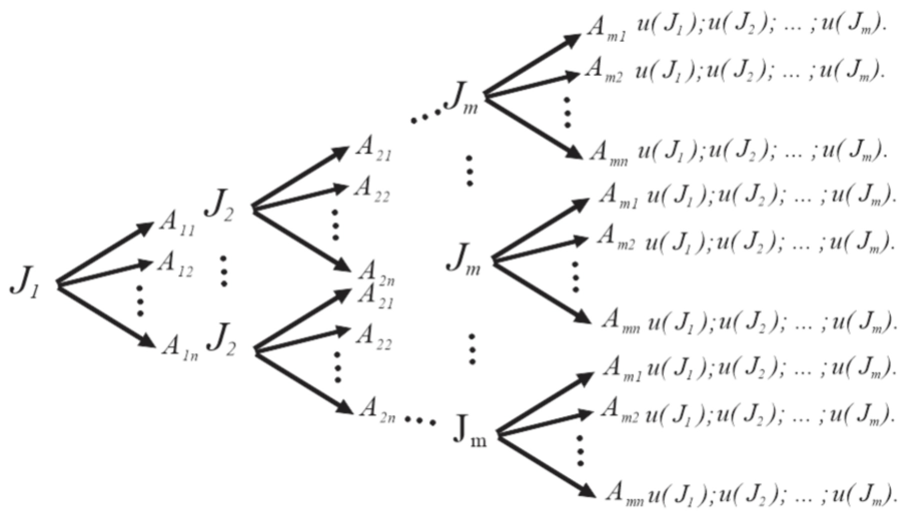
As decisões em contextos de interações humanas implicam diretamente no cotidiano social dos cidadãos e estudantes em geral. A teoria dos jogos e a probabilidade podem em situações conflituosas serem modeladas segundo algumas perspectivas de jogos. Por exemplo: Os jogos sequenciais são melhores representados com uso de diagrama de árvore como afirma BESANKO E BRAEUTIGAM[2] (p. 32, 2004) *"Em muitas situações, a tomada de decisão é sequencial em vez de simultânea, por isso, é mais conveniente representar os jogos com uma árvore de jogos."*. A teoria da probabilidade também utiliza o diagrama em árvore ou a árvore das probabilidades em problemas e soluções de problemas.

3.1 Jogos Sequenciais em Espaços Probabilísticos

Para teoria dos jogos, em específico para os jogos sequencias, podemos modelar uma situação em espaço probabilístico equiprovável onde o diagrama em árvore possui as seguintes características: os jogadores J_i com $i = \{1, 2, ...m\}$ interagem em uma sequência preestabelecida, cada jogador possui n possibilidades de decisão para uma ação A_{in} e para cada J_i teremos um ganho $u(J_i)$ em cada estratégia escolhida.

Vamos analisar um modelo genérico de diagrama em árvore comumente utilizado em jogos sequenciais:

Figura 3.1: Diagrama em Árvore em Jogos Sequenciais



"Cada nó representa uma etapa do jogo em que um dos jogares tem que tomar uma decisão. Já um ramo representa uma escolha possível para o jogador, a partir do seu nó, isto é, um ramo é uma ação do conjunto de ações do jogador, em um dado nó. Ramos podem ser representados com flechas para facilitar o entendimento de como o jogo se desenrola."
Fiani[4] (p. 52, 2006)

Vamos analisar o Jogo *"Fabricantes de Automóveis"* proposto por Fiani[6] (p.51, 2006):

Exemplo 23 *Dois fabricantes de veículos disputam um mercado com um modelo de van cada. A primeira empresa que denominaremos de Inovadora está em processo de decisão se irá ou não introduzir seu novo modelo de van, e a partir daí a segunda empresa, que chamaremos de Líder, toma sua decisão de manter ou reduzir o preço da sua van. Vale salientar que os ganhos são representados por um par ordenado* (u_{J_1}, u_{J_2})*, onde a primeira entrada representa os ganhos do jogador 1 e segunda do jogador 2. Vejamos o diagrama:*

Levando em consideração que os ganhos apresentados no diagrama são as consequências das decisões de cada fabricante e não fator influenciador da decisão, isto é, no momento das decisões nenhum dos fabricantes conhece seus ganhos para cada estratégia.

Analisando o jogo, temos dois jogadores J_1 como a fabricante Inovadora e J_2 a fabricante Lider. Cada jogador possui duas estratégias $\{A_{11}, A_{12}\}$ no caso da fabricante Inovadora, são elas *lançar* ou *não lançar* o novo modelo de van e $\{A_{21}, A_{22}\}$ para a fabricante Líder, onde as ações representam *manter* ou *reduzir* o preço de sua van no mercado.

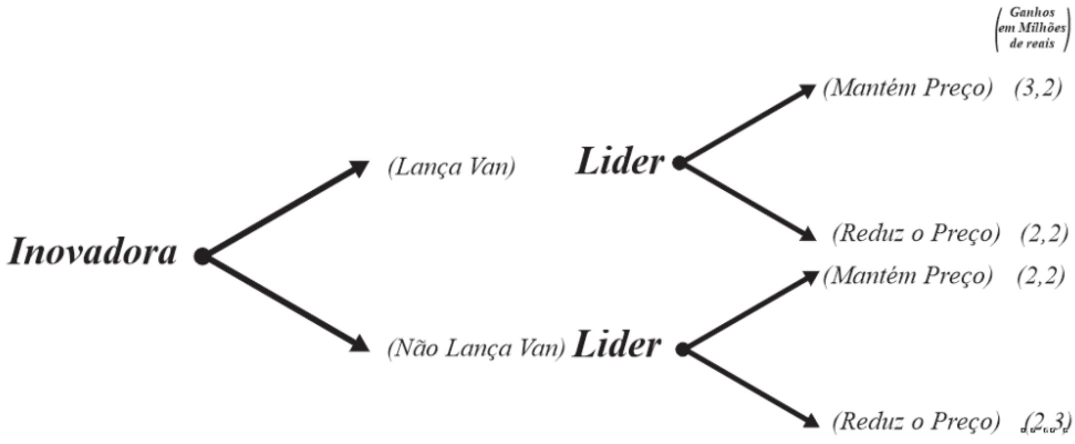
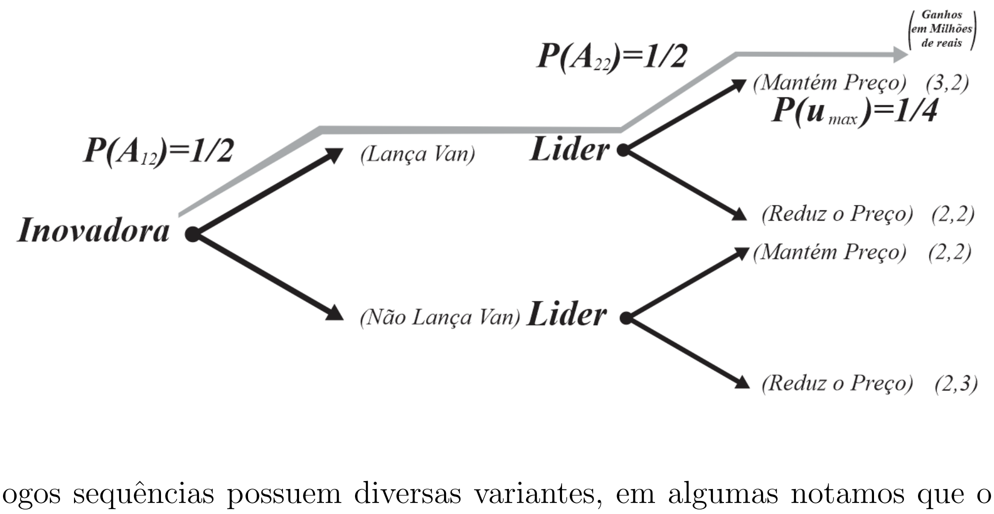


Figura 3.2: Diagrama em Árvore - Fabricantes de Automóveis

Desta forma temos para este jogo que $n = 2$, cada participante terá apenas uma chance para decidir, ou seja, o jogo só possui uma rodada e cada jogador possui duas possibilidades equiprováveis, desta forma a probabilidade de cada jogador é $P(A_{ij}) = \frac{1}{2}$.

Podemos ainda explorar o jogo com outros questionamentos sobre os ganhos, um exemplo: qual a probabilidade da fabricante Inovadora ter o maior lucro possível? A probabilidade pedida equivale a ocorrência das ações A_{11} (Inovadora lança uma nova van) e A_{21} (Lider manter o preço). Logo sendo $u_{1_{max}}$ o ganho máximo da fabricante Inovadora, temos $P(u_{1_{max}}) = P(A_{11}).P(A_{21}) = \frac{1}{4}$.

Figura 3.3: Probabilidade do Ganho Máximo (Inovadora)

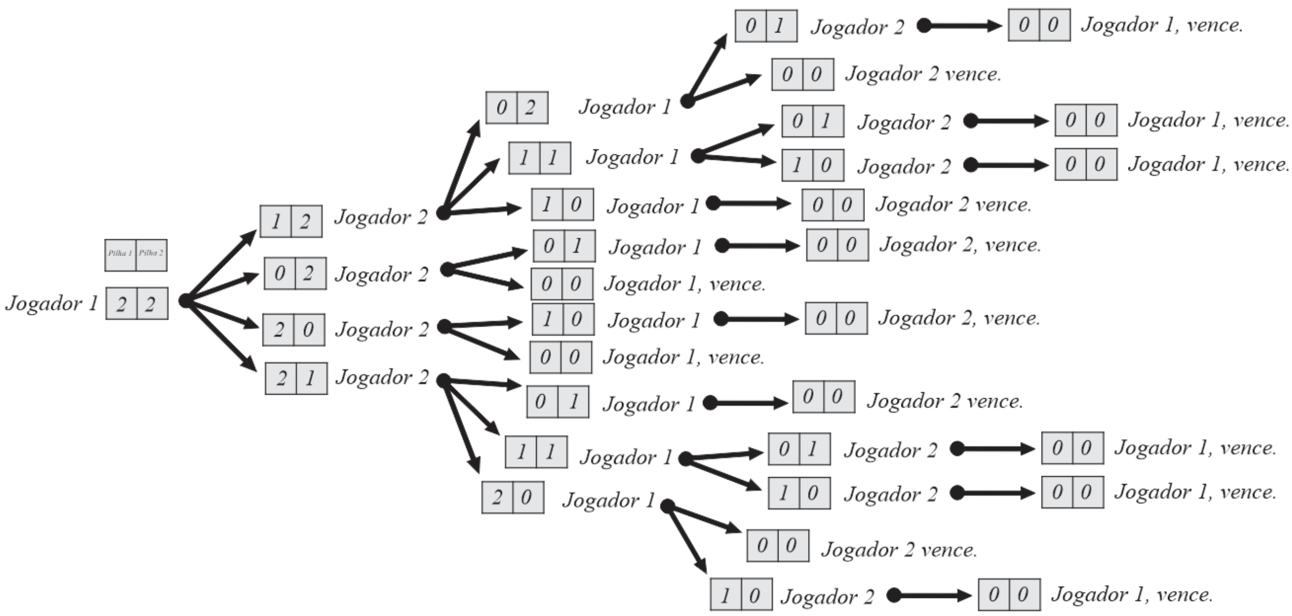


Os jogos sequências possuem diversas variantes, em algumas notamos que o número de ações por jogador pode ser diferentes, isto é, há jogos em que o primeiro jogador possui n possibilidades de ações, enquanto o segundo participante possui m possibilidades de escolhas, e assim por diante. Naturalmente com m diferente de n.

Exemplo 24 *Quatro moedas são dispostas em duas pilhas de duas moedas. O jogador 1 escolhe uma pilha e então decide remover uma ou duas moedas da pilha escolhida. Após, o jogador 2 escolhe uma pilha com pelo menos uma moeda e decide quantas moedas quer remover. Após a jogada do jogador 2, o jogador 1 inicia a segunda rodada com as mesmas regras. Quando ambas as pilhas não possuírem mais moedas, o jogo termina e o perdedor é aquele que tirou a última moeda.*

Vamos visualizar o diagrama em árvore deste jogo.

Figura 3.4: Diagrama em Árvore - Jogo das Moedas



Temos o jogador 1 com duas possíveis ações na primeira jogada, o jogador 2, dependendo da decisão do jogador 1, possui três ou duas possibilidades de ação. O jogo das moedas, além de ser um jogo sequencial, também é de repetição e viciado, tendo em vista que o jogador 2 sempre vencerá, supondo que suas escolhas sejam feitas de forma racional.

Vejamos alguns exemplos, formatados nas etapas do jogo das moedas.

Exemplo 25 *Partindo do diagrama em árvore do jogo das moedas, determine o espaço amostral* Ω *do evento do primeira jogada para o jogador 1.*

Solução: o jogador 1 possui duas escolhas: na primeira deve escolher de qual pilha retirará a moeda, para qual existem duas possibilidades. A segunda escolha é a quantidade *de moedas que será retirada. Façamos o par ordenado (x,y), onde x representa a pilha escolhida e a quantidade de moedas retirada.*

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

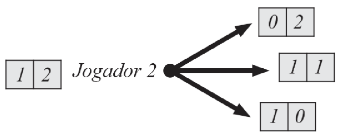
Veja que (1,1) representada a escolha da pilha 1 e dela retira-se 1 moeda.

Exemplo 26 *Uma variante do jogo das moedas é um jogo viciado onde a jogada chave que garante a vitória ao jogador 2 é sua primeira decisão. Supondo que o jogador 2 faça uma escolha aleatória em sua jogada chave, vamos calcular a probabilidade de jogador 2 garantir sua vitória.*

Solução:

Primeiramente, vamos analisar o caso em que o jogador 1 retira uma moeda de uma das pilhas:

Figura 3.5: Diagrama da 1º Situação - Jogador 2

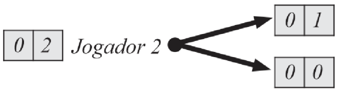


Devemos lembrar que o objetivo do jogo é deixar o adversário retirar a última moeda, desta forma, observamos que o jogador 2 não pode escolher a pilha que já foi retirada uma moeda, pois caso o faça, deixará duas moedas para seu adversário que naturalmente retirará apenas uma, deixando a última para o jogador 2 retirar, perdendo assim o jogo. Logo, para que o jogador 2 tenha uma estratégia vencedora ele escolherá a pilha de moedas que possui duas moedas.

Escolhida a pilha de moedas, resta decidir se retirará uma ou duas moedas, para tal basta lembrar que não se pode deixar duas moedas para o adversário, portanto as duas alternativas mais acima são desfavoráveis. neste caso temos apenas a alternativa de retirada das duas moedas da pilha que possui duas deixando apenas uma para seu adversário retirar. Então das três possibilidades apenas uma é favorável.

Agora, vamos analisar o caso em que o jogador 1 retira duas moedas de uma das duas pilhas.

Figura 3.6: Diagrama da 2º Situação - Jogador 2



É fácil ver que se o jogador 2 retirar duas moedas perderá o jogo, pois retirou as últimas moedas. Conclusivamente resta ao jogador retirar apenas uma moeda, logo, para nossa segunda situação temos um caso favorável e um contra. Então, temos dois casos estritamente favoráveis, um em cada situação, o que garante a vitória, isto é, temos duas decisões ótimas do ponto de vista da teoria dos jogos em cinco possibilidades. Logo, sendo V o evento vitória para o jogador 2, a representação probabilística para estas decisões é

$$P(V) = \frac{2}{5} = 40\%$$

Pela propriedade da probabilidade do complementar, a probabilidade do jogador 2 deixar a vitória escapar é

$$P^c(V) = 1 - P(V) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%.$$

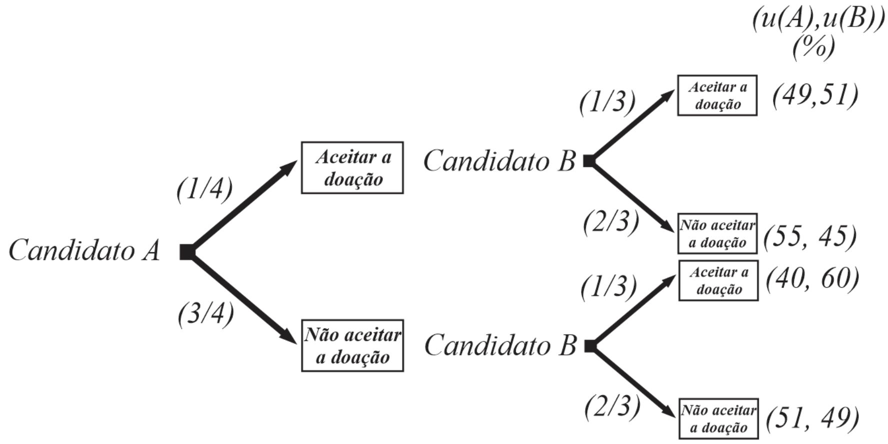
Porém, como o jogo das moedas também é um jogo de informações completas o evento jogador 2 vitorioso, se torna um evento certo, isto é 100% de chance de ocorrer.

3.2 Estratégias Mistas e a Influência da Probabilidade nos Ganhos

Na teoria dos jogos para cada estratégia adotada por um jogador, existe uma consequência ou ganho. O valor da consequência é determinado por uma função de utilidade u_i com $i = \{1, 2, ..., n\}$. Dependendo do tipo de estratégia (pura ou mista) a determinação do ganho varia. Para ganhos de um jogo de estratégia pura que não possui equilíbrio de Nash (Bortolossi[3], et al., p.12, 2004) relata *"[...] existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Uma alternativa para estes casos é a de considerar o jogo do ponto de vista probabilístico. [...]"*. Então, o jogador não escolhe um perfil de estratégia pura e sim uma distribuição de probabilidade sobre suas estratégias puras. A distribuição de probabilidade tem por objetivo calcular um valor médio esperado do ganho.Vejamos um exemplo que retrata esse fato.

Exemplo 27 *Dois candidatos a um cargo executivo precisam decidir de aceitam ou não uma doação financeira para suas campanhas. Inicialmente a doação é oferecida ao candidato A que deve decidir se recebe ou não doação. Quando o candidato A decide, a mesma doação é oferecida ao candidato B, que por sua vez decidirá se receberá ou não a doação. Supondo que oferta da doação é comum aos dois candidatos e que seus ganhos em percentuais de votos e as distribuição de probabilidade de cada estratégia estão no diagrama em árvore abaixo, vamos determinar o valor esperado de ganho médio para cada jogador e verificar quem possui mais chances de sair vitorioso da disputa.*

Figura 3.7: Diagrama Jogo da Doação de Campanha.



Solução:

É importante lembrar que a distribuição de probabilidade não é contemplada pela teoria da probabilidade a nível de educação básica, portanto, vamos adaptar esta aplicação com o objetivo de minimizar as dificuldades de aprendizado dos estudantes.

Para determinação do valor esperado usaremos a Definição 4.8 do capítulo anterior

$$u_i(p) = \sum_{j_1=1}^{m_1} ... \sum_{j_n=1}^{m_n} (\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, ...s_{nj_n})).$$

Então, para os dois jogadores do nosso problema vamos construir uma matriz de ganhos.

$$\begin{gathered} u_A = p_{11}\left(p_{21}.u_A(s_{11}, s_{21}) + p_{22}u_A(s_{11}, s_{22})\right) + \\ p_{12}\left(p_{21}.u_A(s_{12}, s_{21}) + p_{22}u_A(s_{12}, s_{22})\right) \\ u_B = p_{11}\left(p_{21}.u_B(s_{11}, s_{21}) + p_{22}u_B(s_{11}, s_{22})\right) + \\ p_{12}\left(p_{21}.u_B(s_{12}, s_{21}) + p_{22}u_B(s_{12}, s_{22})\right) \end{gathered}$$

Tabela 3.1: Jogo Doação de Campanha

CANDIDATO A / CANDIDATO B	*ACEITAR* (s_{21})	*RECUSAR* (s_{22})
ACEITAR (s_{11})	$(49, 51)$	$(55, 45)$
RECUSAR (s_{12})	$(40, 60)$	$(51, 49)$

Para o candidato A temos

$$u_A = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}.49 + \frac{2}{3}.55\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}.40 + \frac{2}{3}.51\right) = \frac{53}{4} + \frac{142}{4}$$
$$\Rightarrow u_A = 48,75\%.$$

Para o candidato B temos

$$u_B = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}.51 + \frac{2}{3}.45\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}.60 + \frac{2}{3}.49\right)$$
$$\Rightarrow u_B = 51,25\%.$$

Concluímos então que o candidato B possui na média ligeira vantagem sobre o candidato A.

Interpretar situações do cotidiano social como um jogo mostra aos estudantes o quanto é importante a interpretação das informações fundamentadas em problemas, com o objetivo de tomar decisões coerentes para o melhoramento dos ganhos e diminuição das perdas.

3.3 Sequência Didática

3.3.1 Motivação

A presente sequência didática tem por objetivo aplicar tópicos de teoria da probabilidade da educação básica a jogos, bem como introduzir a teoria dos jogos como ferramenta motivadora para os estudantes da 2ª série do ensino médio. Para o sucesso desta atividade os estudantes já devem ter conhecimento sobre os seguintes temas: Princípio Fundamental da Contagem, Estudos dos Agrupamentos para Contagem (arranjos e combinações), Probabilidade Clássica, além de Probabilidade Condicional e de Eventos Independentes. A referida sequência didática foi aplicada na turma da 2º série do ensino médio da Escola

Estadual Capitão Mor Galvão no centro da cidade Currais Novos, durante o mês de junho de 2016.

A turma possui 33 estudantes, com idades variando entre 15 e 19 anos, dos quais 19 são meninas e 14 são meninos. Dos 33 estudantes da turma, 23 estudam na escola desde o 6º ano do ensino fundamental, 3 vieram da rede privada e 7 de outras escolas estaduais. A sequência foi divida em quatro etapas: na primeira foi apresentado o jogo *"O Dilema do Prisioneiro"* como motivação. Na segunda, exploramos o jogo em termos da probabilidade, Na terceira, a motivação foi o jogo da doação de campanha e na última foram avaliados os conceitos enfatizados.

3.3.2 Métodos

1. Ação para aproximação do contexto da teoria da probabilidade (Escolha aleatória de estudantes para participar do jogo);

2. Apresentação do jogo *O Dilema do Prisioneiro*;

3. Realização do jogo com uma dupla de estudantes, escolhidos aleatoriamente no início da aula;

4. Dividir a turma em duplas para o estudo da probabilidade das decisões dos prisioneiros;

5. Estudo da Matriz de ganho do jogo;

6. Avaliação dos conceitos apresentados.

7. Ação para introdução do jogo *Doação para Campanha* de autoria do Prof. Jorian Santos;

8. Eleição dos estudantes que representarão os candidatos (trabalhando teoria da probabilidade);

9. Apresentação do jogo;

10. Formar grupos de três estudantes para avaliar a conduta de cada candidato em suas escolhas;

11. Apresentação de distribuição de probabilidade como o valor esperado da média dos ganhos dos candidatos;

12. Formar grupos de três estudantes para verificar qual dos candidatos segundo o valor da média ganhará as eleições;

13. Realizar uma roda de debates com as opiniões que venham justificar a vitória do candidato (avaliação).

3.3.3 Detalhamento da metodologia

Para o início da primeira etapa, realiza-se um sorteio com todos os estudantes com o objetivo de escolhermos os dois prisioneiros para serem os personagens de apresentação do jogo *O Dilema do Prisioneiro*. Cada estudante sorteado recebe um chocolate como brinde por aceitar participar. Porém antes do início da apresentação cada estudante recebe uma série de questões como na sugestão no Apêndice e tem 15 minutos para responder.

Após a escolha dos estudantes, eles são retirados da sala de aula e separados. A situação do jogo é apresentada a cada um e eles refletem sobre sua decisão por 10 min.

Paralelamente a turma é divida em duplas e cada estudante recebe a descrição do jogo Apêndice e a incumbência de entrar no papel de um dos prisioneiros e fazer uma escolha, sendo que, seu colega de dupla não poderá saber sua decisão, este processo ocorre em um intervalo de 10 min.

Logo após os estudantes voltam do isoladamente um a um e proferem suas decisões. Os estudantes da turma por sua vez entregam suas decisões por escrito, onde será computado o resultado de cada grupo segundo a Tabela 2.12 da análise dos resultados. O que finaliza a primeira etapa.

Na segunda etapa, os estudantes voltam às duplas e recebem a descrição das possibilidades da cada jogador. São orientados a calcular as probabilidades dos jogadores escolherem sem conhecer as matriz de ganho, ou seja, fazerem escolhas aleatórias com o objetivo de fixar a definição da probabilidade clássica de Laplace. Em seguida recebem uma cartolina e constroem uma árvore de probabilidades para o jogo, supondo as decisões serem sequenciais. Relembram neste ponto a probabilidade dos eventos independentes e as probabilidades condicionais. Para finalizar a etapa é entregue novamente as questões respondidas no início da etapa para que eles respondam novamente.

A terceira etapa tem um caráter de conscientização política a respeito das contribuições de empresas para campanhas eleitorais. Inicialmente os estudantes serão questionados se são a favor ou contra as doações. Para melhor apresentação do jogo elegemos dois estudantes na turma para representarem os candidatos A e B em seguida é entregue a descrição do jogo, esta fase tem duração de 5 minutos.

Antes do início da apresentação do jogo durante 10 minutos, são realizados questionamentos de forma expositiva de qual a probabilidade de cada um dos candidatos ganharem a eleição.Em seguida, o mesmo questionamento é repetido com o acréscimo de mais um candidato, e assim sucessivamente até chegar em uma representação genérica e axiomática da probabilidade.

Iniciando o jogo, separa-se os candidatos, um fica na sala e o outro sai. Para o candidato que ficou é perguntado se ele aceita ou não uma doação para sua campanha, ele responde. Logo em seguida retira-se e o outro candidato que se encontrava fora apresenta sua resposta à mesma pergunta. Convidamos o primeiro candidato a voltar à sala. É apresentado os ganhos em percentuais de votos de cada candidato à turma e suas probabilidades de escolhas. Então é demonstrado como calcula-se o ganho médio de cada candidato e pede a turma que realize esses cálculos. Esta etapa decorre no intervalo de 25 minutos.

Nos dez minutos finais é apresentado os resultados médios e determinado qual candidato tem mais chances de eleger-se segundo os valores. Por fim, cada estudante mais uma vez é questionado se é a favor ou contra este tipo de doação.

3.3.4 Análise dos Resultados

Os resultados a seguir são referentes à sequência didática desenvolvida na turma da 2ª série do ensino médio matutino da Escola Estadual Capitão Mor Galvão. realizada em 4h aulas nas datas 07, 08, 09 e 14 de junho de 2016.

A tabela a seguir representa os resultados dos questionamentos sobre probabilidade clássica, de eventos independentes e condicional, realizados em dois momentos: antes do desenvolvimento da atividade e logo depois do desenvolvimento.

Na primeira questão que investigou o aprendizado da definição de probabilidade, houve uma melhoria de aproximadamente 20%. Ja a questão 2 e 3 abordaram a probabilidade da união de dois eventos independentes e dependentes respectivamente, de tal forma que

Tabela 3.2: Resultado Probabilidade e Jogo O Dilema do Prisioneiro

QUESTÕES/ ACERTOS	*ANTES DO JOGO*	*DEPOIS DO JOGO*
QUESTÃO 1	22	28
QUESTÃO 2	11	20
QUESTÃO 3	6	16
QUESTÃO 4	1	10

houve uma melhoramento de 30% e 53% respectivamente. Por fim a última questão abordou a probabilidade condicional, onde podemos verificar uma melhoria de 30%.

Os resultados a seguir representam as decisões das duplas no jogo o dilema do prisioneiro. Para os ganhos onde ocorre pena máxima para um dos prisioneiros e liberdade para o outro, é observada uma Estratégia Dominada, pois os jogadores decidem sem se preocupar com as consequências. Já para os ganhos onde tivemos igualdade entre o número de anos de reclusão, temos duas estratégias: a primeira onde cada prisioneiro recebe pena de cinco anos, é classificada como Estratégia Dominante pois ambos tomaram suas decisões sem a influencia da decisão de seu adversário e a Estratégia Equilíbrio de Nash, estratégia onde os dois prisioneiros refletem sobre a decisão do adversário e sua consequência, neste caso os prisioneiros são condenados a um ano de prisão apenas.

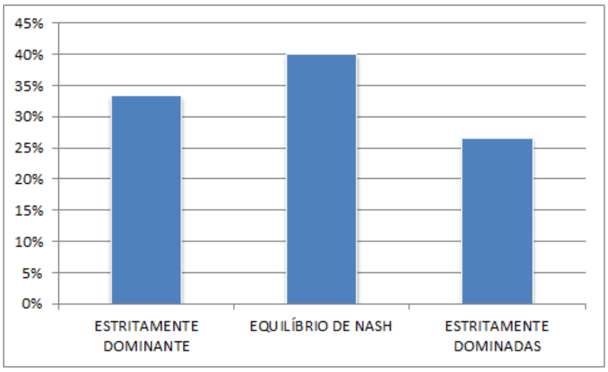


Figura 3.8: Decisão Estratégica das Duplas

A estratégia Equilíbrio de Nash é a mais frequente, mostrando assim que a maioria dos estudantes foi racional e escolheu a melhor estratégia do ponto de vista da teoria dos jogos.

A tabela a seguir contém os dados de todos os resultados das duplas de estudantes que participaram do jogo "O Dilema do Prisioneiro". Onde *All C* significa o prisioneiro

All confessar e *All N* significa o prisioneiro All negar. Da mesma forma *Bob C* e *Bob N*, significa Bob confessar e Bob negar respectivamente.

Tabela 3.3: Resultado das decisões no Jogo O Dilema do Prisioneiro

DUPLAS/ DECISÕES	*All C*	*All N*	*Bob C*	*BOB N*	*u(s)*
DUPLA 1	$\times$		$\times$		$(-1,-1)$
DUPLA 2		$\times$		$\times$	$(-5,-5)$
DUPLA 3	$\times$		$\times$		$(-1,-1)$
DUPLA 4	$\times$			$\times$	$(0,-10)$
DUPLA 5	$\times$		$\times$		$(-1,-1)$
DUPLA 6		$\times$		$\times$	$(-5,-5)$
DUPLA 7		$\times$		$\times$	$(-5,-5)$
DUPLA 8		$\times$	$\times$		$(-10,0)$
DUPLA 9	$\times$		$\times$		$(-1,-1)$
DUPLA 10		$\times$	$\times$		$(-10,0)$
DUPLA 11	$\times$		$\times$		$(-1,-1)$
DUPLA 12	$\times$			$\times$	$(0,-10)$
DUPLA 13		$\times$		$\times$	$(-5,-5)$
DUPLA 14		$\times$		$\times$	$(-5,-5)$
DUPLA 15	$\times$		$\times$		$(-1,-1)$

Conclusão

Propõe-se neste trabalho uma ação de aplicação da teoria da probabilidade na teoria dos jogos para a educação básica, como forma de acrescentar possibilidades metodológicas ao processo de ensino aprendizagem através de uma sequência didática para 2º série do ensino médio.

A referida sequência foi colocada em prática na 2ª série do ensino médio do turno matutino durante as aulas de matemática do ano letivo de 2016, na Escola Estadual Capitão Mor Galvão, na cidade de Currais Novos, no estado do Rio Grande do Norte.

Os estudantes se mostraram entusiasmados e participaram com muito vigor, interagindo entre eles, questionando e concluindo a importância do papel da probabilidade e da teoria dos jogos em suas vidas. Percebe-se que ao se construir uma temática para o ensino de probabilidade, o aprendizado se torna mais eficiente e os conceitos teóricos são melhores assimilados, propiciando assim uma formação completa. Os conceitos de contagem e probabilidade foram trabalhados anteriormente de maneira puramente teórica. Durante as aplicações foram verificados através de questionário que os conceitos da teoria da probabilidade não foram assimilados por completo pela maioria dos estudantes, porém, após cada etapa da sequência verificava-se melhorias nesta assimilação. O questionário foi uma ferramenta primordial para a verificação do aprendizado, demonstrando assim, que houve melhorias na fixação dos conceitos desenvolvidos.

Independente das realidades educacionais de cada estudante, o que ficou registrado, foi o interesse no aprender matemática de forma concreta. A sequência didática demonstrou que não há barreiras entre os estudantes e o aprendizado de matemática, mostrou também que nós professores precisamos melhorar nossas metodologias de trabalho para construir novas possibilidades de aproximação de teorias e aplicações do cotidiano estudantes.

Com a certeza de que outros professores e estudantes irão vivenciar esta prática, bem como de que ajudamos na formação do senso crítico de futuros cidadãos refletindo sobre suas possibilidades e decisões para que obtenham ganhos ótimos em seus cotidianos e vejam a matemática como uma ciência que nos auxilia em nossas escolhas todos os dias, finalizamos o presente trabalho.

Apêndice

1) Questionário da primeira etapa da sequência didática.

Tabela 3.4: Questionário

Probabilidade Clássica, de Eventos Independentes e Probabilidade Condicional
1) Qual a probabilidade de dois estudantes quaisquer da turma serem sorteados?
2) Qual a probabilidade que os sorteados sejam um rapaz e uma moça?
3) Qual a probabilidade que os sorteados sejam duas moças?
4) Sabendo que o primeiro sorteado foi um rapaz, qual a probabilidade do segundo ser uma moça?

2) O jogo *"O Dilema do Prisioneiro."*

Dois ladrões Al e Bob são acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicar entre si o delegado de plantão faz a seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum confessar há uma pena de um ano. Se os dois confessarem, então ambos serão submetidos a uma pena de cinco anos. Mas se um confessar e outro negar, o que confessar será libertado e o que negar será condenado a dez anos de prisão.

Tabela 3.5: Matriz de ganho do Jogo O Dilema do Prisioneiro

	Bob Confessar	*Bob Negar*
Al Confessar	(-5, -5)	(0, -10)
Al Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

3) *"Jogo da Doação de Campanha."*

Dois candidatos a um cargo executivo, precisão decidir de aceitam ou não uma doação financeira para suas campanhas, inicialmente a doação é oferecida ao candidato A que deve decidir se recebe ou não doação. Quando o candidato 1 decidi, a mesma doação é oferecida ao candidato B, por sua vez decidirá se receberá ou não a doação. Supondo que oferta da doação é comum aos dois candidatos e que seus ganhos em percentuais de votos e as distribuição de probabilidade de cada estratégia estão no diagrama em árvore abaixo, vamos determinar o valor esperado de ganho médio para cada jogador e verificar quem possui mais chances de sair vitorioso da disputa.

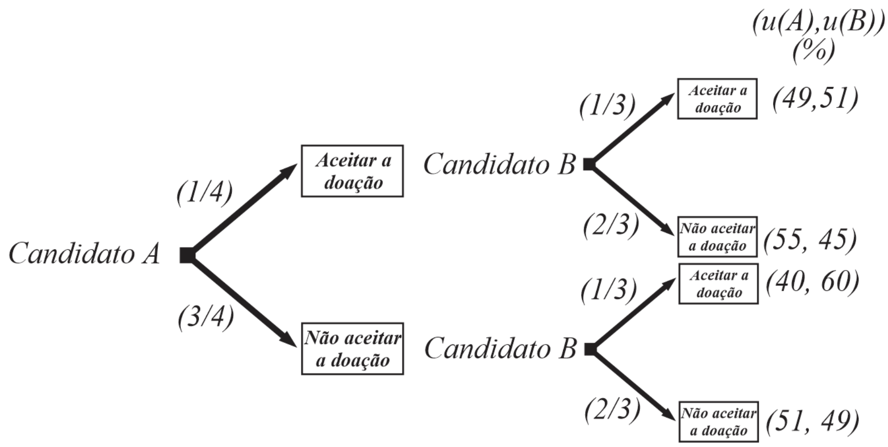


Figura 3.9: Diagrama Jogo da Doação de Campanha.

Referências Bibliográficas

[1] Abrantes, Maria L. P. A Teoria dos Jogos e os Oligopólio: Abordagem, Angola: Faculdade de Direito da Universidade Augustinho Neto. Dezembro 2004. 1ª Edição.

[2] Besanko, D.; Braeutigam, R. R. Microeconomia uma abordagem completa. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

[3] Sartini, Brígida A.; Gaburgio, Gilmar; Bortolossi, Humberto J; Santos, Poliana A.; Barreto, Larissa S. Uma Introdução a Teoria dos Jogos In: Bienal da Sociedade B. de Matemática, 2., 2004. Universidade Federal da Bahia, 2004. p. 64.

[4] Câmara de Educação Básica. Resolução n. 3, de 26 de junho de 1998: Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Disponível em:¡http://www.mec.gov.br¿. Acesso em: 10 junho. 2016.

[5] Costa, Cristiene dos S. Teoria dos Jogos e a Relação entre o "Teorema Minimax" de Jhon Von Neumann e o "Equilíbrio de Nash" de Jhon Nash: Trabalho de Conclusão do Curso de Matemática da PUC/DF, 2005.

[6] Fiani, Ronaldo. Teoria dos Jogos: com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais, Rio de Janeiro: Campus. 2006. 389. 3ª Edição.

[7] Gadelha, Augusto. Uma Pequena História da Probabilidade: curso de Pós-graduação em Estatística, 2004. Notas de Aula.

[8] J. F. Nash Jr., Equilibrium Points in n-person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1950.

[9] J. F. Nash Jr., Non-Cooperative Games. PhD. Thesis. Princeton University Press, 1950.

[10] J. F. Nash Jr., The Bargaining Problem. Econometrica, 1950.

[11] Leonard, Robert J. New Light on von Neumann: Politics, psychology and creation of game theory. Psychology and the creation of game theory. Universitá di Torino Working Paper Series, n. 7, 2007.

[12] Morgado, Augusto C.; Carvalho, Paulo C. P., Matemática Discreta. Coleção PROFMAT IMPA, Rio de Janeiro, v. 12, 204 p., 2013.

[13] Morgado, Augusto C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM. Março de 1991. 166. 1ª Edição.

[14] Orientações Curriculares Nacional para o Ensino Médio. Matemática e suas Tecnologias. Volume 2. Disponível em:¡http://www.mec.gov.br¿. Acesso em: 10 junho. 2016.

[15] VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton University Press, 1944.