Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística
Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística

# Existência de Soluções Multi-Bump para uma Classe de Problemas Quasilineares

**Robert Wagner Rocha dos Santos**

Natal-RN
Maio, 2019

**Robert Wagner Rocha dos Santos**

# Existência de Soluções Multi-Bump para uma Classe de Problemas Quasilineares

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Modelagem Matemática
Linha de Pesquisa: Otimização, Problemas Inversos e Matrizes

Orientador

Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística – PPGMAE

Natal-RN

Maio, 2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Santos, Robert Wagner Rocha dos.
Existência de soluções Multi-Bump para uma classe de problemas quasilineares / Robert Wagner Rocha dos Santos. - 2019.
150f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística. Natal, 2019.
Orientador: Ailton Rodrigues da Silva.

1. Matemática - Dissertação. 2. p-Laplaciano - Dissertação. 3. Método variacional - Dissertação. 4. Iteração de Moser - Dissertação. 5. Equação elíptica quasilinear - Dissertação. I. Silva, Ailton Rodrigues da. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título *Existência de Soluções Multi-Bump Para uma Classe de Problemas Quasilineares* apresentada por Robert Wagner Rocha dos Santos e aceita pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

---

Dr. Ailton Rodrigues da Silva
Orientador
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

---

Dr. Diego Ferraz de Souza
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

---

Dr. José Fernando Leite Aires
Unidade Acadêmica de Matemática
Universidade Federal de Campina Grande

Natal-RN, 31 de maio de 2019.

Em memória da minha mãe Francisca Edna da Rocha Santos.

Sei que a senhora está sorrindo com os anjos.

# Agradecimentos

A Deus por me conceder a vida, saúde, capacidade e sabedoria para a realização deste trabalho.

Ao meu pai Geraldo Pedro dos Santos Junior pelo seu amor, ensinamentos e exemplo de caráter.

A minha mãe Francisca Edna da Rocha Santos (*in memorian*) por todo o seu amor, carinho, ajuda e cuidados. Sinto muito sua falta, nunca esquecerei a forma carinhosa que me tratava, de seus abraços, sorrisos, sua voz doce e sua alegria que sempre fazia bem a todos que te rodeavam.

A minha amada e linda esposa Sunamita da Silva Barbosa Santos pela sua paciência, cuidados e companheirismo, principalmente nos momentos difíceis. Sou muito feliz por viver ao seu lado. Te amo!

Ao meu orientador, Ailton Rodrigues da Silva, que sempre se empenhou ao máximo para oferecer o seu melhor para meu aprendizado. Agradeço principalmente por todo seu esforço, dedicação, orientação e paciência. Com você aprendi o que significa ter uma formação em análise!

Aos professores Marcelo Bourguignon Pereira e Marconio Silva dos Santos os quais muito me ajudaram ao longo dessa jornada.

Aos professores Diego Ferraz de Souza, Geilson Pereira Germano e José Fernando Leite Aires, pela avaliação, contribuições para melhorar este trabalho e pela disponibilidade para me ajudar.

A todos os professores do PPGMAE por compartilharem comigo tantos conhecimentos.

A todos os meus amigos do PPGMAE pelo companheirismo!

A CAPES pelo apoio financeiro.

*Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.*

Eclesiastes 3:1

# Existência de Soluções Multi-Bump para uma Classe de Problemas Quasilineares

Autor: Robert Wagner Rocha dos Santos

Orientador(a): Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva

## Resumo

Utilizando métodos variacionais mostramos a existência de soluções Multi-Bump positivas para a seguinte classe de problemas quasilineares:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1} = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$P_\lambda$}$$

onde $\Delta_p u = \text{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $2 \leq p < N$, $\lambda \in (0, \infty)$ é um parâmetro, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento subcrítico e $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que verificam algumas hipóteses.

*Palavras-chave*: p-Laplaciano, Método Variacional, Equação Elíptica Quasilinear, Iteração de Moser.

# Existence of Multi-Bump Solutions For a Class of Quasilinear Problems

Author: Robert Wagner Rocha dos Santos

Advisor: Prof. Dr. Ailton Rodrigues da Silva

## Abstract

Using variational methods we show the existence of a positive Multi-Bump solutions for the following class of quasilinear problems:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1} = f(u), \text{ on } \mathbb{R}^N \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$P_\lambda$}$$

where $\Delta_p u = \text{div }(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ is the p-Laplacian operator, $2 \leq p < N$, $\lambda \in (0, \infty)$ is a parameter, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function with subcritical growth and $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are continuous functions which verify some hypotheses.

*Keywords*: p-Lapalcian, Variational Method, Quasilinear Elliptical Equation, Moser's iteration.

# Sumário

# Lista de Símbolos

- Se $f$ é uma função integrável, denotaremos por $\displaystyle\int_\Omega f$ a integral $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$;
- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço euclidiano N-dimensional;
- A expressão *q.t.p.* é uma abreviação para quase todo ponto;
- $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_\Omega |u|^p < \infty$ onde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $L^\infty(\Omega)$, é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que existe $C > 0$ com $|u| \leq C$ q.t.p. em $\Omega$;
- $W^{1,p}(\Omega)$ é espaço de Sobolev, com $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $|u|_{p,\Omega} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma usual em $L^p(\Omega)$;
- $|u|_{\infty,\Omega} = \inf\{C > 0; |u| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$ é a norma de $u$ em $L^\infty(\Omega)$;
- $\|u\|_{p,\Omega} = \left[\displaystyle\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |u|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$ é a norma usual em $W^{1,p}(\Omega)$;
- Escreveremos $|u|_p, |u|_\infty$ e $\|u\|_p$ quando $\Omega = \mathbb{R}^N$;
- $\Delta_p u = \text{div } (|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ denota o operador p-Laplaciano;
- $B_R(a)$ bola de centro $a$ e raio $R$;
- Se $A \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável à Lebesgue, então $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $A$;
- $\text{int}(\Omega)$ interior de $\Omega$;
- $\partial(\Omega)$ fronteira de $\Omega$;
- $\overline{\Omega}$ fecho de $\Omega$;
- $X^c$ complementar do conjunto $X$;

- $o_n(1)$ sequência de números reais que converge para zero quando $n \to \infty$;
- $\to$ e $\rightharpoonup$ convergência forte e convergência fraca, respectivamente;
- $supp(u)$ denota o suporte da função $u$;
- $X \hookrightarrow Y$ denota que $X$ está imerso continuamente em $Y$;
- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega); u$ é k-vezes continuamente diferenciável$\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C(\Omega); supp(u)$ é compacto$\}$;
- $sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ denota o sinal de $x$;
- $\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$ denota a função característica de $\Omega$.

# Introdução

Na presente dissertação, apresentamos os resultados obtidos por Alves (2006) sobre a existência de soluções Multi-Bump positivas para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1} = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$P_\lambda$}$$

onde $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $2 \leq p < N$, $\lambda \in (0, \infty)$ é um parâmetro e $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, satisfazendo:

**(H1)** O conjunto $\Omega := \text{int}\big(V^{-1}\{0\}\big)$ é não-vazio, aberto limitado, possui fronteira suave e $V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$. Além disso, $\Omega$ consiste de $k$ componentes conexas denotadas por $\Omega_j, j \in \{1, 2, ..., k\}$, satisfazendo

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ... \cup \Omega_k \quad \text{e} \quad d(\Omega_i, \Omega_j) > 0, \text{ para } i \neq j.$$

**(H2)** Existem constantes positivas $M_0$ e $M_1$ verificando

$$0 < M_0 \leq \lambda V(x) + Z(x), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda \geq 1 \quad \text{e} \quad |Z(x)| \leq M_1, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Ao longo do trabalho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada não-linearidade, é uma função contínua que verifica as seguintes hipóteses:

**(f1)** Existe $q \in (p, p^*)$, tal que

$$\limsup_{|t| \to \infty} \frac{f(t)}{|t|^{q-1}} = m < \infty, \quad \text{onde } p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

**(f2)** $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = 0.$

**(f3)** (Condição de Ambrosetti - Rabinowitz) Existe $\theta \in (p, p^*)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq t f(t), \text{ para todo } t > 0, \text{ onde } F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

**(f4)** A função $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^{p-1}}$ é crescente para $t > 0$.

Diversos estudos têm dado ênfase ao estudo da seguinte equação não-linear de Schrödinger

$$ih\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -h^2\Delta\Psi + (V(x) + E)\Psi - f(\Psi), \text{ para todo } x \in \Omega, \qquad (NLS)$$

onde $h, E > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave. Soluções de $(NLS)$, chamadas de ondas estacionárias ou *standing waves*, são da forma

$$\Psi(x) = \exp\left(-iEt\right)u(x), \quad E \in \mathbb{R},$$

onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é solução da equação

$$-h^2\Delta u + (\lambda V(x) + E)u = f(u), \text{ em } \Omega. \qquad (P)_h$$

A equação $(NSL)$ é um dos objetos de estudo da Física quântica e surge em problemas envolvendo óptica não-linear, Física de plasma e Física da matéria condensada.

O problema $(P)_h$ é um caso particular de $(P_\lambda)$ e foi estudado em diversos trabalhos encontrados na literatura. Por exemplo, Bartsch e Wang (2000) estudaram o problema $(P_\lambda)$ quando $p = 2$, $Z \equiv 1$ e $f(t) = t^q$, onde $q \in (2, 2^* - 1)$. Mais precisamente, os autores mostraram a existência e multiplicidade de soluções para seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = u^q, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

para todo $\lambda$ suficientemente grande, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não-negativa com $V^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ e

$$|\{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \leq M_0\}| < \infty$$

para alguma constante $M_0$ positiva. Posteriormente, Ding e Tanaka (2003) estudaram o problema $(P_\lambda)$ para o caso em que $p = 2$ e $f(t) = t^q$, ou seja, consideraram a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + Z(x))u = u^q, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u > 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \qquad (P_\lambda)_1$$

com $q \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ e $N \geq 3$. Os autores mostraram que há pelo menos $2^{k-1}$ soluções para $(P_\lambda)_1$ com $\lambda$ suficientemente grande, onde a família de soluções tem a seguinte característica: Para cada subconjunto não-vazio $\Gamma \subset \{1, 2, ..., k\}$ e $\epsilon > 0$ fixado, existe $\lambda^* > 0$ tal que, $(P_\lambda)_1$ possui uma solução $u_\lambda$, para $\lambda \geq \lambda^* = \lambda^*(\epsilon)$, satisfazendo

$$\left| \int_{\Omega_j} \left( |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda V(x) + Z(x)) u_\lambda^2 \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p-1} \right)^{-1} c_j \right| < \epsilon, \forall j \in \Gamma$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_j} \left( |\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2 \right) < \epsilon,$$

onde $c_j$ é o nível minimax do funcional energia associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + Z(x) u = u^q, \text{ em } \Omega_j \\ u > 0, \text{ em } \Omega_j \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega_j. \end{cases}$$

Há diversos artigos que mostram a existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos envolvendo o operador Laplaciano. Citamos Clapp e Ding (2004), Bartsch, Pankov e Wang (2001), Figueiredo e Ding (2002), Gui (1996), Séré (1992) e algumas de suas referências.

Neste trabalho, estamos interessados em mostrar a existência de soluções Multi-Bump para a classe de problemas $(P_\lambda)$, isto é, para cada conjunto não-vazio $\Gamma \subset \{1, 2, ..., k\}$, soluções $u_\lambda$ de $(P_\lambda)$ que convergem em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, quando $\lambda \to \infty$, para uma função $u$ solução de energia mínima[1] do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x)|u|^{p-2}u = f(u). \text{ em } \ \Omega_\Gamma, \\ u > 0, \text{ em } \ \Omega_\Gamma, \\ u = 0, \text{ em } \ \partial\Omega_\Gamma. \end{cases} \tag{$P_\Gamma$}$$

Uma característica comum aos trabalhos de existência de soluções Multi-Bump é a recorrência ao método de penalização desenvolvido por Del Pino e Felmer (1996) e a iteração de Moser.

Motivado por Ding e Tanaka (2003) e Alves e Ding (2007), Alves (2006) generalizou os resultados obtidos por Ding e Tanaka (2003) para o operador p-Laplaciano. No presente trabalho, estudaremos os resultados obtidos por Alves (2006). Para tanto, faremos uso de métodos variacionais para mostrar a existência de soluções fracas para o problema $(P_\lambda)$.

No que segue, antes de enunciarmos o teorema principal desta dissertação, apresentaremos a definição de solução fraca para o problema $(P_\lambda)$. Para este fim, vamos considerar

[1]Uma solução $u$ de $(P_\lambda)$ é uma solução de energia mínima quando $I(u) \leq I(v)$, para qualquer $v$ solução de $(P_\lambda)$.

para cada $\lambda > 0$ o seguinte conjunto

$$E_\lambda = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p < \infty \right\},$$

munido com a seguinte norma [2]

$$\begin{aligned} \| \ \|_\lambda : \ \ E_\lambda \ &\to \mathbb{R} \\ u \ &\mapsto \left( \int_{\mathbb{R}^N} \Big[ |\nabla u|^p + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^p \Big] \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Dizemos que $u \in E_\lambda$ é uma solução fraca de $(P_\lambda)$ se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v, \ \forall v \in E_\lambda.$$

A seguir, enunciamos o principal resultado deste trabalho:

**Teorema 0.1.** *Supondo que $(H1)-(H2), (f_1)-(f_4)$ ocorrem. Então, para qualquer subconjunto não-vazio $\Gamma$ de $\{1, 2, ..., k\}$, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para $\lambda \geq \lambda^*$, $(P_\lambda)$ possui uma família de soluções verificando: Para qualquer sequência $\lambda_n \to \infty$, é possível obter uma subsequência $\lambda_{n_i}$ tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para uma função $u$ que satisfaz $u(x) = 0$ para todo $x \notin \Omega_\Gamma$ e a restrição de $u|_{\Omega_j}$ é uma solução de energia mínima de*

$$-\Delta_p u + Z(x)u^{p-1} = f(u), u > 0 \ \text{em} \ \Omega_j, \ u|_{\partial\Omega_j} = 0 \ \text{para} \ j \in \Gamma \ \text{onde} \ \Omega_\Gamma = \bigcup_{j\in\Gamma} \Omega_j.$$

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 1, mostramos que $E_\lambda$ é um espaço de Banach reflexivo, o funcional $J_\lambda$ definido por

$$\begin{aligned} J_\lambda : \ \ E_\lambda \ &\to \mathbb{R} \\ u \ &\mapsto \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \Big( |\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p \Big) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u), \end{aligned}$$

chamado de funcional energia associado a $(P_\lambda)$, é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ e que as soluções fracas de $(P_\lambda)$ podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional $J_\lambda$.

No Capítulo 2, definimos um problema auxiliar, mostramos que o funcional energia associado ao problema auxiliar satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e verifica a condição $(PS)_c$. Por fim, mostramos que o problema auxiliar possui solução positiva.

[2] No Capítulo 1, será provado que $\| \ \|_\lambda$ é uma norma em $E_\lambda$.

No Capítulo 3, provamos que as soluções encontradas no Capítulo 2 são soluções do problema $(P_\lambda)$. Mostramos que tais soluções são Multi-Bump, definimos variedade de Nehari, mostramos a caracterização do nível do Passo da Montanha para um determinado funcional e encontramos um valor crítico especial para o funcional associado ao problema auxiliar. Para finalizar, demonstramos o Teorema 0.1.

No Apêndice A, apresentamos os espaços de Lebesgue e Sobolev e as principais propriedades utilizadas ao longo do trabalho. Em seguida, no Apêndice B, enunciamos o Lema da Deformação e as versões do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti - Rabinowitz e Willem. O Apêndice C é dedicado a resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$, Teoria da Medida e Análise Funcional. Para concluir, no Apêndice D enunciamos os principais resultados utilizados neste trabalho sobre Teoria do Grau Topológico.

# 1 O Espaço $E_\lambda$ e o Funcional $J_\lambda$

Neste capítulo, mostraremos que $E_\lambda$ é um espaço de Banach reflexivo, que o funcional $J_\lambda$, chamado de funcional energia, associado a $(P_\lambda)$ é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ e que as soluções fracas de $(P_\lambda)$ podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional $J_\lambda$.

## 1.1 O Espaço $E_\lambda$

Nesta seção, mostraremos que $E_\lambda$ é um espaço de Banach reflexivo. Recorde que definimos $E_\lambda$ como o seguinte espaço de funções

$$E_\lambda = \Big\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p < \infty \Big\}.$$

Inicialmente provaremos que $E_\lambda$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

**Proposição 1.1.** *$E_\lambda$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Por definição $E_\lambda \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$. Assim, basta mostrar que $E_\lambda$ é um subespaço vetorial de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato, observe que $0 \in E_\lambda$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} V(x)|0|^p = 0 < \infty.$$

Sejam $u, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que $\alpha u + v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pois $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial. Pelo Lema C.2, dados $a, b > 0$ e $p \in [1, \infty)$ obtemos

$$|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p), \tag{1.1}$$

o que implica

$$|\alpha u + v|^p \leq 2^p(|\alpha u|^p + |v|^p).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} V(x)|\alpha u + v|^p \quad \leq \quad 2^p \left( |\alpha|^p \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} V(x)|u|^p + \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} V(x)|v|^p \right) < \infty,$$

de onde segue que $\alpha u + v \in E_\lambda$, mostrando que $E_\lambda$ é subespaço vetorial de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

No que segue, para cada $\lambda > 0$ definiremos a seguinte função

$$\begin{aligned} \|\ \|_\lambda : E_\lambda &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |\nabla u|^p + \big(\lambda V(x) + Z(x)\big)|u|^p \right] \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

**Proposição 1.2.** *A função $u \mapsto \|u\|_\lambda$ é uma norma em $E_\lambda$.*

*Demonstração.* Sejam $u, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $\|u\|_\lambda = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Se $u = 0$, então

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |\nabla 0|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|0|^p \right] \right)^{1/p} = 0,$$

que implica $\|u\|_\lambda = 0$. Reciprocamente, suponha que $\|u\|_\lambda = 0$, isto é,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \geq 0,$$

por (H2),

$$0 \geq \left( \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \int_{\mathbb{R}^N} M_0 |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Então,

$$\left( M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

de onde segue que $|u|_p = 0$ e, portanto, $u = 0$.

(ii) $\|\alpha u\|_\lambda = |\alpha| \|u\|_\lambda$.

$$\begin{aligned} \|\alpha u\|_\lambda &= \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |\nabla(\alpha u)|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|\alpha u|^p \right] \right)^{1/p} \\ &= \left( |\alpha|^p \int_{\mathbb{R}^N} \left[ |\nabla u|^p + \lambda V(x) + Z(x))|u|^p \right] \right)^{1/p} \\ &= |\alpha| \|u\|_\lambda. \end{aligned}$$

(iii) $\|u+v\|_\lambda \leq \|u\|_\lambda + \|v\|_\lambda$. Para mostrar o item $(iii)$ vamos precisar da seguinte afirmação.

**Afirmação 1.1.** *A função*

$$\begin{aligned} \|\ \|_{T_\lambda} : E_\lambda &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

*é uma norma, onde $T_\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $T_\lambda(x) = \lambda V(x) + Z(x)$.*

De fato, os itens $(i)$ e $(ii)$ seguem de maneira análoga feita anteriormente para $\|\ \|_\lambda$. Vamos mostrar que a função $\|\ \|_{T_\lambda}$ verifica a desigualdade triangular. Note que

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{T_\lambda}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u+v|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}} T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1}|u+v|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{T_\lambda}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}} T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1}(|u|+|v|) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}} |u| T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}} |v| T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1}. \end{aligned}$$

Observe que $T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}}|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}}|v|\right)^p = \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|v|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x)|v|^p + \int_{\mathbb{R}^N} Z(x)|v|^p,$$

por $(H_2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}}|v|\right)^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x)|v|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)||v|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x)|v|^p + M_1 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p < \infty.$$

De maneira análoga mostra-se que $T_\lambda(x)^{\frac{1}{p}}|u| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, observe que

$$T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N),$$

pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} = \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u+v|^p,$$

e por (1.1),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(T_\lambda(x)^{\frac{p-1}{p}} |u+v|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^p + 2^p \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|v|^p < \infty.$$

Assim, pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema A.5, Apêndice A),

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{T_\lambda}^p &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u+v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|v|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u+v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u+v|^p\right)^{1}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u+v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|v|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|u+v\|_{T_\lambda} \le \|v\|_{T_\lambda}+\|v\|_{T_\lambda},$$

mostrando que $\| \ \|_{T_\lambda}$ é uma norma em $E_\lambda$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|u+v\|_\lambda &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u+\nabla v|^p+\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda V(x)+Z(x))|u+v|^p\right)^{1/p}\\ &= \left(|\nabla u+\nabla v|_p+\|u+v\|_{T_\lambda}^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular

$$\|u+v\|_\lambda \le \left(\Big[|\nabla u|_p+|\nabla v|_p\Big]^p+\Big[\|u\|_{T_\lambda}+\|v\|_{T_\lambda}\Big]^p\right)^{1/p}.$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$ defina as sequências $(v_k)$, $(w_k)$ de $l^p$ dadas por

$$v_k=(\|\nabla u\|_p,\|u\|_{T_\lambda},0,0,...) \ \text{ e } \ w_k=(\|\nabla v\|_p,\|v\|_{T_\lambda},0,0,...).$$

Pela Desigualdade de Minkowski (ver Teorema A.4, Apêndice A)

$$\begin{aligned}\left(\Big[|\nabla u|_p+|\nabla v|_p\Big]^p+\Big[\|u\|_{T_\lambda}+\|v\|_{T_\lambda}\Big]^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{k=1}^{2}|v_k+w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\sum_{k=1}^{2}|v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{2}|w_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(|\nabla u|_p^p+\|u\|_{T_\lambda}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(|\nabla v|_p^p+\|v\|_{T_\lambda}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|u\|_\lambda+\|v\|_\lambda,\end{aligned}$$

o que prova o item $(iii)$. Portanto $\| \ \|_\lambda$ é uma norma em $E_\lambda$. Desse modo, $(E_\lambda, \|u\|_\lambda)$ é um espaço vetorial normado. $\square$

Ao longo desta dissertação usaremos o seguinte resultado de imersão contínua:

**Proposição 1.3.** *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|u\|_\lambda \quad \textit{para todo} \quad u \in E_\lambda, \tag{1.2}$$

*ou seja, vale a imersão contínua*

$$E_\lambda \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

*Demonstração.* Sabemos que $E_\lambda \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, resta mostrar a existência de uma constante $C > 0$ verificando (1.2). Para tanto, fixemos $u \in E_\lambda$ e observe que

$$\|u\|_p \ = \ \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^p + |u|^p\right]\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{M_0}\int_{\mathbb{R}^N} M_0|u|^p\right)^{1/p},$$

e por $(H_2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} M_0|u|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
\|u\|_p &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{M_0}\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\max\left\{1, \frac{1}{M_0}\right\}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{1}{M_0}\int_{\mathbb{R}^N} \max\left\{1, \frac{1}{M_0}\right\}(\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\right)^{1/p} \\
&\leq C\|u\|_\lambda,
\end{aligned}$$

onde $C = \max\left\{1, \frac{1}{M_0}\right\}^{\frac{1}{p}}$. Portanto,

$$E_\lambda \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

**Observação:** Vale ressaltar que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, então das imersões de Sobolev (Ver Apêndice A.10)

$$E_\lambda \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad \text{onde} \quad s \in [1, p^*),$$

continuamente.

A seguir, demostraremos que $E_\lambda$ é um espaço de Banach.

**Proposição 1.4.** *$E_\lambda$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $(u_n)$ uma sequência de Cauchy em $E_\lambda$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$,

$$\|u_n - u_m\|_\lambda < \epsilon. \tag{1.3}$$

Pela Proposição 1.3, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_n - u_m\| \leq C\|u_n - u_m\|_\lambda < \epsilon,$$

ou seja, $(u_n)$ é uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach, existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p \to 0,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p \to 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p \to 0. \tag{1.4}$$

**Afirmação 1.2.** $u \in E_\lambda$.

É suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p < \infty.$$

Por (1.4), $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema A.8, existem uma subsequência $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ e $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_{n_k} \to u \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \ \text{ e } \ |u_{n_k}| \leq h \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N. \tag{1.5}$$

Por $(H_2)$, $|Z(x)| \leq M_1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então

$$\begin{aligned} \lambda V(x) &= (\lambda V(x) + Z(x)) - Z(x)) \\ &\leq T_\lambda(x) + |Z(x)| \\ &\leq T_\lambda(x) + M_1, \end{aligned}$$

onde $T_\lambda(x) = \lambda V(x) + Z(x)$. Além disso, aplicando a desigualdade (1.1),

$$|u|^p = |(u - u_{n_k}) + u_{n_k}|^p \leq 2^p|u - u_{n_k}|^p + 2^p|u_{n_k}|^p, \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p &\le \frac{2^p}{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(T_\lambda(x)+M_1)|u_{n_k}-u|^p+\int_{\mathbb{R}^N}(T_\lambda(x)+M_1)|u_{n_k}|^p\right)\\
&\le \frac{2^p}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u_{n_k}-u|^p+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}-u|^p+\frac{2^p}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}T_\lambda(x)|u_{n_k}|^p\\
&\quad+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}|^p\\
&\le \frac{2^p}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u_{n_k}-u|^p+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}-u|^p+2^p\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_{n_k}|^p\\
&\quad+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}|^p.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por (1.3), para todo $k\in\mathbb{N}$ existe $m_k>n_0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n-\nabla u_{m_k}|^p+\int_{\mathbb{R}^N}T_\lambda(x)|u_n-u_{m_k}|^p<\epsilon^p$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N}T_\lambda(x)|u_n-u_{m_k}|^p<\epsilon^p.$$

Logo,

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}T_\lambda(x)|u_n-u_{m_k}|^p\le\liminf_{k\to\infty}\epsilon^p.$$

Pelo Lema de Fatou (ver Apêndice A, Lema A.7)

$$\int_{\mathbb{R}^N}\liminf_{k\to\infty}T_\lambda(x)|u_n-u_{m_k}|^p\le\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}T_\lambda(x)|u_n-u_{m_k}|^p.$$

Consequentemente, por (1.5)

$$\int_{\mathbb{R}^N}T_\lambda(x)|u_n-u|^p\le\epsilon^p,\forall n>n_0. \tag{1.6}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p \le \frac{2^p}{\lambda}\epsilon^p+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}-u|^p+2^p\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_{n_k}|^p+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}|^p,$$

para todo $n_k>n_0$. Por outro lado, de (1.4)

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_k}-u|^p<\epsilon^p,\quad\forall n_k>n_0,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p \le \frac{2^p}{\lambda}\epsilon^p+\frac{2^pM_1}{\lambda}\epsilon^p+2^p\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_{n_0+1}|^p+\frac{2^pM_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N}|u_{n_0+1}|^p<\infty,$$

mostrando que $u\in E_\lambda$.

**Afirmação 1.3.** *$u_n \to u$ em $E_\lambda$.*

De (1.6),

$$\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u_n - u|^p \leq \epsilon^p, \quad \forall n > n_0,$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u_n - u|^p \to 0,$$

e por (1.4)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p \to 0,$$

consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u_n - u|^p \to 0.$$

Desse modo,

$$\|u_n - u\|_\lambda \to 0.$$

□

No próximo resultado mostraremos que $E_\lambda$ é um espaço reflexivo. Para este fim, inicialmente vamos definir uma norma em $E_\lambda$ equivalente à norma $\| \ \|_\lambda$. Para cada $\lambda > 0$ defina

$$\begin{aligned} \| \ \|_{\lambda,*} : E_\lambda &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p + \left| T_\lambda^{\frac{1}{p}} u \right|_p . \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que $\| \ \|_{\lambda,*}$ é uma norma em $E_\lambda$, pois $| \ |_p$ é uma norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

**Lema 1.1.** *As normas $\| \ \|_{\lambda,*}$ e $\| \ \|_\lambda$ são equivalentes.*

*Demonstração.* De fato, devemos provar os itens $(i)$ e $(ii)$ a seguir.

(i) Existe $C_1 > 0$ tal que $\| \ \|_{\lambda,*} \leq C_1 \| \ \|_\lambda$.

Note que para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} \leq \left(\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)^p = |\nabla u|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = N|\nabla u|_p.
\end{aligned}$$

Assim, como $\left|T_\lambda^{\frac{1}{p}}u\right|_p = \|u\|_{T_\lambda}$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\lambda,*} &= \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p + \left|T_\lambda^{\frac{1}{p}}u\right|_p \\
&\leq N|\nabla u|_p + \|u\|_{T_\lambda} \\
&= N(|\nabla u|_p^p)^{\frac{1}{p}} + (\|u\|_{T_\lambda}^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq N(|\nabla u|_p^p + \|u\|_{T_\lambda}^p)^{\frac{1}{p}} + (\|u\|_{T_\lambda}^p + |\nabla u|_p^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_1\|u\|_\lambda,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = N + 1$, mostrando o item $(i)$.

(ii) Existe $C_2 > 0$ tal que $\|\ \|_\lambda \leq C_2\|\ \|_{\lambda,*}$.

Observe que

$$|\nabla u|^p = \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{1.7}$$

Aplicando o Lema C.2 na desigualdade anterior temos

$$|\nabla u|^p \leq 2^{\frac{Np}{2}}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^p + \cdots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^p\right), \tag{1.8}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\|u\|_\lambda &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p + \|u\|_{T_\lambda}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(2^{\frac{Np}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^p + \cdots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^p\right] + \|u\|_{T_\lambda}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\|_\lambda \;\leq\; \left(2^{\frac{Np}{2}}\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p + \|u\|_{T_\lambda}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

Aplicando novamente o Lema C.2

$$\|u\|_\lambda \;\leq\; 2^{\frac{1}{p}}\left(\left[2^{\frac{Np}{2}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^p\right]^{\frac{1}{p}} + (\|u\|_{T_\lambda}^p)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é,

$$\|u\|_\lambda \;\leq\; 2^{\frac{1}{p}}\left[2^{\frac{N}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \|u\|_{T_\lambda}\right].$$

Pelo Lema C.2,

$$\begin{aligned}\|u\|_\lambda \;&\leq\; 2^{\frac{1}{p}}\left(2^{\frac{N}{2}}2^{\frac{N}{p}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p + \|u\|_{T_\lambda}\right)\\ &\leq\; \left(2^{\frac{1}{p}+\frac{N}{2}+\frac{N}{p}}+1\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p + \|u\|_{T_\lambda}\right) = C_2\|u\|_{\lambda,*},\end{aligned} \tag{1.11}$$

mostrando o item $(ii)$.

□

**Observação:** Como $(E_\lambda, \|\ \|_\lambda)$ é um espaço de Banach e as normas $\|\ \|_\lambda$ e $\|\ \|_{\lambda,*}$ são equivalentes, segue que $(E_\lambda, \|\ \|_{\lambda,*})$ é um espaço de Banach. Dessa forma, para justificar que $(E_\lambda, \|\ \|_\lambda)$ é reflexivo faremos uso do Teorema C.3. Assim, mostraremos que $(E_\lambda, \|\ \|_{\lambda,*})$ é reflexivo. Para provar que $(E_\lambda, \|\ \|_\lambda)$ é reflexivo exibiremos um isomorfismo isométrico de $(E_\lambda, \|\ \|_{\lambda,*})$ em $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N)$ e aplicaremos o Teorema C.4.

**Proposição 1.5.** *O espaço* $(E_\lambda, \|\ \|_{\lambda,*})$ *é reflexivo.*

*Demonstração.* Para cada $\lambda > 0$ defina

$$\begin{aligned} S_\lambda : (E_\lambda, \|\ \|_{\lambda,*}) \;&\to\; \left((L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N), \|\ \|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N\times L^p(\mathbb{R}^N)}\right)\\ u \;&\mapsto\; S_\lambda u = (\nabla u, T_\lambda^{\frac{1}{p}} u),\end{aligned}$$

onde a função $T_\lambda^{\frac{1}{p}}(x) = (\lambda V(x) + Z(x))^{\frac{1}{p}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, será denotada por $T_\lambda^{\frac{1}{p}}$. Observe que $S_\lambda$ está bem definido. Além disso,

(i) $S_\lambda$ é linear.

Sejam $u, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
S_\lambda(u+\alpha v) &= (\nabla(u+\alpha v), T_\lambda^{\frac{1}{p}}(u+\alpha v)) \\
&= (\nabla u + \alpha \nabla v, T_\lambda^{\frac{1}{p}} u + \alpha T_\lambda^{\frac{1}{p}} v) \\
&= (\nabla u, T_\lambda^{\frac{1}{p}} u) + \alpha(\nabla v, T_\lambda^{\frac{1}{p}} v) \\
&= S_\lambda u + \alpha S_\lambda v.
\end{aligned}
$$

(ii) $S_\lambda$ é isometria

De fato, seja $u \in E_\lambda$. Aplicando o Lema C.1

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\lambda,*} &= \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_p + |T_\lambda^{\frac{1}{p}} u|_p \\
&= |\nabla u|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} + |T_\lambda^{\frac{1}{p}} u|_p. \\
&= \|(\nabla u, T_\lambda^{\frac{1}{p}} u)\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|S_\lambda u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}
$$

mostrando que $S_\lambda$ é uma isometria.

(iii) $S_\lambda$ é injetiva

De fato, seja $u \in Kern(S_\lambda)$. Então, $\|S_\lambda u\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$. Como $S_\lambda$ é uma isometria, $\|u\|_{\lambda,*} = 0$. Logo, $u = 0$.

**Afirmação 1.4.** *$S_\lambda(E_\lambda)$ é subespaço fechado de $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N)$.*

De fato, por $(H_2)$, $T_\lambda \geq M_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, então

$$
\begin{aligned}
S_\lambda(E_\lambda) &= \{S_\lambda(u); u \in E_\lambda\} \\
&= \{(\nabla u, T_\lambda^{\frac{1}{p}} u); u \in E_\lambda\} \\
&= \left\{ T_\lambda^{\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{T_\lambda^{\frac{1}{p}}} \nabla u, u \right); u \in E_\lambda \right\} \\
&= T_\lambda^{\frac{1}{p}} \left\{ \left( \frac{1}{T_\lambda^{\frac{1}{p}}} \nabla u, u \right); u \in E_\lambda \right\} \\
&= T_\lambda^{\frac{1}{p}} \mathrm{graf} H_\lambda,
\end{aligned}
$$

onde graf$H_\lambda$ denota o gráfico da função

$$\begin{array}{rcl} H_\lambda : E_\lambda & \to & (L^p(\mathbb{R}^N)^N \\ u & \mapsto & \dfrac{1}{T_\lambda^{\frac{1}{p}}}\nabla u. \end{array}$$

Note que $H_\lambda$ é linear. Além disso, novamente usando $(H_2)$,

$$\begin{array}{rcl} \|H_\lambda(u)\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{1}{T_\lambda^{\frac{1}{p}}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{T_\lambda^{\frac{1}{p}}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \displaystyle\frac{1}{M_0^{\frac{1}{p}}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p \\ & \leq & \displaystyle\frac{1}{M_0^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p + \left|T_\lambda^{\frac{1}{p}}u\right|_p\right), \end{array}$$

ou seja,

$$\|H_\lambda(u)\|_{(L^p(\mathbb{R}^N))^N} \leq C\|u\|_{\lambda,*}$$

onde $C = \frac{1}{M_0^p}$, de onde segue que $H_\lambda$ é contínua. Agora, mostraremos que graf$H_\lambda$ é fechado. De fato, seja $(u_n, H_\lambda(u_n))$ uma sequência em graf$H_\lambda$ tal que

$$(u_n, H_\lambda(u_n)) \to (a, b).$$

Assim,

$$u_n \to a \;\text{ e }\; H_\lambda(u_n) \to b.$$

Como $H_\lambda$ é contínua, segue que

$$u_n \to a \Rightarrow H_\lambda(u_n) \to H_\lambda(a).$$

Pela unicidade do limite

$$H_\lambda(a) = b,$$

mostrando que $(a, H_\lambda(a)) \in$ graf$H_\lambda$, isto é, o graf$H_\lambda$ é fechado. Portanto $S_\lambda(E_\lambda)$ é um subespaço fechado de $(L^p(\mathbb{R}^N))^N \times L^p(\mathbb{R}^N)$. Desse modo, pelo Teorema C.2, $S_\lambda(E_\lambda)$ é reflexivo. Como $E_\lambda$ é isomorfo isometricamente a $S_\lambda(E_\lambda)$, aplicando o Teorema C.4 concluímos que $E_\lambda$ é reflexivo. $\square$

A seguir, apresentamos dois resultados técnicos que serão utilizados ao longo da dissertação. Com esta finalidade, fixemos as seguintes notações.

Para cada $A \subset \mathbb{R}^N$ aberto sejam

$$E(A) = \Big\{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \int_A V(x)|u|^p < \infty\Big\}$$

e

$$\|u\|_{\lambda,A} = \left(\int_A \Big[|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big]\right)^{1/p}.$$

**Lema 1.2.** *Existem $\delta_0, v_0 > 0$ tais que, para todo conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^N$*

$$\delta_0\|u\|^p_{\lambda,A} \le \|u\|^p_{\lambda,A} - v_0|u|^p_{p,A}, \quad \forall u \in E(A) \quad e \quad \lambda \ge 1.$$

*Demonstração.* Fixemos arbitrariamente $A \subset \mathbb{R}^N$, $u \in E(A)$ e $\lambda \ge 1$. Observe que utilizando $(H_2)$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^p_\lambda &= \int_A \Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) \\ &\ge \int_A \Big(|\nabla u|^p + M_0|u|^p\Big) \\ &\ge M_0 \int_A |u|^p = M_0|u|^p_{p,A}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_0|u|^p_{p,A} \le \|u\|^p_{\lambda,A}.$$

Desse modo, escrevendo $v_0 = (1-\delta_0)M_0$, com $0 < \delta_0 < 1$, temos que

$$\frac{v_0}{1-\delta_0}|u|^p_{p,A} \le \|u\|^p_{\lambda,A}$$

que é equivalente à

$$\delta_0\|u\|^p_{\lambda,A} \le \|u\|^p_{\lambda,A} - v_0|u|^p_{p,A},$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

O próximo lema mostra que $f$ possui crescimento subcrítico.

**Lema 1.3.** *Suponha que sejam válidas as hipóteses $(f_1)$ e $(f_2)$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$|f(t)| \le \epsilon|t|^{p-1} + C_\epsilon|t|^{q-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

*Demonstração.* Por $(f_1)$, a função $t \mapsto \dfrac{f(t)}{|t|^{q-1}}$ é limitada numa vizinhaça de $+\infty$, ou seja, existem $A, B > 0$ tais que

$$\left|\frac{f(t)}{t^{q-1}}\right| \leq B, \forall |t| > A.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$

$$|f(t)| < \epsilon |t|^{p-1} + B|t|^{q-1}, \forall |t| > A.$$

Por $(f_2)$, para tal $\epsilon$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(t)| < \epsilon |t|^{p-1}, \forall |t| < \delta_\epsilon.$$

Dessa forma,

$$|f(t)| < \epsilon |t|^{p-1} + B|t|^{q-1}, \forall |t| < \delta_\epsilon.$$

Consideremos o conjunto $K_\epsilon = [\delta_\epsilon, A] \cup [-A, -\delta_\epsilon]$. Sendo $K_\epsilon \subset \mathbb{R}$ fechado e limitado, portanto compacto e $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{|t|^{q-1}}$ contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existe $C_{\epsilon,1} > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq C_{\epsilon,1} |t|^{q-1}, \forall t \in K_\epsilon,$$

o que implica,

$$|f(t)| \leq C_{\epsilon,1}|t|^{q-1} + \epsilon |t|^{p-1}, \forall t \in K_\epsilon.$$

Escolhendo $C_\epsilon = \max\{B, C_{\epsilon,1}\}$ obtemos

$$|f(t)| \leq \epsilon |t|^{p-1} + C_\epsilon |t|^{q-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

**Observação:** Da definição de $F$, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^t |f(\xi)| d\xi \leq \int_0^t \epsilon |\xi|^{p-1} + C_\epsilon |\xi|^{q-1} d\xi = \frac{\epsilon}{p}|t|^p + \frac{C_\epsilon}{q}|t|^q, \quad (1.13)$$

onde $q \in [p, p^*)$.

## 1.2 Regularidade do Funcional

Nesta seção, mostraremos que o funcional $J_\lambda$ definido por

$$\begin{aligned} J_\lambda : E_\lambda &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p \right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u), \end{aligned}$$

chamado de funcional energia, associado a $(P_\lambda)$, é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ no sentido da derivada de Gateaux.

**Definição 1.1.** *Seja $I : A \to \mathbb{R}$ um funcional, onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço de Banach $X$. Dizemos que $I$ tem uma derivada de Gateaux, $f \in X'$, em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$*

$$I'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+th) - I(u) - f(th)}{t} = 0.$$

**Proposição 1.6.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $I$ um funcional definido em $X$, se $I$ tem derivada de Gateaux contínua em $X$, então, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

*Demonstração.* Ver Willem (1996). □

**Proposição 1.7.** *O funcional $J_\lambda$ relacionado ao problema $(P_\lambda)$ é de classe $C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.*

*Demonstração.* Sabemos da Proposição 1.4 que $E_\lambda$ é um espaço de Banach. Então basta mostrarmos que $J_\lambda$ possui derivada de Gateaux e que ela é contínua, ou seja, $J_\lambda$ satisfaz as hipóteses da Proposição 1.6.

Para facilitar nossos cálculos, vamos considerar $J_\lambda = J_1 + J_2 - J_3$, onde os funcionais $J_1, J_2$ e $J_3 : E_\lambda \to \mathbb{R}$ são definidos por

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p, \quad J_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p \ \text{ e } \ J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u).$$

**Afirmação 1.5.** *O funcional $J_\lambda$ está bem definido.*

De fato, para $J_1$ observe que $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, para todo $u \in E_\lambda$, então

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p < \infty.$$

Para $J_2$, temos

$$J_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x)|u|^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Z(x)|u|^p.$$

como $u \in E_\lambda$, então

$$\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x)|u|^p < \infty.$$

Por $(H2)$ e por $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} Z(x)|u|^p \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)||u|^p < \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} M_1|u|^p < \infty.$$

Por fim, para $J_3$, por (1.13), fixado $\epsilon_0 > 0$ existe $C_{\epsilon_0}$ tal que

$$|F(t)| \leq \epsilon_0 |u|^p + C_{\epsilon_0}|u|^q,$$

o que implica

$$J_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |F(u)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\epsilon_0 |u|^p + C_{\epsilon_0}|u|^q\Big).$$

Como $u \in E_\lambda$ e $E_\lambda$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ concluímos que existem constantes positivas $c_1$ e $c_2$ tais que

$$J_3(u) \leq \epsilon_0 c_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + C_{\epsilon_0} c_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q < \infty.$$

Portanto, o funcional $J_\lambda$ está bem definido.

**Afirmação 1.6.** $J_1 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.

Mostraremos que $J_1$ possui derivada de Gateaux contínua em $E_\lambda$. Sejam $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in E_\lambda$. Vamos considerar a função

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(s) = \dfrac{1}{p}|\nabla u + st\nabla v|^p. \end{array}$$

Desse modo,

$$g'(s) = |\nabla u + st\nabla v|^{p-2}(\nabla u + st\nabla v)t\nabla v,\ \ g(1) = \frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p \ \text{ e } \ g(0) = \frac{1}{p}|\nabla u|^p.$$

Como $g$ é contínua em $[0,1]$ e é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio (ver Apêndice C, Teorema C.8), existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t} = |\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \gamma t\nabla v)\nabla v$$

Considere uma sequência $(t_n)$ tal que $(t_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, Assim

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t_n\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} |\nabla u + \gamma t_n\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \gamma t_n\nabla v)\nabla v \\ &= |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de $|\gamma t| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t}\right| &= ||\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \gamma t\nabla v)\nabla v| \\
&= |\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-2}|(\nabla u + \gamma t\nabla v)||\nabla v| \\
&= |\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-1}||\nabla v| \\
&< |\nabla u + \nabla v|^{p-1}||\nabla v| \\
&\leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}||\nabla v|.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla u + \nabla v|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Da Desigualdade de Holder,

$$|\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Apêndice A, Teorema A.6)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t_n\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t_n} = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
J_1'(u)v &= \lim_{t_n\to 0}\frac{J_1(u + t_n v) - J_1(u)}{t_n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t_n\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t_n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que existe a derivada de Gateaux do funcional $J_1$ em $u$ na direção de $v$ e

$$J_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v,$$

ou seja, a existência da aplicação

$$\begin{aligned}
J_1' : E_\lambda &\to E_\lambda' \\
u &\mapsto J_1'(u),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
J_1'(u) : E_\lambda &\to \mathbb{R} \\
v &\mapsto J_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $J_1'$ está bem definida.

**Afirmação 1.7.** $J_1'(u) \in E_\lambda'$.

Basta mostrar que $J_1'(u)$ é linear e limitado. De fato, sejam $w, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} J_1'(u)(\alpha w + v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(\alpha w + v) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \\ &= \alpha J_1'(u)w + J_1'(u)v. \end{aligned}$$

Portanto $J_1'(u)$ é linear. Além disso, é limitado, pois

$$|J_1'(u)v| = \Big| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \Big| \le \int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|,$$

como $|\nabla v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$, utilizando a Desigualdade de Hölder e o fato de $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente, obtemos

$$|J'(u)v| \le |\nabla u|_{\frac{p}{p-1}} |\nabla v|_p \le c\|v\|_\lambda, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Onde $c = |\nabla u|_{\frac{p}{p-1}}$. Mostrando que $J'(u) \in E_\lambda'$.

Agora, mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de $J_1$. Seja $(u_n) \subset E_\lambda$ tal que $u_n \to u$ em $E_\lambda$. Assim,

$$|\nabla u_n - \nabla u| \to 0 \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo Teorema A.8, a menos de uma subsequência,

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{1.14}$$

e

$$|\nabla u_n| \le w \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \tag{1.15}$$

onde $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Para todo $v \in E_\lambda$ com $\|v\|_\lambda \le 1$ temos,

$$\begin{aligned} |J_1'(u_n)v - J_1'(u)n| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} |(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla v|. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder para $\frac{p}{p-1}$ e $p$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u||\nabla v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\nabla v|_p.$$

Desde que $E_\lambda$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$

$$|J_1'(u_n)v - J_1'(u)v| \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_\lambda.$$

Como

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{E_\lambda'} = \sup_{\|v\|_\lambda \leq 1} |J_1'(u_n)v - J_1'(u)v|.$$

Então

$$\|J_1'(u_n)v - J_1'(u)v\|_{E_\lambda'} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{1.16}$$

Mostraremos que o lado direito de (1.16) tende a zero, quando $n \to \infty$. Para tanto, vamos aplicar o Teorema da Convergência Dominada. Segue de (1.14) que

$$\left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u - |\nabla u|^{p-2}\nabla u_n\right|^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Combinando (1.15) com a Desigualdade C.2 obtemos

$$\left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2^{\frac{p}{p-1}}(w^p + |\nabla u|^p), \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $w^p$, $|\nabla u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, assim $2^{\frac{p}{p-1}}(w^p + |\nabla u|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Então, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\right|^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

De (1.16), quando $n \to \infty$

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{E_\lambda'} \to 0,$$

ou seja,

$$J_1'(u_n) \to J_1'(u) \quad \text{em} \quad E_\lambda'$$

Portanto, $J_1 \in C^1(E_\lambda; \mathbb{R})$.

**Afirmação 1.8.** *O funcional* $J_2 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.

Mostraremos que $J_2$ possui derivada de Gateaux. Sejam $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u$, $v \in E_\lambda$. Considere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(s) = \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u + stv|^p$, onde

$x \mapsto T_\lambda(x) = \lambda V(x) + Z(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Observe que

$$g'(s) = T_\lambda(x)|u+stv|^{p-2}(u+stv)tv, g(1) = \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u+tv|^p \ \text{ e } \ g(0) = \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u|^p.$$

Como $g$ é contínua em $[0,1]$ e é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{\frac{1}{p}T_\lambda(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u|^p}{t} = T_\lambda(x)|u+\gamma tv|^{p-2}(u+\gamma tv)v.$$

Considere uma sequência $(t_n)$ tal que $(t_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, então

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{p}T_\lambda(x)|u+t_nv|^p - \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u|^p}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} T_\lambda(x)|u+\gamma t_nv|^{p-2}(u+\gamma t_nv)v \\ &= T_\lambda(x)|u|^{p-2}uv.\end{aligned}$$

Utilizando o fato de $|\gamma t| < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\frac{1}{p}T_\lambda(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u|^p}{t}\right| &= |T_\lambda(x)|u+\gamma tv|^{p-2}(u+\gamma tv)v| \\ &= |T_\lambda(x)||u+\gamma tv|^{p-2}|(u+\gamma tv)||v| \\ &= |T_\lambda(x)||u+\gamma tv|^{p-1}||v| \\ &< |T_\lambda(x)||u+v|^{p-1}||v| \\ &\leq |T_\lambda(x)|(|u|+|v|)^{p-1}||v|.\end{aligned}$$

Desde que $|T_\lambda(x)||u+v|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Da Desigualdade de Hölder, $|T_\lambda(x)||u+v|^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}T_\lambda(x)|u+t_nv|^p - \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u|^p}{t_n} = \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^{p-2}uv.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}J_2'(u)v &= \lim_{t_n\to 0} \frac{J_1(u+t_nv) - J_1(u)}{t_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}T_\lambda(x)|u+t_nv|^p - \frac{1}{p}T_\lambda(x)|u|^p}{t_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^{p-2}uv.\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que existe a derivada de Gateaux do funcional $J_2$ em $u$ na direção de $v$ e

$$J_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^{p-2}uv,$$

ou seja, a existência da aplicação

$$\begin{aligned} J_2' : E_\lambda &\rightarrow E_\lambda' \\ u &\mapsto J_2'(u), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} J_2'(u) : E_\lambda &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto J_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} T_\lambda(x)|u|^{p-2}uv. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $J_2'$ está bem definida.

**Afirmação 1.9.** $J_2'(u) \in E_\lambda'$.

$J_2'(u)$ é linear. Sejam $w, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} J_2'(u)(\alpha w + v) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u(\alpha w + v) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uw + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv \\ &= \alpha J_2'(u)w + J_2'(u)v. \end{aligned}$$

Além disso, $J_2'(u)$ é limitada. De fato, note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(\lambda V(x) + Z(x))||u|^{p-1}|v| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|u|^{p-1}|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|. \end{aligned}$$

$|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|\right|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda V(x) + Z(x)||v|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda V(x)||v|^p + |Z(x)||v|^p \\ &\leq |\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||v|^p + M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p < \infty. \end{aligned}$$

De maneira análoga verificamos que $|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando a Desigualdade de Hölder e o fato de $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente, obtemos

$$|\psi_\lambda(v)| \leq \left||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|\right|_p \left||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|u|^{p-1}\right|_{\frac{p}{p-1}} \leq c \left\|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|\right\|_\lambda,$$

onde $c = \left| \lambda V(x) + Z(x) |^{\frac{1}{p}} |v| |\nabla u| \right|_{\frac{p}{p-1}}$. Mostrando que $J_2' \in E_\lambda'$.

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de $J_2$. Seja $(u_n) \subset E_\lambda$ tal que $u_n \to u$ em $E_\lambda$, em particular, $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, consequentemente,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo Terema A.8, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{1.17}$$

e

$$|u_n| \leq w \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{1.18}$$

onde $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Por outro lado, para todo $v \in E_\lambda$ com $\|v\|_\lambda \leq 1$ temos,

$$\begin{aligned}
|J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n v - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u||v|.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder para $\frac{p}{p-1}$ e $p$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u||v| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} |v|_p.$$

Assim, pela imersão de $E_\lambda$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$

$$|J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_\lambda.$$

Como

$$\sup_{||v|| \leq 1} |J_2'(u_n)v - J_2'(u)v| = \|J_2'(u_n)v - J_2'(u)v\|_{E_\lambda'},$$

então,

$$\|J_2'(u_n)v - J_2'(u)v\|_{E_\lambda'} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{1.19}$$

Segue de (1.17) que

$$\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

E por (1.18)

$$\left||u_n|^{p-2}u - |u|^{p-2}u_n\right|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2^{\frac{p}{p-1}}(w^p + |u|^p), \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $2^{\frac{p}{p-1}}(w^p + |u|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . Então, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|u_n - |u_n|^{p-2}u_n\right|^{\frac{p}{p-1}} = 0.$$

Combinando o limite anterior com (1.19), quando $n \to \infty$,

$$\|J_2'(u_n) - J_2'(u)\|_{E_\lambda'} \to 0$$

ou seja,

$$J_2'(u_n) \to J_2'(u) \ \text{ em } \ E_\lambda'.$$

Portanto, $J_2 \in C^1(E_\lambda; \mathbb{R})$.

**Afirmação 1.10.** *O funcional* $J_3 \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.

Mostraremos que $J_3$ possui derivada de Gateaux. Sejam $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in E_\lambda$. Considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(s) = F(u + stv)$. Observe que

$$g'(s) = g(u + stv)tv, \ g(1) = F(u + tv) \ \text{ e } \ g(0) = F(u).$$

Como $g$ é contínua em $[0,1]$ e é diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u + \gamma tv)v.$$

Note que

$$\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\right| = |f(u + \gamma tv)||v|.$$

Da condição de crescimento da função $f$ dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(u+\gamma tv)| &\leq \epsilon|u+\gamma tv|^{p-1} + |u+\gamma tv|^{q-1} \\ &\leq \epsilon 2^{p-1}(|u|^{p-1} + |\gamma tv|^{p-1}) + C_\epsilon 2^{q-1}(|u|^{q-1} + |\gamma tv|^{q-1}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}\right| \leq \epsilon 2^{p-1}(|u|^{p-1}+|\gamma tv|^{p-1})+C_\epsilon 2^{q-1}(|u|^{q-1}+|\gamma tv|^{q-1}),$$

onde

$$\epsilon 2^{p-1}(|u|^{p-1}+|\gamma v|^{p-1})+C_\epsilon 2^{q-1}(|u|^{q-1}+|\gamma v|^{q-1}) \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Observe que

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=f(u)v.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{t\to 0}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t}=\int_{\mathbb{R}^N}f(u)v.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} J_3'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_3(u+tv)-J_3(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}f(u)v. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que existe a derivada de Gateaux do funcional $J_3$ em $u$ na direção de $v$ e

$$J_3'(u)v=\int_{\mathbb{R}^N}f(u)v,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J_3' : E_\lambda &\to E_\lambda' \\ u &\mapsto J_3'(u), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} J_3'(u) : E_\lambda &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto J_3'(u)v=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $J_3'$ está bem definida.

**Afirmação 1.11.** $J_3'(u) \in E_\lambda'$.

Basta mostrar que $J_3'(u)$ é linear e limitado. De fato, sejam $w, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} J_3'(u)(\alpha w + v) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)(\alpha w + v) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f(w)u + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \\ &= \alpha J_3'(u)w + J_3'(u)v. \end{aligned}$$

Portanto $J_1'(u)$ é linear. Além disso, é limitado, pois

$$\left|J_3'(u)v\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)||v| = \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon |u|^{p-1}|v| + \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon |u|^{q-1}|v|,$$

como $|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $|u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$, utilizando a Desigualdade de Hölder e o fato de $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente, obtemos

$$|J_3'(u)v| \leq |u|_{\frac{p}{p-1}} |v|_p \leq c\|v\|_\lambda, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Onde $c = |u|_{\frac{p}{p-1}}$. De maneira análoga mostra-se o mesmo para a segunda parcela. Mostrando que $J_3'(u) \in E_\lambda'$.

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de $J_3$. Seja $(u_n) \subset E_\lambda$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad E_\lambda.$$

Assim, como $E_\lambda$ está imerso continuamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad u_n \to u \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo Teorema A.8, a menos de uma subsequência, existem funções $w_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $w_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{1.20}$$

e

$$|u_n| \leq w_1 \quad \text{e} \quad |u_n| \leq w_2 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{1.21}$$

Dado $\epsilon > 0$ existem $R_1, R_2 > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_1}(0)} |u|^p < \epsilon \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{R_2}(0)} |u|^q < \epsilon.$$

Seja $R = \max\{R_1, R_2\}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|^p < \epsilon \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u|^q < \epsilon. \tag{1.22}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \big|f(u_n) - f(u)\big||v| &= \int_{B_R(0)} \big|f(u_n) - f(u)\big||v| + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} \big|f(u_n) - f(u)\big||v| \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \tag{1.23}$$

onde

$$I_1 = \int_{B_R(0)} \big|f(u_n) - f(u)\big||v|, \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} \big|f(u)\big||v| \;\text{ e }\; I_3 = \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} \big|f(u_n)\big||v|.$$

**Análise de $I_1$:** Observe que por (1.20)

$$f(u_n)v \to f(u)v \;\text{ q.t.p. em }\; B_R(0).$$

Além disso, por (1.21) e pelo crescimento de $f$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|f(u_n) - f(u)||v| &\leq \Big[\Big(\epsilon|u_n|^{p-1} + C_\epsilon|u_n|^{q-1}\Big) + \Big(\epsilon|u|^{p-1} + C_\epsilon|u|^{q-1}\Big)\Big]|v| \\ &\leq \Big(\epsilon|w_1|^{p-1}|v| + C_\epsilon|w_2|^{q-1}\Big)|v| + \Big(\epsilon|u|^{p-1} + C_\epsilon|u|^{q-1}\Big)|v|.\end{aligned}$$

Uma vez que $u, v \in E_\lambda$ temos que $u, v \in L^p(B_R(0)) \cap L^q(B_R(0))$. Ademais,

$$u^{p-1}, w_1^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(B_R(0)) \;\text{ e }\; u^{q-1}, w_1^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(B_R(0)),$$

de onde segue que

$$\Big(\epsilon|w_1|^{p-1}|v| + C_\epsilon|w_2|^{q-1}\Big)|v| + \Big(\epsilon|u|^{p-1} + C_\epsilon|u|^{q-1}\Big)|v| \in L^1(B_R(0)).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que $I_1 = o_n(1)$.

**Análise de $I_2$:** Da condição de crescimento de $f$

$$|f(u)v| \;\leq\; \epsilon|u|^{p-1}|v| + C_\epsilon|u|^{q-1}|v|.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |f(u)v| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |u|^{p-1}|v| + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |u|^{q-1}|v|.$$

Desde que $v \in L^p(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)) \cap L^q(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0))$. Além disso,

$$u^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)) \;\text{ e }\; u^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)).$$

Aplicando a Desiguladade de Hölder e a imersão contínua

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |f(u)v| \leq \epsilon C \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_\lambda + C_\epsilon C \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |u|^q\right)^{\frac{q-1}{q}} \|u\|_\lambda.$$

Por (1.22) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |f(u)v| \leq \Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C\|v\|_\lambda,$$

ou seja, $I_2 \leq \Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C\|v\|_\lambda$.

**Análise de $\boldsymbol{I_3}$:** Da condição de crescimento de $f$

$$\begin{aligned} |f(u_n)v| &\leq \epsilon|u_n|^{p-1}|v| + C_\epsilon|u_n|^{q-1}|v| \\ &\leq \epsilon|w_1|^{p-1}|v| + C_\epsilon|w_2|^{q-1}|v|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |f(u_n)v| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |w_1|^{p-1}|v| + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |w_2|^{q-1}|v|.$$

Recorde que $v \in L^p(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)) \cap L^q(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0))$. Ademais,

$$w_1^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)) \;\text{ e }\; w_1^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)).$$

Aplicando a Desiguladade de Hölder e a imersão contínua

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |f(u_n)v| \leq \epsilon C \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |w_1|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_\lambda + C_\epsilon C \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |w_2|^q\right)^{\frac{q-1}{q}} \|v\|_\lambda.$$

Como $w_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $w_1 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, aumentando $R$ se necessário, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |f(u_n)v| \leq \Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C\|v\|_\lambda,$$

ou seja, $I_2 \leq \Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C\|v\|_\lambda$. Por (1.23),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big|f(u_n) - f(u)\big||v| \leq o_n(1) + 2\Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C\|v\|_\lambda,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|J_3'(u_n) - J_3'(u)\|_{E_\lambda'} &= \sup_{\|v\|_\lambda \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(u_n)v - f(u)v) \right| \\ &\leq \sup_{\|v\|_\lambda \leq 1} \left\{ o_n(1) + 2\Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C\|v\|_\lambda \right\} \\ &\leq o_n(1) + \Big(\epsilon\epsilon^{\frac{p-1}{p}} + C_\epsilon \epsilon^{\frac{q-1}{q}}\Big) C. \end{aligned}$$

Passando o limite quando $\epsilon \to 0$ temos

$$\|J_3'(u_n) - J_3'(u)\|_{E_\lambda'} \leq o_n(1).$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ temos

$$\|J_3'(u_n) - J_3'(u)\|_{E_\lambda'} \to 0.$$

Portanto, $J_3 \in C^1(E_\lambda; \mathbb{R})$.

Pelas afirmações anteriores concluímos que $J_\lambda \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.

$\square$

## 1.3 Motivação de Solução Fraca para o Problema $(\boldsymbol{P_\lambda})$

O objetivo desta seção é motivar a definição de solução fraca para o problema $(P_\lambda)$.

Considere $u \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ uma solução clássica de $(P_\lambda)$. Então

$$-\Delta_p u(x) + (\lambda V(x) + Z(x))u(x)^{p-1} = f(u(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Multiplicando a equação por $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathbb{R})$ e integrando sobre $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta_p uv + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v. \tag{1.24}$$

**Afirmação 1.12.**

$$\int_\Omega -\Delta_p uv = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v.$$

De fato, considere o seguinte campo vetorial $F \in C_0^2(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathbb{R}^\mathbb{N})$ definido por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto F(x) = v(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x). \end{aligned}$$

Recorde que

$$\text{div}F = \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{div}F &= \sum_{n=1}^N \left[|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v\right] \\ &= \sum_{n=1}^N |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v \\ &= |\nabla u|^{p-2}\sum_{n=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{div}F = |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + v\Delta_p u. \tag{1.25}$$

Aplicando o Teorema do Divergente (Ver Apêndice C, Teorema C.7) ao campo $F$ com $\eta$ sendo o vetor unitário normal exterior à $\partial B_R(0)$ fronteira de $B_R(0)$,

$$\int_{B_R(0)} \mathrm{div}F = \int_{\partial B_R(0)} F.\eta ds,$$

onde supp$v \subset B_R(0)$, para algum $R > 0$. Por (1.25),

$$\int_{B_R(0)} \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + v\Delta_p u\Big) = \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u v.\eta ds.$$

Observe que supp$v \subset B_R(0)$ , desse modo

$$\int_{B_R(0)} \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + v\Delta_p u\Big) = 0,$$

isto é,

$$\int_{B_R(0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = -\int_{B_R(0)} v\Delta_p u,$$

o que prova a afirmação. Juntando a Afirmação 1.12 com (1.24) obtemos

$$\int_{B_R(0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{B_R(0)} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v = \int_{B_R(0)} f(u)v,$$

portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v,$$

pois $supp(v) \subset B_R(0)$.

Na seção anterior, mostramos que $J_\lambda \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ com

$$J'_\lambda(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v, \forall u, v \in E_\lambda.$$

Assim, podemos definir soluções fracas de $(P_\lambda)$ como pontos críticos do funcional

$$\begin{aligned} J_\lambda : E_\lambda &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u). \end{aligned}$$

**Definição 1.2.** *Uma solução fraca de $(P_\lambda)$ é uma função $u \in E_\lambda$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v = 0,$$

*para todo $v \in E_\lambda$.*

# 2 Existência de Soluções via Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos por Alves (2006) sobre a existência de soluções Multi-Bump para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1} = f(u), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$P_\lambda$}$$

onde $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $2 \leq p < N$, $\lambda \in (0, \infty)$ é um parâmetro e $V, Z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, satisfazendo:

**(H1)** O conjunto $\Omega := \text{int}\big(V^{-1}\{0\}\big)$ é não-vazio, aberto limitado, possui fronteira suave e $V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$. Além disso, $\Omega$ consiste de $k$ componentes conexas denotadas por $\Omega_j, j \in \{1, 2, ..., k\}$ satisfazendo

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ... \cup \Omega_k \ \text{ e } \ d(\Omega_i, \Omega_j) > 0, \text{ para } i \neq j$$

**(H2)** Existem constantes positivas $M_0$ e $M_1$ verificando

$$0 < M_0 \leq \lambda V(x) + Z(x), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda \geq 1 \ \text{ e } \ |Z(x)| \leq M_1, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Ao longo do trabalho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamada não-linearidade, é uma função contínua verficando as seguintes hipóteses:

**(f1)** Existe $q \in (p, p^*)$, tal que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{|t|^{q-1}} = m < \infty, \ \text{ onde } \ p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

**(f2)** $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{|t|^{p-1}} = 0.$

**(f3)** (Condição de Ambrosetti - Rabinowitz) Existe $\theta \in (p, p^*)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq t f(t), \text{ para todo } \; t > 0, \text{ onde } F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

**(f4)** A função $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^{p-1}}$ é crescente para $t > 0$.

Exemplos de não-linearidades que satisfazem $(f_1) - (f_4)$ são as funções $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(t) = \begin{cases} t^{q-1}, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t \leq 0, \end{cases} \qquad \text{onde} \;\; q \in (p, p^*)$$

e

$$g(t) = \begin{cases} c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\beta-1}, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t \leq 0, \end{cases} \qquad \text{em que} \;\; p \leq \alpha < \beta \leq p^*.$$

Tendo em vista que queremos mostrar a existência de soluções não-negativas vamos assumir a seguinte condição

$$f(t) = 0, \quad \text{para todo} \;\; t \leq 0.$$

Vale destacar que $f(t) \geq 0$, para todo $t > 0$. Pois a partir da hipótese $(f_3)$ obtemos

$$0 \leq t f(t), \forall t > 0. \tag{2.1}$$

## 2.1 Um Problema Auxiliar

Em Alves (2006) não é mostrado que o funcional $J_\lambda$ verifica a condição $(PS)_c$ , que será definida mais a frente. Para contornar tal situação, faremos uso do método da penalização, devido a Pino e Felmer (1996), que consiste em considerar um problema auxiliar, mostrar que este possui solução e provar que tal solução, sobre certas condições, é solução do problema original. Nesta seção, adaptaremos ao problema $(P_\lambda)$ os argumentos utilizados em Ding e Tanaka (2003) e Alves e Figueredo (2005).

Seja $v_0$ a constante obtida no Lema 2, $a > 0$ verificando $\dfrac{f(a)}{a^{p-1}} = v_0$ e $\tilde{f}, \tilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

funções dadas por

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s), & \text{se} \quad s \leq a \\ v_0 s^{p-1}, & \text{se} \quad s > a \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{F}(s) = \int_0^s \tilde{f}(\tau) d\tau. \tag{2.2}$$

Note que as definições de $\tilde{f}$ e $\tilde{F}$ tem sentido se justificarmos a existência da constante $a$. Considere a função

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \eta(t) = \frac{f(t)}{t^{p-1}}. \end{aligned}$$

Logo, por $(f_2)$

$$\lim_{t \to 0^+} \eta(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0.$$

Isso implica que existe $a_1 > 0$ tal que $\eta(a_1) < v_0$. Além disso,

$$\eta(t) = \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = \frac{f(t)}{|t|^{q-1}} \frac{|t|^{q-1}}{|t|^{p-1}}, \quad \forall t > 0.$$

Então, por $(f_1)$

$$\limsup_{t \to \infty} \eta(t) = \limsup_{t \to \infty} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = \limsup_{t \to \infty} \frac{f(t)}{|t|^{q-1}} |t|^{q-p} = \infty,$$

o que implica que existe $a_2 > a_1$ tal que $\eta(a_2) > v_0$. Como $\eta|_{[a_1,a_2]}$ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário (ver Apêndice C, Teorema C.9), existe $a \in [a_1, a_2]$ tal que $\eta(a) = v_0$, justificando a existência da constante $a$.

No que segue, para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$, fixaremos um aberto limitado $\Omega_j'$ com fronteira suave tal que

$$\overline{\Omega_j} \subset \Omega_j' \quad e \quad \overline{\Omega_j'} \cap \overline{\Omega_i'} = \emptyset \tag{2.3}$$

para todo $j \neq i$. Agora, fixemos um conjunto não-vazio $\Gamma \subset \{1, 2, ..., k\}$,

$$\Omega_\Gamma = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j, \; \Omega_\Gamma' = \bigcup_{j \in \Gamma} \Omega_j', \chi_\Gamma(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \; \Omega_\Gamma' \\ 0, & se \quad x \notin \; \Omega_\Gamma' \end{cases}$$

e as funções $g, G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x, t) = \chi_\Gamma(x) f(t) + (1 - \chi_\Gamma(x)) \tilde{f}(t)$$

e

$$G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds = \chi_\Gamma(x) F(t) + (1 - \chi_\Gamma(x)) \tilde{F}(t),$$

onde $\chi_\Gamma$ denota a função característca do conjunto $\Omega'_\Gamma$. Observe que

$$\tilde{f}(s) \leq f(s),\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

pois, se $s \leq a$, $\tilde{f}(s) = f(s)$. Se $s > a$, por $(f_4)$,

$$\tilde{f}(s) = v_0 s^{p-1} = \frac{f(a)}{a^{p-1}} s^{p-1} \leq \frac{f(s)}{s^{p-1}} s^{p-1} = f(s).$$

Além disso,

$$g(x,s) \leq f(s),\ \forall (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

De fato, se $(x,s) \in \Omega'_\Gamma \times \mathbb{R}$, então

$$g(x,s) = f(s).$$

Se $(x,s) \in (\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma) \times \mathbb{R}$, então, por (2.4),

$$g(x,s) = \tilde{f}(s) \leq f(s).$$

De (2.1), $f(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$, assim $g(x,t) \geq 0$, para todo $(x,t)$ em $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$.

Agora, mostraremos que $g$ satisfaz as condições $(g_1) - (g_4)$ abaixo.

**(g1)** Existe $q \in (p, p^*)$, tal que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{g(x,t)}{|t|^{q-1}} = m < \infty,\ \forall (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\cdot$$

Por $(f_1)$, dado $\epsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(x,t)}{t^{q-1}}\right| = \frac{g(x,t)}{t^{q-1}} \leq \frac{f(t)}{t^{q-1}} \leq \left|\frac{f(t)}{t^{q-1}}\right| \leq (m+\epsilon), \forall |t| > k.$$

Logo

$$\left|\frac{g(x,t)}{t^{q-1}}\right| \leq (m+\epsilon), \forall |t| > k, \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

mostrando $(g_1)$.

**(g2)**

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(x,s)}{|t|^{p-1}} = 0$$

Por $(f_2)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(x,t)}{t^{p-1}}\right| = \frac{g(x,t)}{t^{p-1}} \leq \frac{f(t)}{t^{p-1}} \leq \left|\frac{f(t)}{t^{p-1}}\right| \leq \epsilon, \forall |t| < \delta_\epsilon.$$

Por (2.5),

$$\left|\frac{g(x,t)}{t^{q-1}}\right| \leq \epsilon, \forall |t| < \delta_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

mostrando $(g_2)$.

**(g3)** (Condição de Ambrosetti - Rabinowitz) Existe $\theta \in (p, p^*)$ tal que

$$0 < \theta G(x,t) \leq tg(x,t),\ \forall (x,t) \in \Omega'_\Gamma \times \mathbb{R}^+.$$

Como $(x,t) \in \Omega'_\Gamma \times \mathbb{R}^+$, temos $g \equiv f$ e $G \equiv F$, então da hipótese $(f_3)$

$$0 < \theta G(x,t) \leq tg(x,t),\ \forall (x,t) \in \Omega'_\Gamma \times \mathbb{R}^+.$$

**(g3)*** Se $(x,t) \in (\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma) \times \mathbb{R}^+$, então $g(x,t) \leq v_0 t^{p-1}$.

Inicialmente, vamos mostrar que se $s \in \mathbb{R}$, então

$$\tilde{f}(s) \leq v_0 s^{p-1}.$$

De fato, para $s \in (0, a]$, de $(f_4)$ obtemos

$$\tilde{f}(s) = f(s) = \frac{f(s)}{s^{p-1}} s^{p-1} \leq \frac{f(a)}{a^{p-1}} s^{p-1} = v_0 s^{p-1}.$$

Para $s \in (a, \infty)$,

$$\tilde{f}(s) = v_0 s^{p-1}.$$

Se $s \in (\infty, 0]$, $\tilde{f}(s) = f(s) = 0$. Desse modo, se $(x,t) \in (\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma) \times \mathbb{R}^+$,

$$g(x,t) = \tilde{f}(t) \leq v_0 t^{p-1}.$$

Além disso, segue diretamente de (2.1) que

$$\tilde{F}(s) \leq \frac{v_0}{p} s^p, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

**(g4)** A função $t \mapsto \dfrac{g(x,t)}{t^{p-1}}$ é não-decrescente. Para $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$.

Com efeito, se $(x,t) \in \Omega'_\Gamma \times \mathbb{R}^+$, então

$$\frac{g(x,t)}{t^{p-1}} = \frac{f(t)}{t^{p-1}},$$

que por $(f_4)$ é crescente. Se $(x,t) \in (\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma) \times (0,a]$, então

$$\frac{g(x,t)}{t^{p-1}} = \frac{\tilde{f}(t)}{t^{p-1}} = \frac{f(t)}{t^{p-1}},$$

que por $(f_4)$ é crescente. Se $(x,t) \in (\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma) \times (a,\infty)$, então

$$\frac{g(x,t)}{t^{p-1}} = \frac{\tilde{f}(t)}{t^{p-1}} = \frac{v_0 t^{p-1}}{t^{p-1}} = v_0,$$

mostrando $(g_4)$.

Como $g$ satisfaz as hipóteses $(g_1)$ e $(g_2)$ então, de maneira análoga a demonstração do Lema 1.3, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq \epsilon |t|^{p-1} + C_\epsilon |t|^{q-1}, \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

e consequentemente

$$|G(x,t)| \leq \frac{\epsilon}{p}|t|^p + \frac{C_\epsilon}{q}|t|^q, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

A partir disso, considere o seguinte problema

$$-\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{$A_\lambda$}$$

Como no Capítulo 1, definimos uma solução fraca para o problema $(A_\lambda)$ como sendo uma função $u \in E_\lambda$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv\Big) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v, \ \forall v \in E_\lambda.$$

Além disso, sob as condições $(H1), (H2), (g_1)$ e $(g_2)$, verificamos também que as soluções fracas para o problema $(A_\lambda)$ podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional energia $\Phi_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u). \tag{2.9}$$

Ademais, como na seção anterior, é possível mostrar que $\Phi_\lambda \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} \Phi'_\lambda(u)v \ &= \ \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv\Big) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v, \ \forall u,v \in E_\lambda. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Em outras palavras, uma solução fraca de $(A_\lambda)$ é uma função $u \in E_\lambda$ tal que

$$\Phi'_\lambda(u)v = 0, \ \forall v \in E_\lambda,$$

isto é, um ponto crítico para $\Phi_\lambda$. O problema $(A_\lambda)$ está relacionado ao problema $(P_\lambda)$ no seguinte sentido, se $u_\lambda \in E_\lambda$ é uma solução de $(A_\lambda)$ verificando

$$u_\lambda \leq a, \ \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \backslash \Omega'_\Gamma,$$

então $u_\lambda$ é uma solução para $(P_\lambda)$. De fato, se $u_\lambda := u \in E_\lambda$ é solução de $(A_\lambda)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big( |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2} uv \Big) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v, \ \forall v \in E_\lambda.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma} g(x,u)v + \int_{\Omega'_\Gamma} g(x,u)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma} \tilde{f}(u)v + \int_{\Omega'_\Gamma} f(u)v. \end{aligned}$$

Então, se $u_\lambda \leq a$ em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \backslash \Omega'_\Gamma$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma} f(u)v + \int_{\Omega'_\Gamma} f(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big( |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2} uv \Big) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v,$$

o que mostra que $u$ é solução fraca de $(P_\lambda)$.

## 2.2 Geometria do Passo da Montanha

Nesta seção, mostraremos que o funcional

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda : E_\lambda &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \Big( |\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p \Big) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u), \end{aligned}$$

associado ao problema $(A_\lambda)$, verifica a geometria do Teorema do passo da montanha. Desde que $\Phi_\lambda$ verifique essa geometria, o Teorema B.1 garante a existência de sequências de Palais-Smale em $E_\lambda$. Essas sequências serão estudadas na próxima seção.

**Lema 2.1.** *Existem* $d_1, d_2 > 0$ *tais que*

$$F(t) \geq d_1 t^{\theta} - d_2, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.11}$$

*Demonstração.* Temos da condição de Ambrosetti - Rabinowitz $(f_3)$, que existe $\theta \in (p, p^*)$ tal que

$$0 < \frac{\theta}{t} \leq \frac{f(t)}{F(t)}, \quad \forall t > 0,$$

implicando em

$$0 < \int_1^t \frac{\theta}{s}, \leq \int_1^t \frac{f(s)}{F(s)}, \quad \forall t > 1,$$

de onde segue que

$$\theta \ln t - \theta \ln 1 \leq \ln F(t) - \ln F(1), \quad \forall t > 1.$$

Portanto,

$$\theta \ln t \leq \ln F(t) - \ln F(1), \quad \forall t > 1.$$

Logo,

$$\ln t^{\theta} \leq \ln \left( \frac{F(t)}{\ln F(1)} \right) \Longrightarrow t^{\theta} \leq \frac{F(t)}{\ln F(1)},$$

pois ln é uma função crescente. Daí

$$F(t) \geq t^{\theta} \ln F(1), \quad \forall t > 1. \tag{2.12}$$

Como $F$ é contínua em $[0, 1]$, então é limitada. Desse modo, existe $C > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq C, \ \forall t \in [0, 1].$$

Isso implica que $F(t) \geq -C$ para todo $t \in [0, 1]$. Desse modo, considerando $d_1 = \ln(F_1)$ e $d_2 = d_1 + C$, temos

$$F(t) \geq -C = d_1 - d_2 \geq t^{\theta} d_1 - d_2, \quad \forall t \in [0, 1], \tag{2.13}$$

e por (2.12)

$$F(t) \geq t^{\theta} d_1 - d_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, da desigualdade anterior e de (2.13)

$$F(t) \geq t^{\theta} d_1 - d_2, \forall t \geq 0,$$

como queríamos. □

**Proposição 2.1.** *O funcional* $\Phi_{\lambda}$ *verifica a Geometria do Passo da Montanha, ou seja,* *(i) Existem* $r, \rho > 0$ *tais que* $\Phi_\lambda(u) \geq r > 0$ *para todo* $u \in E_\lambda$ *com* $\|u\|_\lambda = \rho$.

*(ii) Existe* $e \in E_\lambda$, *com* $\|e\|_\lambda > \rho$, *tal que* $\Phi_\lambda(e) < 0$.

*Demonstração.* Para mostrar $(i)$, note que $\Phi_\lambda(0) = 0$. De 2.8, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|G(x,u)| \leq \frac{\epsilon}{p}|t|^p + \frac{C_\epsilon}{q}|t|^q, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u) \\ &\geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) - \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{\epsilon}{p}|u|^p + \frac{C_\epsilon}{q}|u|^q\Big) \\ &= \frac{1}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{\epsilon}{p}|u|_p^p - \frac{C_\epsilon}{q}|u|_q^q. \end{aligned}$$

Pela a imersão contínua $E_\lambda \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq r \leq p^*$, existem constantes $c_1$, $c_2$ positivas tais que

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{\epsilon}{p}c_1\|u\|_\lambda^p - \frac{C_\epsilon}{q}c_2\|u\|_\lambda^q \\ &= \|u\|_\lambda^p\Big(\frac{1}{p} - \frac{\epsilon}{p}c_1\Big) - \frac{C_\epsilon}{q}c_2\|u\|_\lambda^q. \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon \in (0, \frac{1}{c_1})$ tal que $\epsilon c_1 < 1$, obtemos $c_3, c_4 > 0$ tais que

$$\Phi_\lambda(u) \geq c_3\|u\|_\lambda^p - c_4\|u\|_\lambda^q, \quad \forall u \in E_\lambda.$$

Note que

$$c_3\|u\|_\lambda^p - c_4\|u\|_\lambda^q > 0 \iff \frac{c_3}{c_4} > \|u\|_\lambda^{q-p} \iff \Big(\frac{c_3}{c_4}\Big)^{\frac{1}{q-p}} > \|u\|_\lambda.$$

Se $\rho < \Big(\frac{c_3}{c_4}\Big)^{\frac{1}{q-p}}$, então, para todo $u \in E_\lambda$ com $\|u\|_\lambda = \rho$ temos

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(u) &\geq c_3\|u\|_\lambda^p - c_4\|u\|_\lambda^q \\ &= c_3\rho^p - c_4\rho^q > r > 0, \end{aligned}$$

onde $r = \frac{1}{2}\big(c_3\rho^p - c_4\rho^q\big)$. Portanto o item $(i)$ está demonstrado.

Para o item $(ii)$, do Lema 2.1, existem $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq t^\theta d_1 - d_2, \forall t \geq 0.$$

Fixando $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $supp(\phi) \subset \Omega'_\Gamma$, não-negativa e $t > 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(t\phi) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla t\phi|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|t\phi|^p\Big) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, t\phi) \\
&= \frac{1}{p}\int_{supp(\phi)}\Big(|\nabla (t\phi)|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|t\phi|^p\Big) - \int_{supp(\phi)} F(t\phi) \\
&\le \frac{1}{p}\|t\phi\|_\lambda^p - t^\theta d_1 \int_{supp(\phi)} \phi^\theta + \int_{supp(\phi)} d_2 \\
&= \frac{1}{p}t^p\|\phi\|_\lambda^p - t^\theta d_1 |\phi|_{\theta, supp(\phi)}^\theta + d_2|supp(\phi)|.
\end{aligned}$$

Por $(f_3)$, $\theta > p$. Passando o limite quando $t \to \infty$, encontramos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \Phi_\lambda(t\phi) &\le \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{1}{p}t^p\|\phi\|_\lambda^p - t^\theta d_1|\phi|_{supp(\phi)}^\theta + d_2|supp(\phi)|\Big) \\
&= \lim_{t\to\infty} -t^\theta\Big( - \frac{1}{p}t^{p-\theta}\|\phi\|_\lambda^p + d_1|\phi|_{supp(\phi)}^\theta + d_2|supp(\phi)|\Big) \\
&= -\infty,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\Phi_\lambda(t\phi) \to -\infty, \text{ quando } t \to \infty,$$

de onde concluímos que existe $t_0 > 0$ tal que $e = t_0\phi \in E_\lambda$ e $\Phi_\lambda(e) < 0$.

□

## 2.3 A Condição de Palais-Smale

O objetivo desta seção é mostrar que o problema auxiliar $(A_\lambda)$ possui solução fraca. Para tal, mostraremos alguns resultados sobre as sequências de Palais-Smale e que o funcional $\Phi_\lambda$ verifica a condição $(PS)$.

**Definição 2.1.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Uma sequência é dita de Palais-Smale no nível $c$ relacionada a $I$, ou $(PS)_c$ para $I$, se*

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0$$

*para algum $c \in \mathbb{R}$.*

No que segue, mostraremos que a função $s \mapsto \tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s$ pode ser estimada por uma função do tipo potência-p. Tal fato é crucial no argumento utilizado para provar que as sequências $(PS)_c$ são limitadas por uma constante que não depende de $\lambda$.

**Lema 2.2.** *Se $s \in \mathbb{R}$, então*

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) v_0|s|^p.$$

*Demonstração.* Vamos dividir a demonstração em dois casos.

**Primeiro caso:** $s \leq a$.

Neste caso $\tilde{f} \equiv f$ e $\tilde{F} \equiv F$, temos

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s = F(s) - \frac{1}{\theta}f(s)s.$$

Segue da condição de Ambrosetti - Rabinowitz $(f_3)$ que

$$F(s) - \frac{1}{\theta}f(s)s \leq 0, \forall s > 0.$$

Portanto

$$F(s) - \frac{1}{\theta}f(s)s \leq 0 < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) v_0|s|^p. \forall s > 0.$$

**Segundo caso:** $s > a$.

Se $s > a$, então

$$\tilde{f}(s) = v_0 s^{p-1} \;\; \text{e} \;\; \tilde{F}(s) = \int_0^s \tilde{f}(\tau)d\tau = \int_0^s v_0\tau^{p-1}d\tau = v_0\frac{s^p}{p}.$$

Logo,

$$\tilde{F}(s) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(s)s = \frac{1}{p}v_0 s^p - \frac{1}{\theta}v_0 s^p = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) v_0 s^p \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) v_0|s|^p.$$

□

A próxima proposição é um resultado importante, pois ela nos mostra que qualquer sequência $(PS)_c$ em $E_\lambda$ é uma sequência limitada, na norma $\| \ \|_\lambda$, e essa limitação não depende do parâmetro $\lambda$.

**Proposição 2.2.** *Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$ em $E_\lambda$. Então, existe uma constante $K > 0$, que não depende de $\lambda \geq 1$, tal que*

$$\|u_n\|_\lambda^p \leq K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Da definição de sequência de Palais-Smale, temos que

$$\Phi_\lambda(u_n) = c + o_n(1) \;\; \text{e} \;\; \|\Phi'_\lambda(u_n)\|_* = o_n(1),$$

onde

$$\|\Phi_\lambda'(u_n)\|_* := \sup_{\substack{v\in E_\lambda\\ v\neq 0}} \left|\Phi_\lambda'(u_n)v\right|.$$

Recorde que

$$|\Phi_\lambda'(u_n)v| \leq \|\Phi_\lambda'(u_n)\|_*\|v\|_\lambda, \forall v \in E_\lambda.$$

Por conseguinte,

$$-\frac{1}{\theta}\Phi_\lambda'(u_n)u_n \leq \left|\frac{1}{\theta}\Phi_\lambda'(u_n)u_n\right| \leq \frac{1}{\theta}\|\Phi_\lambda'(u_n)\|_*\|u_n\|_\lambda.$$

Assim,

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi_\lambda'(u_n)u_n \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_\lambda. \tag{2.14}$$

Para facilitar a notação, vamos utilizar novamente a seguinte função

$$x \mapsto T_\lambda(x) = \lambda V(x) + Z(x).$$

Por (2.9) e (2.10),

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi_\lambda'(u_n)u_n &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\right) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n)\\
&- \frac{1}{\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u_n + T_\lambda(x)|u_n|^{p-2}u_nu_n\right) - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi_\lambda'(u_n)u_n &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\right) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n)\\
&- \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\right) + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n\\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\right) + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)\right)\\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^p + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)\right).
\end{aligned}$$

Da condição $(g_3)$,

$$\left(\frac{1}{\theta}g(x,u_n)u_n - G(x,u_n)\right) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \forall x \in \Omega_\Gamma'.$$

o que implica

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi_\lambda'(u_n)u_n \ \geq \ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^p - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Gamma'}(G(x,u_n) - \frac{1}{\theta}g(x,u_n)u_n).$$

Pelas definições de $G$ e $g$

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'_\lambda(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^p - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} (\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(u_n)u_n).$$

De (2.14) e da última desigualdade,

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^p - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} (\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(u_n)u_n) \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_\lambda. \tag{2.15}$$

Do Lema (2.2),

$$\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(u_n)u_n \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) v_0|u_n|^p, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$-v_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} |u_n|^p \leq -\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} (\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(u_n)u_n),$$

o que implica,

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\|u_n\|_\lambda^p - v_0\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} |u_n|^p\right) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^p - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} (\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(u_n)u_n).$$

Juntando (2.15) com a desigualdade anterior, obtemos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)(\|u_n\|_\lambda^p - v_0|u_n|_p^p) \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_\lambda.$$

Pelo Lema 1.2, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\delta_0\|u_n\|_\lambda^p \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_\lambda.$$

Desde que

$$o_n(1)\|u_n\|_\lambda \leq o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_\lambda^p, \text{ pois } p \geq 1,$$

temos

$$\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\delta_0 - o_n(1)\right]\|u_n\|_\lambda^p \leq c + o_n(1).$$

Desse modo,

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\delta_0 - o_n(1)\right]\|u_n\|_\lambda^p \leq \limsup_{n\to\infty}[c + o_n(1)].$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda^p \leq c\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)^{-1}\delta_0^{-1}.$$

Como $(\|u_n\|_\lambda)_n$ é uma sequência de números reais não-negativa, então pelo Teorema C.6,

existe $K>0$ tal que
$$\|u_n\|_\lambda \leq K, \forall n \in \mathbb{N}.$$
$\square$

**Lema 2.3.** *Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$. Então, dado $\epsilon>0$, existe $R>0$ tal que*
$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \left(|\nabla u_n|^p + (\lambda V(x)+Z(x))|u_n|^p\right) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Seja $R>0$ suficientemente grande tal que $\Omega'_\Gamma \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ satisfazendo
$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in B^c_R(0), \\ 0, & x \in B_{R/2}(0), \end{cases}$$
$0 \leq \eta(x) \leq 1$ e $|\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}$, onde $C>0$ é uma constante que não depende de $R$. Além disso, defina $\varphi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por
$$\varphi_n(x) = \eta(x)u_n(x).$$

Para facilitar a notação, vamos usar novamente a função $x \mapsto T_\lambda(x) = \lambda V(x) + Z(x)$. Note que, $\varphi_n \in E_\lambda$, além disso, $(\varphi_n)$ é limitada em $E_\lambda$, pois
$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\|^p_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla \varphi_n|^p + (\lambda V(x)+Z(x))|\varphi_n|^p\Big) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla \eta u_n + \nabla u_n \eta|^p + (\lambda V(x)+Z(x))|u_n|^p\Big) \\
&\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\frac{C}{R}\right)^p |u_n|^p + |\nabla u_n|^p\right] + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x)+Z(x))|u_n|^p \\
&\leq \frac{2^p}{M_0}\left(\frac{C}{R}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} M_0|u_n|^p + 2^p \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u_n|^p + (\lambda V(x)+Z(x))|u_n|^p\Big),
\end{aligned}$$
o que implica
$$\|\varphi_n\|^p_\lambda \leq \frac{2^p}{M_0}\left(\frac{C}{R}\right)^p \|u_n\|^p_\lambda + 2^p\|u_n\|^p_\lambda. \tag{2.16}$$

Sendo $(u_n)$ limitada em $E_\lambda$ segue que $(\varphi_n)$ é limitada em $E_\lambda$. Uma vez que
$$\begin{aligned}
\Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla[\eta u_n] + T_\lambda(x)|u_n|^{p-2}u_n \eta u_n\Big) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\eta u_n,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n|^2\eta + |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta u_n + T_\lambda(x)|u_n|^{p-2}|u_n|^2\eta\Big)\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\eta u_n\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u_n|^p\eta + |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta u_n + T_\lambda(x)|u_n|^p\eta\Big)\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\eta u_n\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\eta(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta u_n\Big)\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)\eta u_n.
\end{aligned}$$

Desse modo, como $\eta(x)=0$ para todo $x \in B_{\frac{R}{2}}(0)$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} \eta\Big(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\Big) &= \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) - \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta u_n\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} g(x,u_n)u_n\eta.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{f} \equiv g$ em $\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma$ e $\mathbb{R}^N\backslash B_R(0) \subset \mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma$, aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} \eta\Big(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\Big) &\leq \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\eta| u_n\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} g(x,u_n)|u_n|\eta\\
&\leq \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\eta||u_n|\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)} \tilde{f}(u_n)|u_n|\eta.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbb{R}^N\backslash B_R(0) \subset \mathbb{R}^N\backslash B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\eta(x)=1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N\backslash B_R(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} \Big(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\Big) &\leq \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) + \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} |\nabla u_n|^{p-1}|u_n|\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} \tilde{f}(u_n)u_n.
\end{aligned}$$

Por (2.1), sabemos que $\tilde{f}(s) \leq v_0 s^{p-1}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, assim

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |\nabla u_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N\setminus \Omega'_\Gamma} T_\lambda(x)|u_n|^p &\leq \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} v_0|u_n|^p \\ &+\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |\nabla u_n|^{p-1}|u_n|.\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 1.2 e a hipótese $(H_2)$, podemos considerar $v_0 > 0$ tal que

$$v_0 < \frac{M_0}{2} < \frac{T_\lambda(x)}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |\nabla u_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} T_\lambda(x)|u_n|^p &\leq \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \frac{T_\lambda(x)}{2}|u_n|^p \\ &+\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1}|u_n|.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p) \leq \Phi'_\lambda(u_n)\varphi_n(x) + \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1}|u_n|.$$

Como a sequência $(u_n)$ é $(PS)_c$, temos que $\Phi'_\lambda(u_n) = o_n(1)$. Logo,

$$|\Phi'_\lambda(u_n)\varphi| \leq \|\Phi'_\lambda(u_n)\|_{E'_\lambda}\|\varphi_n\|_\lambda \leq o_n(1)C_1$$

para algum $C_1 > 0$, pois $(\varphi_n)$ é limitada em $E_\lambda$, portanto aplicando a Desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \Big(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\Big) \leq 2o_n(1) + \frac{2C}{R}|\nabla u_n|_p^{p-1}|u_n|_p.$$

Desde que $(u_n)$ é limitada e $E_\lambda$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \Big(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\Big) \leq o_n(1) + \frac{C_2}{R}.$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $R > \frac{2C_2}{\epsilon}$ para obter

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \Big(|\nabla u_n|^p + T_\lambda(x)|u_n|^p\Big) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

mostrando o resultado. □

Agora vamos definir a condição $(PS)$ para o funcional $\Phi_\lambda$.

**Definição 2.2.** *Dizemos que o funcional $\Phi_\lambda$ verifica a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ de $E_\lambda$ possui uma subsequência que converge em $E_\lambda$, isto é, se $(u_n)$ é $(PS)_c$ existe $(u_{n_k})$ subsequência de $(u_n)$ e*

$$u_{n_k} \to u \text{ em } E_\lambda.$$

Verifiquemos que o funcional $\Phi_\lambda$ verifica a condição $(PS)_c$.

**Proposição 2.3.** *Para $\lambda \geq 1$, $\Phi_\lambda$ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

*Demonstração.* Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$ em $E_\lambda$. Pela Proposição 2.2, a sequência $(u_n)$ é limitada em $E_\lambda$. Como $E_\lambda$ é um espaço reflexivo, pelo Teorema C.1, a menos de uma subsequência, podemos assumir que existe $u \in E_\lambda$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad E_\lambda.$$

A partir daqui dividiremos a proposição em uma série de afirmações com suas devidas justificativas.

**Afirmação 2.1.** *As seguintes afirmativas são válidas:*

**(a)** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u;$

**(b)** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)v \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v$*, para cada $v \in E_\lambda$.*

Provaremos inicialmente o item $(a)$. Dado qualquer $\epsilon > 0$, considere $R > 0$ como no Lema 2.3 e defina $I_1$ e $I_2$ como

$$I_1 = \int_{B_R(0)} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u| \;\text{ e }\; I_2 = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u|.$$

**Análise de $\boldsymbol{I_1}$:** Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$ em $E_\lambda$. Da Proposição 2.2, existe $K > 0$, que não depende de $\lambda \geq 1$, tal que $\|u_n\| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema A.10 temos que a imersão $E_\lambda \hookrightarrow L^h(B_r(0))$ é compacta, pois

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow W^{1,p}(B_R(0)) \hookrightarrow L^h(B_r(0))$$

para $h \in [1, p^*)$. Então pelo Teorema C.1

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \;\text{ e }\; u_n \to u \quad \text{em} \quad L^h(B_R(0)). \tag{2.17}$$

Pelo Teorema (A.8), existe uma subsequência $(u_{n_k})$, ainda denotada por $(u_n)$, e uma função $h \in L^p(B_R(0))$ tal que

$$u_n \to u \text{ q.t.p. em } B_R(0) \text{ e } |u_n| \leq h \text{ q.t.p. em } B_R(0). \tag{2.18}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} H_n : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u|. \end{aligned}$$

Como a função $t \mapsto g(x,t)$ é contínua na varável $t$, temos que

$$g(x,u_n)u_n \to g(x,u)u, \quad \text{q.t.p em } B_R(0).$$

isso implica que

$$H_n \to 0 \text{ q.t.p. em } B_R(0).$$

Utilizando (2.7), condição de crescimento de $g$, para $\epsilon > 0$ dado, existe $C_\epsilon > 0$ tal que ,

$$|g(x,t)t| \leq \epsilon|t|^p + C_\epsilon|t|^q, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Recorde que se $q > p$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

isto é, existe $c = c(\Omega) > 0$ tal que

$$|u|_{q,\Omega} \leq c|u|_{p,\Omega}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} H_n &= |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u| \leq \epsilon|u_n|^p + C_\epsilon|u_n|^q + \epsilon|u|^p + C_\epsilon|u|^q \\ &\leq \epsilon|h|^p + C_\epsilon|h|^q + \epsilon|u|^p + C_\epsilon|u|^q \in L^1(B_R(0)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{B_R(0)} H_n \to 0.$$

Como

$$\left|\int_{B_R(0)} g(x,u_n)u_n - g(x,u)u\right| \leq \int_{B_R(0)} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u|,$$

segue que

$$\int_{B_R(0)} g(x,u_n)u_n \to \int_{B_R(0)} g(x,u)u.$$

**Análise de $I_2$:** Como $\mathbb{R}^N \backslash B_R(0) \subset \mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma$, e por (2.1)

$$|g(x,t)t| = |\tilde{f}(t)t| \leq v_0|t|^p, \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^N \backslash B_R(0).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} |\tilde{f}(u_n)u_n - \tilde{f}(u)u| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} v_0|u_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} v_0|u|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} (\lambda V(x) + Z(x))|u_n|^p + v_0 \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} |u|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} |\nabla u_n|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u_n|^p + v_0 \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} |u|^p.
\end{aligned}$$

Como $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, aumentando $R > 0$ caso seja necessário, podemos assumir que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} |u|^p \leq \frac{\epsilon}{v_0}.$$

Consequentemente, pela Lema 2.1, após a passagem do limite superior

$$\limsup I_2 \leq 2\epsilon,$$

implicando que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} g(x,u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R(0)} g(x,u)u \right| \to 0.$$

Desse modo, obtemos (a). O racioínio é análogo para (b). O que finaliza a demonstração da afirmação.

Por outro lado, observe que se definirmos

$$\begin{aligned}
Q_{n,1} &= \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle \\
&= |\nabla u_n|^p - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + |\nabla u|^p \quad \text{e} \\
Q_{n,2} &= (|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)(u_n - u) \\
&= |u_n|^p - |u_n|^{p-2}u_n u - |u|^{p-2}u_n u + |u|^p
\end{aligned}$$

então, pelo Teorema e C.10, para $p \geq 2$, existem constantes positivas $C_1$ e $C_2$ tais que

$$0 \leq C_1|\nabla u_n - \nabla u|^p \leq Q_{n,1} \ \text{ e } \ 0 \leq C_2|u_n - u|^p \leq Q_{n,2}.$$

Logo,

$$0 \leq C_2(\lambda V(x) + Z(x))|u_n - u|^p \leq (\lambda V(x) + Z(x))Q_{n,2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda \geq 1.$$

Isso implica que existe uma constante $C_3 = \min\{C_1, C_2\}$ tal que

$$0 \leq C_3\|u_n - u\|_\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big(Q_{n,1} + (\lambda V(x) + z(x))Q_{n,2}\Big), \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda \geq 1.$$

Então se mostrarmos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(Q_{n,1} + (\lambda V(x) + z(x))Q_{n,2}\Big) \to 0,$$

concluímos que

$$\|u_n - u\|_\lambda \to 0,$$

ou seja,

$$u_n \to u \quad \text{em} \ \ E_\lambda.$$

De fato, organizando os termos obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \big(Q_{n,1} + (\lambda V(x) + Z(x))Q_{n,2}\big) \ &= \ \int_{\mathbb{R}^N} \Big[|\nabla u_n|^p - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + |\nabla u|^p \\
&\quad +(\lambda V(x) + Z(x))(|u_n|^p - |u_n|^{p-2}u_n u - |u|^{p-2}u_n u + |u|^p)\Big] \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u \\
&= \ \Phi'(u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n - \Phi'(u_n)u - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u(u_n - u).
\end{aligned}$$

Note que $\Phi'(u_n)u_n = \Phi'(u_n)u = o_n(1)$, pois $(u_n)$ é $(PS)_c$ e limitada. Assim, Basta mostrar que as demais parcelas também são $o_n(1)$.

**Afirmação 2.2.**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u) = 0. \tag{2.19}$$

De fato, consideremos o funcional $\psi : E_\lambda \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \psi : E_\lambda & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v. \end{array}$$

Vamos mostrar que $\psi$ é linear e que é limitado. Sejam $w, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \psi(\alpha w + v) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(\alpha w + v) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \\ &= \alpha\psi w + \psi v, \end{aligned}$$

Além disso, $\psi$ é limitado, pois

$$|\psi(v)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \Big| \le \int_{\mathbb{R}^N} ||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|,$$

como $|\nabla v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$, utilizando a Desigualdade de Hölder e o fato de $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente, obtemos

$$|\psi(v)| \le |\nabla u|_{\frac{p}{p-1}} |\nabla v|_p \le c\|v\|_\lambda, \quad \forall v \in E_\lambda.$$

Onde $c = |\nabla u|_{\frac{p}{p-1}}$. Mostrando que $\psi \in E'_\lambda$, desde que

$$u_n \rightharpoonup u \;\; \text{em} \;\; E_\lambda,$$

pela definição de convergência fraca,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u) = \psi(u_n - u) \to 0,$$

mostrando (2.3).

**Afirmação 2.3.**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u(u_n - u) = 0. \tag{2.20}$$

De fato, defina o funcional $\psi : E_\lambda \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \psi_\lambda : E_\lambda & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv. \end{array}$$

Vamos mostrar que $\psi$ é linear. Sejam $w, v \in E_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda(\alpha w + v) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u(\alpha w + v) \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uw + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv \\
&= \alpha\psi_\lambda(w) + \psi_\lambda(v).
\end{aligned}$$

Além disso, mostraremos que $\psi_\lambda$ é limitado. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |(\lambda V(x) + Z(x))||u|^{p-1}|v| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|u|^{p-1}|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|.
\end{aligned}$$

$|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|\right|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda V(x) + Z(x)||v|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda V(x)||v|^p + |Z(x)||v|^p \\
&\leq |\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} |V(x)||v|^p + M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p < \infty.
\end{aligned}$$

De maneira análoga verificamos que $|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando a Desigualdade de Hölder e o fato de $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente, obtemos

$$|\psi_\lambda(v)| \leq \left||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|\right|_p \left||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|u|^{p-1}\right|_{\frac{p}{p-1}} \leq c\left\||\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v|\right\|_\lambda,$$

onde $c = \left|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|v||\nabla u|\right|_{\frac{p}{p-1}}$. Mostrando que $\psi_\lambda \in E'_\lambda$, desde que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ E_\lambda,$$

pela definição de convergência fraca,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u(u_n - u) \to 0.$$

Mostrando (3.8). Mostremos agora que

$$\|u_n - u\|_\lambda \to 0.$$

Observe que com o que foi feito temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(Q_{n,1} + (\lambda V(x) + Z(x))Q_{n,2}\big) \;=\; o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u.$$

Recorde que pelo item (a) da Proposição 2.1

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n \to \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)u.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(Q_{n,1} + (\lambda V(x) + Z(x))Q_{n,2}\Big) \to 0.$$

Portanto,

$$\|u_n - u\|_\lambda \to 0.$$

isto é, $u_n \to u$ em $E_\lambda$, mostrando que $\Phi_\lambda$ verifica a condição $(PS)$. □

**Proposição 2.4.** *O problema $(A_\lambda)$ possui solução não-negativa.*

*Demonstração.* Na Seção 2.2 mostramos que $\Phi_\lambda$ verifica a Geometria do Passo da Montanha, assim pelo Teorema B.1, existe $(u_n)$ em $E_\lambda$ sequência $(P_S)_{c_\lambda}$, onde

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi_\lambda(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0,1], E_\lambda; \gamma(0) = 0, \Phi_\lambda(\gamma(1)) < 0\}.$$

Da Proposição 2.3, existem uma subsequência $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ e $u \in E_\lambda$ tais que

$$u_{n_k} \to u \;\text{ em }\; E_\lambda.$$

Sendo $\Phi_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

$$\Phi_\lambda(u_{n_k}) \to \Phi_\lambda(u) \;\text{ e }\; \Phi'_\lambda(u_{n_k}) \to \Phi'_\lambda(u).$$

Como $u_n$ é $(PS)_{c_\lambda}$ segue que

$$\Phi_\lambda(u_{n_k}) \to c_\lambda \;\text{ e }\; \Phi'_\lambda(u_{n_k}) \to 0.$$

Portanto, pela unicidade do limite

$$\Phi_\lambda(u) = c_\lambda \neq 0 \;\text{ e }\; \Phi'_\lambda(u) = 0,$$

mostrando que $u$ é ponto crítico não-trivial de $\Phi_\lambda$, ou seja, $u$ é solução fraca de $(A_\lambda)$.

Mostraremos agora que as soluções de $(A_\lambda)$ são não-negativas.

Seja $u \in E_\lambda$ solução de $(A_\lambda)$. Sendo $u = u^+ - u^-$, se $u^- = 0$, então $u = u^+ \geq 0$. Afirmamos que $u^- = 0$. De fato, como $u$ é solução de $(A_\lambda)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uv - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v = 0, \forall v \in E_\lambda.$$

Uma vez que $u^- \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u^-|^p < \infty,$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u^- + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}uu^- = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u^-,$$

ou seja,

$$\int_{[u<0]} |\nabla u^-|^{p-2}\nabla u^- \nabla u^- + \int_{[u<0]} (\lambda V(x) + Z(x))|u^-|^{p-2}u^-u^- = \int_{[u<0]} f(u)u^-.$$

Como $f(t) = 0$ para $t \leq 0$, $|\nabla u^-| = |u^-| = 0$ em $[u \geq 0]$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u^-|^p = 0,$$

o que implica,

$$\|u^-\|_\lambda^p = 0$$

e portanto $u^- = 0$. □

**Proposição 2.5.** *Seja $u_\lambda$ solução fraca de $(A_\lambda)$, então, $u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

De fato, seja $u_\lambda$ solução fraca de $(A_\lambda)$. Vamos considerar $L > 0$ e definir as funções

$$S_{L,\lambda} = u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \quad \text{e} \quad W_{L,\lambda} = u_\lambda u_{L,\lambda}^{\beta-1},$$

onde

$$u_L = \begin{cases} u_\lambda, \text{ se } u_\lambda \leq L, \\ L, \text{ se } u_\lambda \geq L, \end{cases}$$

e $\beta > 1$ que será escolhido mais adiante.

Sendo $u_\lambda \in E_\lambda$ solução de $(A_\lambda)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))|u_\lambda|^{p-2}u_\lambda v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)v = 0, \ \forall v \in E_\lambda.$$

Em particular, como $S_{L,\lambda} \in E_\lambda$, podemos utilizá-la com função teste, assim

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) \quad &+ \quad \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u_\lambda|^{p-2}u_\lambda u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.\end{aligned}$$

Da hipótese $(H_1)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) \quad &+ \quad M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\ &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.\end{aligned}$$

Do crescimento da função $g$, (2.7),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon|u_\lambda|^{p-1}u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon|u_\lambda|^{q-1}u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\ &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon|u_\lambda|^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon|u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) \quad &+ \quad M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\ &- \quad \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon|u_\lambda|^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} - \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon|u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \leq 0.\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon < M_0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon|u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.$$

Como

$$\nabla(u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) = \nabla u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + p(\beta-1)u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)-1}\nabla u_{L,\lambda}u_\lambda,$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda(\nabla u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + p(\beta-1)u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)-1}\nabla u_{L,\lambda}u_\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon|u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)},$$

que é equivalente à

$$p(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)-1}\nabla u_{L,\lambda}u_\lambda \leq -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon|u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.$$

Note que $\nabla u_L = 0$ para $u > 0$. Assim,

$$p(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)-1}\nabla u_{L,\lambda}u_\lambda = p(\beta-1)\int_{[u\leq 0]} |\nabla u_\lambda|^p u_\lambda^{p(\beta-1)} \geq 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} C_\epsilon |u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}. \tag{2.21}$$

Agora, pelo Teorema A.9,

$$\|W_{L,\lambda}\|_p^{p*} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |W_{L,\lambda}|^p. \tag{2.22}$$

Note que

$$\begin{aligned} C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p &= C\int_{\mathbb{R}^N} u_{L,\lambda}^{\beta-1}|\nabla u_\lambda|^p + C(\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-2)}|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}|^p \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} u_{L,\lambda}^{\beta-1}|\nabla u_\lambda|^p + C\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-2)}|u|^p|\nabla u_{L,\lambda}|^p. \end{aligned}$$

Como $\nabla u_{L,\lambda} = 0$ em $[u_\lambda > 0]$ e $u_\lambda = u_{L,\lambda}$ em $[u \leq L]$ segue, respectivamente, que

$$C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p \leq C\int_{\mathbb{R}^N} u_{L,\lambda}^{\beta-1}|\nabla u_\lambda|^p + C(\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-2)}|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}|^p.$$

e

$$\int_{[u_\lambda \leq L]} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-2)}|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}|^p = \int_{[u_\lambda \leq L]} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)}|\nabla u_\lambda|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)}|\nabla u_\lambda|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p &= C\int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}^{\beta-1}||\nabla u_\lambda|^p + C\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)}|\nabla u_\lambda|^p \\ &= 2C\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}^{\beta-1}||\nabla u_\lambda|^p. \end{aligned}$$

Da desiguladade anterior junto com (2.22),

$$\|W_{L,\lambda}\|_p^{p*} \leq 2C\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_{L,\lambda}^{\beta-1}||\nabla u_\lambda|^p, \tag{2.23}$$

e de (2.22),

$$\|W_{L,\lambda}\|_p^{p*} \leq 2C_\epsilon\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^q u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}. \tag{2.24}$$

Portanto

$$\|W_{L,\lambda}\|_p^{p*} \leq 2C_\epsilon\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{q-p}|u_{L,\lambda}^{\beta-1}|^p = 2C_\epsilon\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{q-p}|W_{L,\lambda}|^p. \tag{2.25}$$

Da imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $p \leq r \leq p^*$, e $\frac{pp^*}{p^*-q+p} \in (p, p^*)$ obtemos

$$u_\lambda^{q-p} \in L^{\frac{p}{q-p}}(\mathbb{R}^N) \text{ e } W_{L,\lambda}^p \in L^{\frac{p^*}{p^*-q+p}}.$$

Pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\|W_{L,\lambda}\|_p^{p*} &\leq 2C_\epsilon \beta^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{p^*}\right)^{\frac{q-p}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |W_{L,\lambda}|^{\frac{pp^*}{p^*-q+p}}\right)^{\frac{p^*-q+p}{p^*}}\\ &= C_0\beta^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |W_{L,\lambda}|^{\alpha^*}\right)^{\frac{p}{\alpha}}\\ &= C_0\beta^p \|W_{L,\lambda}\|_p^{\alpha^*}\end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{pp^*}{p^*-q+p}$ e $C_0 = C_\epsilon \|u_\lambda^{q-p}\|_{\frac{p^*}{q-p}}$. Da definição de $u_{L,\lambda}$, sabemos que $|u_{L,\lambda}| \leq |u_\lambda|$. Observe que, se $u_\lambda^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\|W_{L,\lambda}\|_p^{p*} \leq C_0\beta^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|u_\lambda||u_{L,\lambda}|\right]^{\alpha^*}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \leq C_0\beta^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{\beta\alpha^*}\right)^{\frac{p}{\alpha}} < \infty.$$

Como $\liminf\limits_{L\to\infty} u_L = u$, pelo Lema de Fatou,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{\beta p^*}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{\beta\alpha^*}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \Longleftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{\beta p^*}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{\beta\alpha^*}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Logo,

$$\|u_\lambda\|_{\beta p^*} \leq C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{\beta\alpha}. \tag{2.26}$$

Agora, se considerarmos $\beta = \frac{p^*}{\alpha^*}$, temos $p^* = \xi\alpha^*$ e $\beta\xi\alpha^* = \beta p^*$, para $\beta > 1$, verificando $u^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

**Passo 1.** Se $\beta = \frac{p^*}{\alpha^*}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{\beta\alpha^*} = \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{\frac{p^*}{\alpha}\alpha^*} = \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p^*} < \infty.$$

logo, $u_\lambda^\beta \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Por (2.26),

$$\|u_\lambda\|_{\frac{(p^*)^2}{\alpha^*}} = \|u_\lambda\|_{\beta\alpha^*} \leq C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{\beta\alpha^*} = C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{p^*},$$

o que implica,

$$\|u_\lambda\|_{\frac{(\xi\alpha^*)^2}{\alpha^*}} \leq C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{p^*},$$

isto é,

$$\|u_\lambda\|_{\xi^2\alpha^*} \leq C_0^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{p^*} < \infty.$$

Portanto,

$$u_\lambda^{\left(\frac{p^*}{\alpha^*}\right)^2} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N). \tag{2.27}$$

**Passo 2.** Se $\beta = \left(\frac{p^*}{\alpha^*}\right)^2$, então, por (2.27),

$$u_\lambda^\beta \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N). \tag{2.28}$$

Por (2.26),

$$\|u_\lambda\|_{\frac{(p^*)^3}{(\alpha^*)^2}} = \|u_\lambda\|_{\beta p^*} \leq C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{\beta\alpha^*} = C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{\frac{(p^*)^2}{\alpha^*}},$$

o que implica,

$$\|u_\lambda\|_{\frac{(\xi\alpha^*)^3}{(\alpha^*)^2}} \leq C_0^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \|u_\lambda\|_{\xi^2\alpha^*}.$$

Por (2.28),

$$\|u_\lambda\|_{\xi^3\alpha^*} \leq C_0^{\frac{1}{\xi}^2 + \frac{1}{\xi}} \xi^{\frac{2}{\xi^2} + \frac{1}{\xi}} \|u_\lambda\|_{p^*}.$$

Desse modo,

$$u_\lambda^{\left(\frac{p^*}{\alpha^*}\right)^3} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

Seguindo com o raciocínio obtemos

$$\|u_\lambda\|_{\xi^{(m+1)}\alpha^*} \leq C_0^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\xi^i}} \xi^{\sum_{i=1}^m \frac{i}{\xi^i}} \|u_\lambda\|_{\beta p^*}. \tag{2.29}$$

isso mostra que

$$u_\lambda \in L^{\xi^{m+1}\alpha^*}(\mathbb{R}^N), \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Como

$$\xi = \frac{p^*}{\alpha^*} = \frac{p^* - q + p}{p} > 1.$$

Isso implica que

$$\lim_{m\to\infty} \xi^{m+1}\alpha^* = \infty.$$

Assim, podemos concluir que $u_\lambda \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s > p^*$. Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\xi^i} = \frac{\xi}{(\xi-1)^2} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^i} = \frac{1}{\xi - 1},$$

então

$$\|u_\lambda\|_{\xi^{(m+1)}\alpha^*} \leq C_0^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\xi^i}} \xi^{\sum_{i=1}^m \frac{i}{\xi^i}} \|u_\lambda\|_{p^*} \leq C_0^{\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\xi^i}} \xi^{\sum_{i=1}^\infty \frac{i}{\xi^i}} \|u_\lambda\|_{p^*} \tag{2.31}$$

Logo, pela Proposição A.1, conluímos que

$$u_\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, existe $K > 0$ tal que

$$|u_\lambda|_\infty \leq K. \tag{2.32}$$

**Corolário 2.1.** *Seja $u_\lambda$ solução fraca de $(A_\lambda)$, então $u_\lambda$ é uma solução positiva.*

Pela Proposição 2.4, sabemos que $u_\lambda$ é não-negativa. Vamos supor por absurdo que existe $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $u_\lambda(x) = 0$. Ora, para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$, podemos considerar um cubo $C \subset \mathbb{R}^N$ tal que $x, y \in C$, além disso, podemos fixar uma bola $B_r(0)$ com raio suficientemente grande tal que $C \subset B_r(0)$. Sabemos que $u_\lambda$ é solução fraca do seguinte problema $(A_\lambda)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v, \ \forall v \in E_\lambda,$$

em particular para $v \in C_0^\infty(B_r(0))$. Desse modo,

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + \int_{B_r(0)} (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}v = \int_{B_r(0)} f(u)v, \ \forall v \in C_0^\infty(B_r(0)),$$

mostrando que $u|_{B_r(0)}$ é solução fraca de

$$-\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1} = g(x, u) \text{ em } \ (B_r(0)). \tag{$P_r$}$$

Note que $(P_r)$ é da forma

$$divA(x, u, u_x) + B(x, u, u_x) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A : B_r(0) \times (-K, K) \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ (x, t, \nabla u) &\mapsto |\nabla u|^{p-2}\nabla u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B : B_r(0) \times (-K, K) \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ (x, t, \nabla u) &\mapsto -(\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1} + g(x, u), \end{aligned}$$

onde $K > 0$ é a constante obtida em (2.32). Como $V, Z$ são funções contínuas em $B_r(0)$ e pelo Lema C.12 (ver Apêndice C) é possível mostrar que $u_\lambda \in C^1(B_r(0))$, então, pelo Teorema de Weierstrass, existe $M > 0$ tal que $|-(\lambda V(x) + Z(x))u^{p-1}| \leq M$. Além disso, das hipóteses do Teorema C.11, obtemos

$$||\nabla u|^{p-2}\nabla u| = |\nabla u|^{p-1} \ \ \leq \ \ 1|\nabla u|^{p-1},$$

onde $\alpha = p, a_0 = 1, a_1 \equiv a_3 \equiv 0$.

$$|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u = |\nabla u|^p \ \ \geq \ \ |\nabla u|^p$$

onde $a_2 \equiv a_4 \equiv 0$.

$$|-(\lambda V(x)+Z(x))u^{p-1}+g(x,u)| \;\;\leq\;\; M|u|^{p-1}+\epsilon|u|^{p-1}+C_\epsilon|u|^{q-1}$$

e

$$b_2 \equiv \epsilon^{\frac{1}{p}}, \quad b_3 \equiv C_\epsilon^{\frac{1}{p}}|u(x)|^{\frac{q-1}{p}}.$$

Desse modo, as desigualdades acima são verificadas simultanemente. Então, pelo Teorema C.11 (ver Apêndice C, Seção 3),

$$0 \leq u_\lambda(y) \leq \max_{x\in K} u_\lambda(x) \leq C_* \min_{x\in K} u_\lambda(x) \leq C_* u_\lambda(x) = 0,$$

onde $C_*$ é uma constante. Como $y \in \mathbb{R}^N$ foi tomado de maneira arbitrária, temos $u \equiv 0$. Além disso, $u_\lambda$ é solução de $(A_\lambda)$. Desse modo, temos $\Phi_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda > 0$ o que é um absurdo. Consequentemente $u_\lambda$ é solução positiva.

# 3 Soluções Multi-Bump para a Classe de Problemas $(\boldsymbol{P_\lambda})$

Neste capítulo, provaremos, utilizando a iteração de Moser, que as soluções encontradas no Capítulo 2 são soluções do problema $(P_\lambda)$. Definiremos a variedade de Nehari e mostraremos alguns resultados relacionados a ela. Além disso, faremos a caracterização do nível do Passo da Montanha para um determinado funcional e mostraremos a existência de um valor crítico especial para o funcional associado ao problema auxiliar. Para finalizar, demonstraremos o Teorema 0.1.

## 3.1 Sequências $(\boldsymbol{PS})_\infty$

No que segue, introduziremos o conceito de sequências $(PS)_\infty$ para a classe de problemas $(P_\lambda)$.

**Definição 3.1.** *Uma sequência $(u_n)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é dita ser $(PS)_\infty$ se existir uma sequência $(\lambda_n)$ com $\lambda_n \to \infty$, tal que*

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \to c \quad e \quad \|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\| \to 0, \quad quando \quad n \to \infty.$$

**Proposição 3.1.** *Seja $(u_n)$ uma sequência $(PS)_\infty$. Então, existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de uma subsequência,*

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

*Além disso,*

***(I)*** *$u(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma$, para todo $j \in \Gamma$ e $u$ é uma solução não-negativa de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x)|u|^{p-2}u = f(u) \ \ em \ \ \Omega_j, \\ u = 0, \ \ em \ \ \partial\Omega_j. \end{cases} \qquad (P_j)$$

***(II)*** *$(u_n)$ satisfaz*

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^p \to 0;\\
&(b) \quad \|u_n\|^p_{\lambda_n,\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Gamma} \to 0;\\
&(c) \quad \|u_n\|^p_{\lambda_n,\Omega'_j} \to \int_{\Omega_j} \Big(|\nabla u|^p + Z(x)|u|^p\Big) \ , \forall j \in \Gamma.
\end{aligned}
$$

*Demonstração.* Inicialmente, observe que $(u_n)$ é limitada, ou seja, existe $K > 0$, que não depende de $\lambda$, tal que

$$\|u_n\|^p_{\lambda_n} \leq K, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Esta prova segue o raciocínio análogo da Proposição 2.2. Note que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) - \frac{1}{\theta}\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u_n \leq c_\Gamma + o_n(1) + \epsilon_n\|u_n\|_{\lambda_n},$$

onde $\epsilon_n \to 0$. Assim

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^p_{\lambda_n} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_\Gamma} (\tilde{F}(u_n) - \frac{1}{\theta}\tilde{f}(u_n)u_n) \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_{\lambda_n}.$$

Do Lema 2.2, obtemos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)(\|u_n\|^p_{\lambda_n} - v_0\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega'_\Gamma} |u_n|^p) \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_{\lambda_n}.$$

Pelo Lema 1.2

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\delta_0\|u_n\|^p_{\lambda_n} \leq c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\|_{\lambda_n} \leq c + b + o_n(1)\|u_n\|_{\lambda_n},$$

onde $b > 0$. Logo

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\delta_0\|u_n\|^{p-1}_{\lambda_n} \leq c + b + o_n(1).$$

Suponha por contradição que $(u_n)$ não é limitada. Então existe uma subsequência de $(u_{n_k})$ tal que $u_{n_k} \to \infty$. Desse modo, obtemos um absurdo. Logo a sequência $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ é limitada.

Como $(u_n)$ é limitada e $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, pelo Teorema C.1, existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ u_n \to u \ \text{ em } \ L^p_{loc}(\mathbb{R}^N). \tag{3.2}$$

Pelo Teorema (A.8), existe uma subsequência $(u_{n_k})$, ainda denotada por $(u_n)$, e uma função $h \in L^p(B_R(0))$ tal que

$$u_n \to u \ \text{ q.t.p. em } \ B_R(0) \ \text{ e } \ |u_n| \leq h \ \text{ q.t.p. em } B_R(0). \tag{3.3}$$

Utilizando o argumento da diagonal de Cantor, vamos mostrar que $(u_n)$ converge q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

**Lema 3.1.** *Existe uma subsequência $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ tal que*

$$u_{n_k} \to u \quad q.t.p. \quad em\ \mathbb{R}^N.$$

De fato, pelo Teorema A.10, temos que a imersão $W^{1,p}(B_r(0)) \hookrightarrow L^h(B_r(0))$ é compacta, para $h \in [1, p^*)$. Então, pelo Teorema C.1,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^h(B_r(0)), \quad \forall r > 0.$$

Assim, fixando $r = 1$, pelo Teorema A.8, existe uma subsequência $(u_{1n})$ de $(u_n)$ tal que

$$u_{1n} \to u \ \text{ q.t.p. em } \ B_1(0).$$

Fixando $r = 2$, pelo Teorema A.8, existe uma subsequência $(u_{2n})$ de $(u_{1n})$ tal que

$$u_{2n} \to u \ \text{ q.t.p. em } \ B_2(0).$$

Fixando $r = 3$, pelo Teorema A.8, existe uma subsequência $(u_{3n})$ de $(u_{2n})$ tal que

$$u_{3n} \to u \ \text{ q.t.p. em } \ B_3(0).$$

Repetindo o raciocínio, fixando $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência $(u_{kn})$ de $(u_{(k-1)n})$ tal que

$$u_{kn} \to u \ \text{ q.t.p. em } \ B_k(0).$$

Vamos mostrar que a sequência $(u_{jj})$ é tal que

$$(u_{jj}) \to u \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

De fato, considere $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, onde $S_k = \{x \in B_k(0); u_{kn}(x) \not\to u(x)\}$. Assim, $|S| = 0$, pois $u_{kn}(x) \not\to u(x)$ q.t.p em $B_k(0)$ e

$$|S| = \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |S_k| = 0,$$

devido à $S_k$ ser um conjunto enumerável. Seja $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \backslash S$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u_{kn}(x) \to u(x)$ em $B_k(0)$. Como $x \notin S$, logo $x \notin S_k$. Desse modo, se $u_{kn}(x) \not\to u(x)$, então $x \in S_k$, o que é um absurdo. Logo $u_{kn}(x) \to u(x)$. Como $(u_{jj}(x))$ é uma subsequência de

$(u_{kn}(x))$ para $j \geq k$ concluímos que

$$(u_{jj}) \to u \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

**Prova de (*I*).** Inicialmente, vamos mostrar que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Para $m \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $C_m = \{x \in \mathbb{R}^N; V(x) \geq \frac{1}{m}\}$. Observe que, como $\lambda_n \to \infty$, podemos assumir que

$$\lambda_n \geq 2 \Rightarrow 2\lambda_n - \lambda_n \geq 2 \Rightarrow \lambda_n \leq 2(\lambda_n - 1). \tag{3.4}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
\int_{C_m} |u_n|^p &\leq \int_{C_m} mV(x)|u_n|^p \\
&= \frac{\lambda_m}{\lambda_m} \int_{C_m} mV(x)|u_n|^p \\
&= \frac{m}{\lambda_m} \int_{C_m} \lambda_m V(x)|u_n|^p.
\end{aligned}$$

Da desigualdade (3.4),

$$\begin{aligned}
\int_{C_m} |u_n|^p &\leq \frac{2m}{\lambda_m} \int_{C_m} (\lambda_m - 1)V(x)|u_n|^p \\
&\leq \frac{2m}{\lambda_m} \int_{C_m} \Big(\lambda_m V(x)|u_n|^p - V(x)|u_n|^p + (V(x) + Z(x))|u_n|^p\Big) \\
&\leq \frac{2m}{\lambda_m} \int_{C_m} \Big(|\nabla u_n|^p + (\lambda_m V(x) + Z(x))|u_n|^p\Big) \\
&= \frac{2m}{\lambda_m} \|u_n\|^p_{\lambda_m} \leq \frac{2m}{\lambda_m} K,
\end{aligned}$$

onde $K > 0$ é uma constante que não depende de $m$. Agora, do Lema de Fatou

$$\int_{C_m} \liminf_n |u_n|^p \leq \liminf_n \int_{C_m} |u_n|^p \leq \liminf_n \frac{m}{\lambda_n} K = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{\lambda_n} K = 0.$$

Do Lema 3.1, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, assim

$$\int_{C_m} |u|^p = 0, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que $u \equiv 0$ em $C_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observe que o conjunto $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$ coincide com $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. De fato, seja $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$. Então $x \in \mathbb{R}^N$ e $V(x) \geq 1/m > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por $(H_1)$, $V(x) = 0$ para todo $x \in \Omega_\Gamma$, logo, $x \notin V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$. Desse modo, $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$. Se $x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, então $x \notin \overline{\Omega} = V^{-1}(\{0\})$. Assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V(x) > 1/n$, portanto $x \in C_n$, o que implica $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$.

Portanto, $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$.

Como $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pela Proposição A.3, podemos supor que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou equivalente $u_{|\Omega_j} \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$. Agora, para $j = 1, 2, \cdots, k$, afirmamos que

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + Z(x)|u|^{p-2}u\varphi - \int_{\Omega_j} g(x,u)\varphi = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_j), \tag{3.5}$$

e portanto $u_{|\Omega_j}$ é uma solução fraca para

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x)|u|^{p-2}u = g(x,u), \text{ em } \Omega_j, \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega_j. \end{cases} \tag{$P_j$}$$

De fato, se $j \in \{1, 2, \cdots, k\} \backslash \Gamma$, fazemos $\varphi = u$ e obtemos

$$\int_{\Omega_j} \Big( |\nabla u|^p + Z(x)|u|^p \Big) - \int_{\Omega_j} \tilde{f}(u)u = 0,$$

ou seja,

$$\|u\|^p_{\lambda,\Omega'_j} - \int_{\Omega'_j} \tilde{f}(u)u = 0.$$

Pelo Lema 1.2 e a desigualdade $\tilde{f}(s)s \leq v_0 s^p$, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$0 \leq \delta_0 |u|^p_{p,\Omega'_j} \leq \|u\|^p_{\lambda,\Omega'_j} - v_0|u|^p_{p,\Omega'_j} \leq \|u\|^p_{\lambda,\Omega'_j} - \int_{\Omega'_j} \tilde{f}(u)u = 0, \quad \lambda \geq 1.$$

Assim, $u_{|\Omega_j} \equiv 0$. Isso mostra que $u \equiv 0$ em $\Omega_\Gamma$ e $u \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$.

**Afirmação 3.1.** *Se $j \in \Gamma$, então $u_{|\Omega_j}$ é solução de $(P_j)$.*

Devemos mostrar que (3.5) ocorre. De fato, como $\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \to 0$ é suficiente mostrar que para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\left| \Phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi - \left( \int_{\Omega_j} \Big[ |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi + Z(x)|u|^{p-2}u\varphi \Big] - \int_{\Omega_j} g(x,u)\varphi \right) \right| \to 0. \tag{3.6}$$

Para tanto, mostraremos as seguintes afirmações:

**Afirmação 3.2.**

$$\int_{\Omega_j} (\lambda_n V(x) + Z(x))|u_n|^{p-2}u_n\varphi \to \int_{\Omega_j} Z(x)|u|^{p-2}u\varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Recorde que $u(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma$. Por $(H_1)$, $V(x) = 0$, pra todo $x \in \Omega_\Gamma$.

Assim basta mostrar que

$$\int_{\Omega_j} Z(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi \to \int_{\Omega_j} Z(x)|u|^{p-2}u\varphi,\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De fato, seja $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, e defina para cada $n\in\mathbb{N}$ a função

$$\begin{array}{rcl} H_n:\mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \Big|Z(x)|u_n(x)|^{p-2}u_n(x)\varphi(x) - Z(x)|u(x)|^{p-2}u(x)\varphi(x)\Big|. \end{array}$$

Sabemos do Lema 3.1 que

$$u_n \to u \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N,$$

então,

$$|Z(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi| \to |Z(x)u(x)|^{p-2}u\varphi| \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N,$$

ou seja,

$$H_n(x) \to 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N.$$

Além disso, por $(H_2)$

$$\begin{aligned} H_n &\le |Z(x)|u_n|^{p-2}u\varphi| + |Z(x)|u|^{p-2}u\varphi| \\ &\le M_1|u_n|^{p-1}|\varphi| + M_1|u|^{p-1}|\varphi| \\ &\le M_1|h|^{p-1}|\varphi| + M_1|u|^{p-1}|\varphi|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Desde que $|h|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega_j)$ e $\varphi\in L^p(\Omega_j)$, da Desigualdade de Hölder, $|h|^{p-1}|\varphi|\in L^1(\Omega_j)$ e de maneira análoga $|u|^{p-1}|\varphi|\in L^1(\Omega_j)$. Do Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Z(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi - Z(x)|u|^{p-2}u\varphi| \to 0$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_j} Z(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi \to \int_{\Omega_j} Z(x)|u|^{p-2}u\varphi.$$

**Afirmação 3.3.** $\|u_n-u\|_{\lambda_n}\to 0$ *e consequentemente* $u_n\to u$ *em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Inicialmente, vamos mostrar o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_n V(x)+Z(x))|u|^{p-2}u(u_n-u) = 0. \tag{3.8}$$

Novamente, como $u(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Gamma$. Por $(H_1)$, $V(x)=0$, para todo $x\in\Omega_\Gamma$.

Assim, para provar (3.8) é suficiente mostrar

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_\Gamma} Z(x)|u|^{p-2}u(u_n-u)=0. \tag{3.9}$$

Desse modo, defina o funcional

$$\begin{array}{rcl}\psi : E_{\lambda_n} & \to & \mathbb{R}\\ v & \mapsto & \displaystyle\int_{\Omega_\Gamma} Z(x)|u|^{p-2}uv.\end{array}$$

Vamos mostrar que $\psi$ é linear. Sejam $w, v\in E_{\lambda_n}$ e $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\psi(\alpha w+v) &= \int_{\Omega_\Gamma} Z(x)|u|^{p-2}u(\alpha w+v)\\ &= \alpha\int_{\Omega_\Gamma} Z(x)|u|^{p-2}uu+\int_{\Omega_\Gamma} Z(x)|u|^{p-2}uv\\ &= \alpha\psi(w)+\psi(v).\end{aligned}$$

Além disso, $\psi$ é limitado. De fato,

$$\begin{aligned}\int_\Omega Z(x)|u|^{p-2}uv &\le \int_\Omega |Z(x)|u|^{p-2}uv|\\ &= \int_\Omega |Z(x)||u|^{p-1}|v|\\ &= M_1\int_\Omega |u|^{p-1}|v|.\end{aligned}$$

Desde que $|v|\in L^p(\Omega)$ e $|u|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Aplicando a Desigualdade de Hölder

$$|\psi(v)|\le |v|_p|u|_{\frac{p}{p-1}}<\infty.$$

Mostrando que $\psi\in E'_{\lambda_n}$, desde que

$$u_n\rightharpoonup u \ \text{ em } \ E_{\lambda_n}.$$

Portanto, pela definição de convergência fraca,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_n V(x)+Z(x))|u|^{p-2}u(u_n-u)\to 0.$$

Mostrando (3.8).

Agora, repetindo o argumento utilizado na Proposição 2.3, definindo

$$P_n^1=(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_n-\nabla u) \ \text{ e } \ P_n^2=(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u)(u_n-u),$$

devemos mostrar
$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(P_n^1(x)+(\lambda_nV(x)+Z(x))P_n^2(x)\Big)\to 0.$$
De fato, organizando os termos obtemos
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left(P_n^1,+(\lambda_nV(x)+Z(x))P_n^2\right) &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big[|\nabla u_n|^p-|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u-|\nabla u|^{p-2}\nabla u_n\nabla u+|\nabla u|^p\\ &\quad +(\lambda_nV(x)+Z(x))(|u_n|^p-|u_n|^{p-2}u_nu-|u|^{p-2}u_nu+|u|^p)\Big]\\ &\quad +\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)u_n-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)u\\ &= \Phi'_{\lambda_n}(u_n)u_n+\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)u_n-\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)u\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(u_n-u)\\ &\quad -\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda_nV(x)+Z(x))|u|^{p-2}u(u_n-u).\end{aligned}$$
Note que $\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u_n=\Phi'_{\lambda_n}(u_n)u=o_n(1)$, pois $(u_n)$ é $(PS)_\infty$ e limitada. Assim,
$$\|u_n-u\|_{\lambda_n}\to 0.$$
Como a imersão $E_\lambda\hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é contínua, existe $c>0$ tal que
$$\|u_n-u\|\le c\|u_n-u\|_{\lambda_n}$$
e consequentemente
$$u_n\to u \;\text{ em }\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

**Afirmação 3.4.**
$$\int_{\Omega_j}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi\to\int_{\Omega_j}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi,\;\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

De fato, da Afirmação 3.3,
$$u_n\to u \;\text{ em }\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$
então
$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n-\nabla u|^p\to 0,$$
ou seja,
$$\nabla u_n\to\nabla u \;\text{ em }\; L^p(\mathbb{R}^N\times\cdots\times\mathbb{R}^N). \tag{3.10}$$
Pelo Teorema A.8, existe uma subsequência $(\nabla u_{n_k})$ de $(\nabla u_n)$, ainda denotada por $(\nabla u_n)$,

tal que

$$\nabla u_n \to \nabla u \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N$$

e $h \in L^p(\mathbb{R}^N \times, \cdots, \times \mathbb{R}^N)$ tal que

$$|\nabla u_n| \leq h, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e definindo

$$H_n = ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi|,$$

de (3.10), concluímos que

$$||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi| \to ||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi| \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N,$$

além disso,

$$\begin{aligned} |H_n| &\leq ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi| + ||\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi| \\ &\leq |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\varphi| + |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi| \\ &\leq |h|^{p-1}|\nabla\varphi| + |\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|. \end{aligned}$$

Como $|h|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega_j)$ e $|\nabla\varphi| \in L^p(\Omega_j)$ da desigualdade de Holder, $|h|^{p-1}|\nabla\varphi| \in L^1(\Omega_j)$ e de maneira análoga $|\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi| \in L^1(\Omega_j)$. Do Teorema da Convergência Dominada

$$\int_{\Omega_j} ||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi| \to 0$$

de onde segue,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_{\Omega_j} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi, \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por fim, pelo item (b) da Afirmação 2.1

$$\int_{\Omega_j} g(x, u_n)\varphi \to \int_{\Omega_j} g(x, u)\varphi, \;\; \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

com isso, mostramos que

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\varphi + Z(x)|u|^{p-2}u\varphi - \int_{\Omega_j} g(x, u)\varphi = 0, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega_j), \tag{3.11}$$

isto é, $u \in W^{1,p}(\Omega_j)$ é solução fraca do problema $(P_j)$, para $j \in \Gamma$.

**Prova de (a)** Recorde de (3.4), para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\lambda_n \leq 2(\lambda_n - 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda_n V(x)|u_n - u|^p &\leq 2(\lambda_n - 1)V(x)|u_n - u|^p \\
&\leq 2\lambda_n V(x)|u_n - u|^p - 2V(x)|u_n - u|^p + 2(V(x) + Z(x))|u_n - u|^p \\
&= 2(\lambda_n V(x) + Z(x))|u_n - u|^p \\
&\leq 2(\lambda_n V(x) + Z(x))|u_n - u|^p + 2|\nabla u_n - \nabla u|^p.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x)|u_n - u| \leq 2\|u_n - u\|_{\lambda_n}.$$

A desigualdade acima combinada com a Afirmação 3.3 implicam em

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n V(x) \to 0.$$

Mostrando $(a)$.

**Prova de (b)** Pelo item $(I)$, sabemos que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, então

$$\|u_n\|^p_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega} = \|u_n - u\|^p_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega} \leq \|u_n - u\|^p_{\lambda_n}.$$

Pela Afirmação 3.3

$$\|u_n - u\|^p_{\lambda_n} \to 0.$$

Assim,

$$\|u_n\|^p_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega} \to 0.$$

Mostrando $(b)$.

**Prova de (c)** Como

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n, \Omega'} \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n} \to 0,$$

temos

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n, \Omega'} \to 0.$$

O que implica em

$$\int_{\Omega'_j} |\nabla u_n - \nabla u|^p \to 0 \;\text{ e }\; \int_{\Omega'_j} (\lambda_n V(x) + Z(x))|u_n - u|^p \to 0.$$

Pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice , Lema A.1) e por $(H_1)$,

$$\int_{\Omega'_j} |\nabla u_n|^p \to \int_{\Omega'_j} |\nabla u|^p \;\text{ e }\; \int_{\Omega'_j} Z(x)|u_n|^p \to \int_{\Omega'_j} Z(x)|u|^p$$

Do item (a),

$$\int_{\Omega'_j}\Big[\lambda_n V(x)(|u_n|^p-|u|^p)\Big]=\int_{\Omega'_j\backslash\Omega_j}\lambda_n V(x)|u_n|^p.$$

Assim,

$$\|u_n\|_{\Omega'_j}\to\|u\|_{\Omega'_j}.$$

Como $u\equiv 0$, em $\Omega'\backslash\Omega$, temos

$$\|u_n\|_{\Omega'_j}\to\int_{\Omega_j}\Big(|\nabla u|^p-Z(x)|u|^p\Big).$$

□

## 3.2 Limitação Uniforme em $L^\infty$ para a Família de Soluções de $(P_\lambda)$

Nesta seção utilizaremos a iteração de Moser para mostrar que as soluções do problema auxiliar $(A_\lambda)$ são soluções de $(P_\lambda)$. Para tal, provaremos a seguinte proposição.

**Proposição 3.2.** *Seja $(u_\lambda)$ uma família de soluções positivas de $(A_\lambda)$ com $u_\lambda\to 0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\Omega)$ quando $\lambda\to+\infty$. Então, existe $\lambda^*>0$ tal que*

$$|u_\lambda|_{\infty,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma}\le a,\forall\lambda\ge\lambda^*.$$

*Demonstração.* No que segue $u_\lambda\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é solução de $(A_\lambda)$. Fixemos $\tilde{\Omega}_j\subset\mathbb{R}^N$ com $\Omega'_j\subset\tilde{\Omega}_j$ e a função $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ verificando

$$0\le\eta(x)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}^N,\quad \eta(x)=0,\forall x\in\bigcup_{j\in\Gamma}\Omega'_j\ \text{ e }\ \eta(x)=1,\forall x\in\mathbb{R}^N\backslash\bigcup_{j\in\Gamma}\tilde{\Omega}_j.$$

Fixando $L>1$, vamos definir as funções

$$S_{L,\lambda}=\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}\ \text{ e }\ W_{L,\lambda}=\eta u_\lambda u_{L,\lambda}^{\beta-1},$$

onde

$$u_L=\begin{cases}u_\lambda,\ \text{se } u_\lambda\le L,\\ L,\ \text{se } u_\lambda\ge L,\end{cases}\tag{$P_j$}$$

e $\beta>1$ que será escolhido mais adiante. Utilizaremos $S_{L,\lambda}$ como função teste na definição de solução fraca de $(A_\lambda)$, para isso é necessário mostrar que $S_{L,\lambda}\in E_\lambda$. Note que,

a) $S_{L,\lambda}\in L^p(\mathbb{R}^N)$

De fato, como $u_{L,\lambda}(x) = min\{u_\lambda(x), L\} \leq L$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\eta \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |S_{L,\lambda}|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^{p^2}|u|^p|u_L|^{p^2(\beta-1)} \\ &\leq L^{p^2(\beta-1)}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p < \infty.\end{aligned}$$

b) $|\nabla S_{L,\lambda}| \in L^p(\mathbb{R}^N)$

Primeiro observe que

$$\nabla S_{\lambda,L} = \nabla\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \eta^p u_\lambda \nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \eta^p \nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.$$

Utilizando a desigualdade triangular, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla S_{L,\lambda}|^p &\leq c\int_{\mathbb{R}^N}|\eta|^p|\nabla u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)} + c\int_{\mathbb{R}^N}|\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}|^p \\ &+ c\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta^p|^p|u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)}.\end{aligned}$$

Considere,

$$\begin{aligned}K_1 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\eta|^p|\nabla u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)}, \\ K_2 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}|^p, \\ K_3 &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta^p|^p|u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)},\end{aligned}$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla S_{L,\lambda}|^p \leq K_1 + K_2 + K_3.$$

Vamos estimar $K_1, K_2$ e $K_3$. Para $K_1$,

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^N}|\eta|^p|\nabla u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N}|1|^p|\nabla u_\lambda|^p|L|^{p^2(\beta-1)} < \infty.$$

Para $K_2$, temos que

$$\begin{aligned}K_2 &= \int_{[u>L]}|\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}|^p + \int_{[u\leq L]}|\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}|^p \\ &= \int_{[u>L]}|\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla L^{p(\beta-1)}|^p + \int_{[u\leq L]}|\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}|^p \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Para $K_3$, observe que existe $c_1 > 0$ tal que $|\nabla\eta^p|^p < c_1$, pois

$$|\nabla\eta^p|^p = (p\eta^{p-1})^p|\nabla\eta|^p \leq c_1.$$

$$K_3 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta^p|^p |u_\lambda|^p |u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} c_1 |u_\lambda|^p |L|^{p^2(\beta-1)} < \infty$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla S_{L,\lambda}|^p < \infty.$$

c) $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|S_{L,\lambda}|^p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|S_{L,\lambda}|^p = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\eta|^{p^2}|u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p^2(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|1|^{p^2}|u_\lambda|^p|L|^{p^2(\beta-1)} < \infty.$$

Mostrando que $S_{L,\lambda} \in E_\lambda$.

Agora, vamos mostrar que $W_L \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

a) $\int_{\mathbb{R}^N} |W_{L,\lambda}|^p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |W_{L,\lambda}|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^p|u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |1|^p|u_\lambda|^p|L|^{p(\beta-1)} < \infty.$$

b) $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p < \infty$.

Desde que

$$\nabla W_{L,\lambda} = u_\lambda u_{L,\lambda}\nabla\eta + \eta u_{L,\lambda}\nabla u_\lambda + \eta u_\lambda \nabla u_{L,\lambda}, \tag{3.12}$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p &\leq 2^{2p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\eta|^p|u_\lambda|^p|u_{L\lambda}|^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^p|u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)}|\nabla u_\lambda|^p \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^p|u_\lambda|^p|\nabla u_{L,\lambda}^{(\beta-1)}|^p\Big) \\
&\leq 2^{2p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} C_1^p|u_\lambda|^p L^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} 1^p L^{p(\beta-1)}|\nabla u_\lambda|^p \\
&\quad +(\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N} 1^p|u_\lambda|^p|u_{L,\lambda}^{\beta-2}|^p|\nabla u_{L,\lambda}|^p\Big).
\end{aligned}$$

Como $\nabla u_{L,\lambda} \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \cap [u \leq L]$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p &\leq 2^{2p}\Big(C_1^p L^{p(\beta-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^p + L^{p(\beta-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p \\
&\quad +(\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N\cap[u_\lambda \leq L]} L^p L^{p(\beta-2)} |\nabla u_\lambda|^p\Big) \\
&\leq 2^{2p}\Big(C_1^p \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^p + L^{p(\beta-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p \\
&\quad +(\beta-1)^p L^{p(\beta-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p\Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Sendo $u_\lambda \in E_\lambda$ solução de $(A_\lambda)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla v + (\lambda V(x) + Z(x))|u_\lambda|^{p-2}u_\lambda v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)v = 0, \ \forall v \in E_\lambda.$$

Em particular, como $S_{L,\lambda} \in E_\lambda$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) &+ \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda V(x) + Z(x))|u_\lambda|^{p-2}u_\lambda \eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Da hipótese $(H_1)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) &+ M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{p-2}u_\lambda \eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_\lambda)\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Desde que $g(x,t) \leq v_0 t^{p-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) &+ M_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{p-2}u_\lambda \eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\
&- v_0 \int_{\mathbb{R}^N} \eta^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 1.2, podemos escolher a constante $v_0$ de maneira que $M_0 - v_0 > 0$. Desse modo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla(\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) \leq 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda \nabla \eta^p (u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}(\nabla u_\lambda)\eta^p(\nabla u_\lambda)u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\
+ &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{p-2}(\nabla u_\lambda)\eta^p p(\beta-1)u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}\nabla u_\lambda \leq 0,
\end{aligned}$$

que é equivalente à

$$(p(\beta-1)+1)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^p\eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \leq -\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^{p-2}\nabla u_\lambda\nabla\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}. \tag{3.13}$$

Pela desigualdade de Cauchy Scwharz

$$-\nabla u_\lambda\nabla\eta^p \leq |\nabla u_\lambda||\nabla\eta|^p. \tag{3.14}$$

Combinando (3.13) e (3.14)

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^{p-2}(\nabla u_\lambda)(\nabla\eta^p)u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^{p-2}|\nabla u_\lambda||\nabla\eta^p|u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^{p-1}|p\eta^{p-1}\nabla\eta|u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}\\
&= p\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\eta|u_\lambda)(|\nabla u_\lambda|\eta)^{p-1}u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young,

$$(|\nabla\eta|u_\lambda)(|\nabla u_\lambda|\eta)^{p-1} \leq \frac{1}{p}|\nabla\eta|^p u_\lambda^p + \frac{p-1}{p}[(|\nabla u_\lambda|\eta)^{p-1}]^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.15}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
&- \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^{p-2}|\nabla u_\lambda|\nabla\eta^p u_\lambda u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}\\
&\leq p\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p}(|\nabla\eta|^p)u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + p\int_{\mathbb{R}^N}\frac{p-1}{p}[(|\nabla u_\lambda|\eta)^{p-1}]^{\frac{p}{p-1}}u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N}(p-1)|\nabla u_\lambda|^p\eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.13)

$$(p(\beta-1)+1)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_\lambda|^p\eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N}(p-1)|\nabla u_\lambda|^p\eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.$$

Escolhendo

$$\beta > \frac{2p-1}{p},$$

obtemos

$$p(\beta-2)+2 = p(\beta-1)+1-(p-1) > 1.$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\beta > \frac{2p-1}{p} \quad &\Leftrightarrow \quad \beta - 1 > \frac{2p-1}{p} - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \beta - 1 > \frac{2p-1-p}{p} \\
&\Leftrightarrow \quad p(\beta-1) > p-1 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\beta-1)+1 > (p-1)+1 \\
&\Leftrightarrow \quad p(\beta-1)+1-(p-1) > 1.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^p \eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \leq \frac{1}{p(\beta-2)+2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}. \quad (3.16)$$

Por outro lado, de (3.13)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p \quad \leq \quad & 2^{2p}\Big( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p |u_\lambda|^p |u_{L\lambda}|^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^p |u_{L,\lambda}|^{p(\beta-1)} |\nabla u_\lambda|^p \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} |\eta|^p |u_\lambda|^p |\nabla u_{L,\lambda}^{(\beta-1)}|^p \Big).
\end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima com

$$|\nabla u_{L,\lambda}^{(\beta-1)}|^p = (\beta-1)^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-2)} |\nabla u_{L,\lambda}|^p,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p \quad \leq \quad & 2^{2p}\Big( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + \int_{\mathbb{R}^N} \eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} |\nabla u_\lambda|^p \\
+ \quad & (\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N \cap [u \leq L]} \eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} |\nabla u_\lambda|^p \Big) \\
\leq \quad & 2^{2p}\Big( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + [(\beta-1)^p + 1] \int_{\mathbb{R}^N} \eta^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} |\nabla u_\lambda|^p \Big).
\end{aligned}$$

Substituindo (3.16) na desigualdade acima

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p \quad \leq \quad & 2^{2p}\Big( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + [(\beta-1)^p + 1] \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \Big) \\
\leq \quad & 2^{2p}\Big( \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} + [\beta^p + \beta^p] \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \Big) \\
\leq \quad & 2^{2p+1} \beta^p \Big( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u^p u_L^{p(\beta-1)} \Big).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p \leq C\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}. \quad (3.17)$$

Pela Desigualdade de Gagliardo e Niremberg (Ver Apêncice, Teorema A.9) existe $C > 0$ tal que

$$|W_{L,\lambda}|_{p^*}^p \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p. \tag{3.18}$$

Definindo $\mathcal{B} = \mathbb{R}^N \backslash \bigcup_{j\in\Gamma} \Omega_j'$ temos

$$\int_{\mathcal{B}} |W_{L,\lambda}|^{p^*} \;\; \leq \;\; \int_{\mathbb{R}^N} |W_{L,\lambda}|^{p^*},$$

e por (3.18) obtemos

$$\Big(\int_{\mathcal{B}} |W_{L,\lambda}|^{p^*}\Big)^{\frac{p}{p^*}} \;\; \leq \;\; C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{L,\lambda}|^p.$$

Juntando (3.17) com a desigualdade anterior

$$\Big(\int_{\mathcal{B}} |W_{L,\lambda}|^{p^*}\Big)^{\frac{p}{p^*}} \leq C\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta|^p u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}.$$

Definindo $\mathcal{C} = \bigcup_{j\in\Gamma} \tilde{\Omega}_j \backslash \Omega_j'$, podemos escrever

$$\mathbb{R}^N = \Big(\bigcup_{j\in\Gamma} \Omega_j'\Big) \cup \mathcal{C} \cup \Big(\mathbb{R}^N \backslash \bigcup_{j\in\Gamma} \tilde{\Omega}_j\Big),$$

Por definição, $\nabla\eta \equiv 0$ em $\Big(\bigcup_{j\in\Gamma} \Omega_j'\Big) \cup \Big(\mathbb{R}^N \backslash \bigcup_{j\in\Gamma} \tilde{\Omega}_j\Big)$. Assim,

$$|W_{L,\lambda}|_{p^*,\mathcal{B}}^p \leq C\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)}. \tag{3.19}$$

**Afirmação 3.5.** *Fixando $\beta = \frac{p^*}{p}$, então*

$$u_\lambda \in L^{\frac{(p^*)^2}{p}}(\mathcal{B}). \tag{3.20}$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{B}} |\eta u_\lambda u_{L,\lambda}^{(\frac{p^*}{p}-1)}|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \;\; &= \;\; |W_{L,\lambda}|_{p^*,\mathcal{B}}^p \\
&\leq \;\; C\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} \\
&\leq \;\; C\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^p L^{p(\frac{p^*}{p}-1)} \\
&\leq \;\; C\beta^p L^{p(\frac{p^*}{p}-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^p < \infty.
\end{aligned}$$

Agora vamos utilizar o Teorema da Convergência Dominada para concluir a afimação. Vamos definir

$$f_L(x) = u_\lambda^{p^*}(x) u_{L,\lambda}^{\frac{(p^*)^2}{p} - p^*}(x), x \in \mathbb{R}^N$$

e mostrar que

(i) $f_L(x) \to u_\lambda^{\frac{(p^*)^2}{p}}(x)$ q.t.p

(ii) $|f_L(x)| \le g$, para todo $L \in \mathbb{N}$ onde $g \in L^1(\mathcal{C})$.

Para $(i)$, fixando $x \in \mathbb{R}^N$, dado $\epsilon > 0$, existe $L_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $L \ge L_0$, implica que $u_\lambda(x) < L_0 < L$, então

$$|u_\lambda^{p^*}(x) u_{L,\lambda}^{\frac{(p^*)^2}{p} - p^*}(x) - u_\lambda^{\frac{(p^*)^2}{p}}(x)| \le |u_\lambda^{p^*}(x) u_\lambda^{\frac{(p^*)^2}{p} - p^*}(x) - u_\lambda^{\frac{(p^*)^2}{p}}(x)| = 0 < \epsilon.$$

Além disso,

$$u_\lambda^{p^*}(x) u_{L,\lambda}^{\frac{(p^*)^2}{p} - p}(x) \le L u_\lambda^{p^*}(x) \in L^1(\mathcal{C}).$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{L\to\infty} \int_{\mathcal{B}} |\eta u_\lambda u_{L,\lambda}^{(\frac{p^*}{p} - 1)}|^{p^*} = \int_{\mathcal{B}} \lim_{L\to\infty} |u_\lambda u_{L,\lambda}^{(\frac{p^*}{p} - 1)}|^{p^*} = \int_{\mathcal{B}} u_\lambda^{\frac{(p^*)^2}{p}}. \tag{3.21}$$

De maneira análoga mostra-se que

$$\lim_{L\to\infty} C\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\frac{p^*}{p} - 1)} = C\beta^p \int_{\mathcal{C}} \lim_{L\to\infty} u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\frac{p^*}{p} - 1)} = C\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^{p^*} < \infty. \tag{3.22}$$

De (3.21) e (3.22)

$$\int_{\mathcal{B}} u_\lambda^{\frac{(p^*)^2}{p}} \le C\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^{p^*} < \infty.$$

**Afirmação 3.6.** *Se* $\beta = \frac{p^*(t-1)}{pt}$ *com* $t = \frac{(p^*)^2}{(p^* - p)}$, *então* $\beta > 1$ *e* $\frac{pt}{(t-1)} \in (p, p^*)$.

Note que

$$\beta = \frac{(p^*)^2 - pp^* + p^2}{pp^*}$$

e suponha por absurdo que $\beta \le 1$. Isso implica que

$$(p^*)^2 - pp^* + p^2 \le pp^* \Leftrightarrow (p^*)^2 - 2pp^* + p^2 \le 0 \tag{3.23}$$

ou seja,

$$(p^* - p)^2 \le 0$$

que é um absurdo, pois $p^* > p$. Portanto, $\beta > 1$. Agora para todo $t \in \mathbb{R}$

$$1 < \frac{t}{t-1} \Leftrightarrow p > \frac{pt}{p(t-1)}.$$

Como $\beta > 1$,

$$\frac{p^*(t-1)}{pt} > 1 \Leftrightarrow p^* > \frac{pt}{p^*(t-1)},$$

portanto,

$$\frac{pt}{p^*(t-1)} \in (p, p^*).$$

**Afirmação 3.7.** *$\beta = \frac{p^*(t-1)}{pt}$ com $t = \frac{(p^*)^2}{p(p^*-p)}$, $\beta > 1$ e $\frac{pt}{(t-1)} \in (p, p^*)$.*

Vamos mostrar que

$$|W_{L,\lambda}|^p_{p^*,\mathcal{B}} \leq C_2\beta^p \left(\int_{\mathcal{C}} u_\lambda^{\frac{p\beta t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}}. \tag{3.24}$$

Observe que de (3.19)

$$\int_{\mathcal{B}} u^{p^*} u_{L,\lambda}^{p^*\beta-p^*} = \int_{\mathcal{B}} |\eta u_\lambda u_{L,\lambda}^{\beta-1}|^{p^*} = |W_{L,\lambda}|^p_{p^*,\mathcal{B}} \leq c\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)},$$

utilizando a Desigualdade de Hölder para $\frac{t}{t-1}$ e $t$, temos que

$$\begin{aligned} c\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^p u_{L,\lambda}^{p(\beta-1)} &\leq c\beta^p \int_{\mathcal{C}} u_\lambda^{p\beta} \leq c\beta^p \left(\int_{\mathcal{C}} |u_\lambda^{p\beta}|^{\frac{t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}} |\mathcal{C}|^{\frac{1}{t}} \\ &= C_2\beta^p \left(\int_{\mathcal{C}} |u_\lambda|^{\frac{p\beta t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}} < \infty, \text{ onde } C_2 = c|\mathcal{C}|^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$|W_{L,\lambda}|^p_{p^*,\mathcal{B}} \leq C_2\beta^p \left(\int_{\mathcal{C}} |u_\lambda|^{\frac{p\beta t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{t}}. \tag{3.25}$$

Vamos utilizar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que fazendo $L \to \infty$, em (3.25)

$$|u_\lambda|^{\beta p}_{\beta p^*,\mathcal{B}} \leq C_2\beta^p |u_\lambda|^{\beta p}_{\frac{p\beta t}{t-1}}.$$

Definindo

$$f_L(x) = u_\lambda^{p^*}(x) u_{L,\lambda}^{p^*\beta-p^*}(x), x \in \mathbb{R}^N.$$

Vamos mostrar que

(i) $f_L(x) \to u_\lambda^{\beta p^*}(x)$ q.t.p.

(ii) $|f_L(x)| \leq g$, para todo $L \in \mathbb{N}$, onde $g \in L^1(\mathcal{C})$.

Para $(i)$: Fixando $x \in \mathbb{R}^N$, dado $\epsilon > 0$, existe $L_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $L \leq L_0$, implica que $u(x)^{p\beta} < L_0 < L$, então

$$|u_\lambda^{p^*}(x)u_{L,\lambda}^{p^*\beta-p^*}(x) - u_\lambda^{p\beta}(x)| = |u_\lambda^{\beta p^*}(x) - u_\lambda^{\beta p^*}(x)| = 0 < \epsilon.$$

Para $(ii)$:

$$u_\lambda^{p^*}u_{L,\lambda}^{p^*\beta-p^*} \leq u_\lambda^{p^*} \in L^1(\mathcal{C}).$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{L\to\infty}\int_{\mathcal{B}} u_\lambda^{p^*}u_{L,\lambda}^{p^*\beta-p^*} = \int_{\mathcal{B}} \lim_{L\to\infty} u_\lambda^{p^*}u_{L,\lambda}^{p^*\beta-p^*} = \int_{\mathcal{B}} u_\lambda^{p^*\beta} < \infty. \tag{3.26}$$

De (3.25), elevando ambos os membros à $1/p\beta$, obtemos

$$\left(\int_{\mathcal{B}} |\eta u_\lambda u_{L,\lambda}^{\beta-1}|^{p^*}\right)^{\frac{1}{\beta p}} \leq (c\beta^p)^{(1/p\beta)}\left(\int_{\mathcal{C}} |u_\lambda|^{\frac{p\beta t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{\beta p t}}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada, quando $L \to \infty$,

$$|u_\lambda|_{\beta p^*} = \left(\int_{\mathcal{B}} u_\lambda^{\beta p^*}\right)^{\frac{1}{\beta p}} \leq C_2\beta^{1/\beta}\left(\int_{\mathcal{C}} |u_\lambda|^{\frac{p\beta t}{t-1}}\right)^{\frac{t-1}{\beta p t}} = |u_\lambda|_{p^*,\mathcal{C}}$$

ou ainda, elevando ambos os membros à $\beta p$,

$$|u_\lambda|_{\beta p^*}^{\beta p} \leq C_2\beta^p|u_\lambda|_{\frac{p\beta t}{t-1},\mathcal{C}}^{\beta p} = C_2\beta^p|u_\lambda|_{p^*,\mathcal{C}}^{\beta p}. \tag{3.27}$$

Definindo $\xi = \frac{p^*(t-1)}{pt}$ com $s = \frac{pt}{(t-1)}$ e $\beta = \xi^m, (m = 1, 2, 3, \cdots)$ vamos mostrar que existe $C_3 > 0$ tal que

$$|u_\lambda|_{\xi^{m+1}s,\mathcal{B}} \leq C_3|u_\lambda|_{\xi s,\mathcal{C}}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.28}$$

Fazendo $m = 1$ em (3.27), temos

$$\beta = \xi^1 \ \text{ e } \ |u_\lambda|_{\xi p^*,\mathcal{B}}^{\xi p} \leq C_2\xi^p|u_\lambda|_{\xi s,\mathcal{C}}^{\xi p},$$

o que implica em

$$|u_\lambda|_{\xi^2 s,\mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{\xi p}}\xi^{\frac{1}{\xi}}|u_\lambda|_{\xi s,\mathcal{C}}. \tag{3.29}$$

Fazendo $m = 2$ em (3.27), temos

$$\beta = \xi^2 \ \text{ e } \ |u_\lambda|_{\xi^2 p^*,\mathcal{B}}^{\xi^2 p} \leq C_2\xi^{2p}|u_\lambda|_{\xi^2 s,\mathcal{C}}^{\xi^2 p}.$$

Logo, por (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} |u_\lambda|_{\xi^3 s,\mathcal{B}} &\leq C_2^{\frac{1}{\xi^2 p}}\xi^{\frac{2}{\xi^2}}|u_\lambda|_{\xi^2 s,\mathcal{C}} \leq C_2^{\frac{1}{\xi^2 p}}\xi^{\frac{2}{\xi^2}}C_2^{\frac{1}{\xi p}}\xi^{\frac{1}{\xi}}|u_\lambda|_{\xi s,\mathcal{C}} \\ &= C_2^{\frac{1}{\xi^2 p}+\frac{1}{\xi p}}\xi^{\frac{1}{\xi}+\frac{2}{\xi^2}}|u_\lambda|_{\xi s,\mathcal{C}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Fazendo $m = 3$ em (3.27), temos

$$\beta = \xi^3 \ \text{ e } \ |u_\lambda|^{\xi^3 p}_{\xi^3 p^*, \mathcal{B}} \leq C_2 \xi^{3p} |u_\lambda|^{\xi^3 p}_{\xi^3 s, \mathcal{C}},$$

elevado à $1/\xi^3 p$ e em seguida utilizando (3.30),

$$\begin{aligned} |u_\lambda|_{\xi^4 s, \mathcal{B}} &\leq C_2^{\frac{1}{\xi^3 p}} \xi^{\frac{3}{\xi^3}} |u_\lambda|_{\xi^3 s, \mathcal{C}} \leq C_2^{\frac{1}{\xi^3 p}} \xi^{\frac{3}{\xi^3}} C_2^{\frac{1}{\xi^2 p} + \frac{1}{\xi p}} \xi^{\frac{1}{\xi} + \frac{2}{\xi^2}} |u_\lambda|_{\xi s, \mathcal{C}} \\ &= C_2^{\frac{1}{\xi p} + \frac{1}{\xi^2 p} + \frac{1}{\xi^3 p}} \xi^{\frac{1}{\xi} + \frac{2}{\xi^2} + \frac{3}{\xi^3}} |u_\lambda|_{\xi s, \mathcal{C}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por indução finita,

$$|u_\lambda|_{\xi^{m+1} s, \mathcal{B}} \leq C_2^{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\xi^i}} \xi^{\sum_{i=1}^m \frac{i}{\xi^i}} |u_\lambda|_{\xi s, \mathcal{C}}, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\xi^i} = \frac{\xi}{(\xi - 1)^2} \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^i} = \frac{1}{\xi - 1}$$

Pela Proposição A.1, $u_\lambda \in L^\infty(\mathcal{B})$, pois $u_\lambda \in L^s(\mathcal{B})$ para todo $s \approx \infty$ e

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathcal{B}} \leq C.$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de $p$. Calculando o limite quando $m \to \infty$ em (3.32) obtemos

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathcal{B}} \leq C_3 |u_\lambda|_{p^*, \mathcal{C}}. \tag{3.33}$$

onde $C_3 = C_2^{\frac{1}{p} \frac{\xi}{(\xi-1)^2}} \xi^{\frac{1}{\xi - 1}}$. Agora, utilizando a hipótese

$$u_\lambda \to 0 \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma), \ \text{quando} \ \ \lambda \to \infty$$

e observando que

$$\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma \subset \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma,$$

obtemos

$$u_\lambda \to 0 \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma).$$

Da imersão de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma)$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma)$, obtemos

$$u_\lambda \to 0 \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega'_\Gamma).$$

Em particular,

$$u_\lambda \to 0 \text{ em } L^{p^*}(\mathcal{C}).$$

De (3.33), concluímos

$$|u_\lambda|_{\infty, \mathcal{B}} \to 0.$$

Então, pela definição de limite, existe $\lambda^* > 0$ tal que

$$|u_\lambda|_{\infty,\mathcal{B}} \leq a, \forall \lambda \geq \lambda^*.$$

□

**Corolário 3.1.** *Sob as hipóteses da Proposição 3.2, existe $\lambda^* > 0$ tal que para $\lambda \geq \lambda^*$, $u_\lambda$ é uma solução de $(P_\lambda)$.*

## 3.3 Variedade de Nehari

O objetivo desta seção é mostrar a caracterização do nível do passo da montanha e alguns resultados sobre os níveis minimax. Para tanto, faremos uso da variedade de Nehari e algumas propriedades envolvendo tal conjunto. Vamos denotar por $I_j : W_0^{1,p}(\Omega_j) \to \mathbb{R}$ e $\Phi_{\lambda,j} : W^{1,p}(\Omega'_j) \to \mathbb{R}$ os funcionais dados por

$$I_j(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega_j} \Big(|\nabla u|^p + Z(x)|u|^p\Big) - \int_{\Omega_j} F(u)$$

e

$$\Phi_{\lambda,j}(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega'_j} \Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) - \int_{\Omega'_j} F(u).$$

Sabemos que uma condição necessária para $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$ seja um ponto crítico para $I_j$ é que $I'_j(u)u = 0$. Essa condição define o seguinte conjunto:

$$\mathcal{N}_j = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}; I'_j(u)u = 0\},$$

chamada variedade de Nehari associada ao funcional $I_j$. De maneira análoga definimos a varidade de Nehari associada a $\Phi_{\lambda,j}$ por

$$\mathcal{N}_{\lambda,j} = \{u \in W^{1,p}(\Omega'_j)\backslash\{0\}; \Phi'_{\lambda,j}(u)u = 0\}.$$

Ao longo desta seção mostraremos alguns resultados envolvendo o funcional $I_j$. No entanto, os mesmos resultados obtidos podem ser demonstrados para o funcional $\Phi_{\lambda,j}$ e $\Phi_\lambda$.

O próximo resultado mostra que o funcional $I_j$ restrito à variedade $\mathcal{N}_j$ é limitado inferiormente por uma constante não-negativa.

**Lema 3.2.** *Existe $\delta > 0$ tal que para todo $u \in \mathcal{N}_j$, tem-se*

$$I_j(u) \geq 0.$$

*Demonstração.* De fato, como $u \in \mathcal{N}_j$, temos que $I_j'(u)u = 0$. Utilizando a condição $(f_3)$ (Ambrosetti - Rabinowitz), obtemos

$$I_j(u) = I_j(u) - \frac{1}{\theta} I_j'(u)u \geq \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} \left( \frac{1}{\theta} f(u)u - F(u) \right) \geq 0.$$

□

**Lema 3.3.** *Existe $\delta > 0$, independente de $j$, tal que*

$$\|u^+\|_{\lambda, \Omega_j} > \delta, \quad \forall u \in \mathcal{N}_j.$$

*Demonstração.* Seja $u \in \mathcal{N}_j$. Então, $I_j'(u)u = 0$, isto é,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u|^p + \int_{\Omega_j} Z(x)|u|^p - \int_{\Omega_j} f(u)u = 0.$$

Recorde que, por $(H_1)$, $V(x) = 0$, para todo $x \in \Omega_j$ e para todo $j \in 1, 2, \cdots, k$. Logo,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u|^p + \int_{\Omega_j} (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p = \int_{\Omega_j} f(u)u.$$

Desde que $u = u^+ - u^-$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} f(u)u &= \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} |\nabla u^+|^p + \int_{\Omega_j \cap [u < 0]} |\nabla u^-|^p + \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} (\lambda V(x) + Z(x))|u^+|^p \\ &\quad + \int_{\Omega_j \cap [u < 0]} (\lambda V(x) + Z(x))|u^-|^p. \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_{\Omega_j \cap [u < 0]} f(u^-)u^- = 0$, pois $f(t) = 0$ para $t \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} f(u^+)u^+ &= \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} |\nabla u^+|^p + \int_{\Omega_j \cap [u < 0]} |\nabla u^-|^p + \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} (\lambda V(x) + Z(x))|u^+|^p \\ &\quad + \int_{\Omega_j \cap [u < 0]} (\lambda V(x) + Z(x))|u^-|^p, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u^+|^p + \int_{\Omega_j} (\lambda V(x) + Z(x))|u^+|^p \leq \int_{\Omega_j \cap [u \geq 0]} f(u^+)u^+.$$

Então,

$$\|u^+\|^p_{\lambda, \Omega_j} \leq \int_{\Omega_j} f(u^+)u^+.$$

Utilizando a condição de crescimento de $f$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u^+\|^p_{\lambda,\Omega_j} &\leq \epsilon \int_{\Omega_j} |u^+|^p + C_\epsilon \int_{\Omega_j} |u^+|^q. \\ &\leq \epsilon \|u^+\|^p_{p,\Omega_j} + C_\epsilon \|u^+\|^q_{q,\Omega_j}. \end{aligned}$$

Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$, então $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$. Pelas imersões de Sobolev, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\|u^+\|^p_{\lambda,\Omega_j} \leq \epsilon c_1 \|u^+\|^p_{\lambda,\Omega_j} + c_2 \|u^+\|^q_{\lambda,\Omega_j}.$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{1}{2c_1}$ temos

$$\frac{1}{2}\|u^+\|^p_{\lambda,\Omega_j} \leq c_2 \|u^+\|^q_{\lambda,\Omega_j}$$

implicando em

$$\|u^+\|_{\lambda,\Omega_j} > \delta,$$

com $\delta = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^{\frac{1}{q-p}}$. □

Agora, mostraremos que dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}$ a função $t \mapsto I_j(tu)$ possui um único máximo.

**Lema 3.4.** *Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}$, existe um único número $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_j$. Além disso,*

$$I_j(t_u u) = \max_{t \geq 0} I_j(tu).$$

*Demonstração.* Fixemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}$ e consideremos a função

$$\begin{aligned} g_j : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g_j(t) = I_j(tu) = \frac{1}{p}\int_{\Omega_j} |\nabla tu|^p + \int_{\Omega_j} Z(x)|tu|^p - \int_{\Omega_j} F(tu). \end{aligned}$$

**Existência**

Note que $g_j \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$, pois $I_j \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega_j),\mathbb{R})$ com

$$g_j'(t) = I_j'(tu)u.$$

Além disso, seguindo os mesmos argumentos do item (ii) da demonstração da Proposição 2.1 é possível mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} g_j(t) = -\infty.$$

**Afirmação 3.8.** *Existe $\delta_j > 0$ tal que $g_j(t) > 0$ para todo $t \in (0,\delta_j)$.*

De fato, argumentando de maneira análoga como na demonstração do item $(i)$ da Proposição 2.1, existem constantes $c_1$ e $c_2$ positivas tais que

$$g_j(t) = I_j(tu) \geq c_1 t^p \|u\|^p_{\lambda,\Omega_j} - c_2 t^q \|u\|^q_{\lambda,\Omega_j}.$$

Desde que

$$g_j(t) = 0 \Leftrightarrow t = \left(\frac{\tilde{c_1}}{\tilde{c_1}}\right)^{\frac{1}{q-p}} > 0,$$

onde $\tilde{c_1} = c_1\|u\|^p_{\lambda,\Omega_j}$ e $\tilde{c_2} = c_2\|u\|^q_{\lambda,\Omega_j}$. Escolhendo $\delta_j = \left(\frac{\tilde{c_1}}{\tilde{c_2}}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ para todo $t \in (0, \delta_j)$, temos

$$g_j(t) \geq c_1\|tu\|^p_{\lambda,\Omega_j} - c_2\|tu\|^q_{\lambda,\Omega_j} > \delta_j > 0.$$

Portanto, como $g(0) = 0$, pelo Teorema de Weierstrass, $g_j$ possui pelo menos um ponto de máximo no intervalo $[0, \delta_j]$.

**Unicidade**

Pelo Lema 3.3, $u^+ = max\{0, u\} \neq 0$. Suponha que existem números reais $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_1 u, t_2 u \in \mathcal{N}_j$. Assim,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla(t_1 u)|^p + \int_{\Omega_j} Z(x)|t_1 u|^p = \int_{\Omega_j} f(t_1 u) t_1 u$$

e

$$\int_{\Omega_j} |\nabla(t_2 u)|^p + \int_{\Omega_j} Z(x)|t_2 u|^p = \int_{\Omega_j} f(t_2 u) t_2 u.$$

Recorde que, por $(H_1)$, $V \equiv 0$ em $\Omega_j$, desse modo

$$t_1^p \|u\|^p_{\lambda,\Omega_j} = \int_{\Omega_j \cap [u>0]} f(t_1 u) t_1 u \ \text{ e } \ t_2^p \|u\|^p_{\lambda,\Omega_j} = \int_{\Omega_j \cap [u>0]} f(t_2 u) t_2 u,$$

que é equivalente à

$$\|u\|^p_{\lambda,\Omega_j} = \int_{\Omega_j \cap [u>0]} \frac{f(t_1 u) u^p}{(t_1 u)^{p-1}} \ \ e \ \ \|u\|^p_{\lambda,\Omega_j} = \int_{\Omega_j \cap [u>0]} \frac{f(t_2 u) u^p}{(t_2^p u)^{p-1}}.$$

Assim, subtraindo as equações acima obtemos

$$0 = \int_{\Omega_j \cap [u>0]} \left(\frac{f(t_1 u)}{(t_1 u)^{p-1}} - \frac{f(t_2 u)}{(t_2 u)^{p-1}}\right) u^p.$$

Suponha sem perda de generalidade que $t_1 < t_2$. Por $(f_4)$, a função $t \mapsto \frac{f(t)}{t^{p-1}}$ é crescente para $t > 0$. Portanto, o lado direito da equação acima é negativo, o que é um absurdo, portanto, $t_1 = t_2$. $\square$

Do Lema 3.2, podemos definir

$$c_{j,1} := \inf_{u \in \mathcal{N}_j} I_j(u).$$

O nível do Passo da Montanha para o funcional $I_j$ é definido por

$$c_j := \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} I_j(\gamma(t)),$$

em que

$$\Gamma_j = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega_j)); \gamma(0) = 0, I_j(\gamma(1)) < 0\}.$$

Dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$, pelo Lema 3.4, existe um único $t_u > 0$ tal que

$$I_j(t_u u) = \max_{t \geq 0} I_j(tu).$$

Logo,

$$c_{j,1} = \inf_{u \in \mathcal{N}_j} I_j(u) \leq \max_{t \geq 0} I_j(tu), \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega_j), \tag{3.34}$$

mostrando que $c_{j,1}$ é cota inferior do conjunto $\{\max_{t \geq 0} I_j(tu); u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\}$. Dessa forma, podemos definir

$$c_{j,2} := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_j(tu).$$

Com as definições acima, temos a seguinte caracterização do nível do passo da montanha:

**Teorema 3.1.** *Sob as hipóteses* $(f1) - (f4)$, *temos*

$$c_j = c_{j,1} = c_{j,2}.$$

*Demonstração.* Por (3.34),

$$c_{j,1} \leq I_j(t_u u) \leq \max_{t \geq 0} I_j(tu), \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega_j) \backslash \{0\}.$$

Pela definição de ínfimo

$$c_{j,1} \leq \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_j(tu) = c_{j,2}. \tag{3.35}$$

Por outro lado, como $\mathcal{N}_j \subset W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}$, temos

$$c_{j,2} = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_j(tu) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_j} \max_{t \geq 0} I_j(tu).$$

Desde que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_j} \max_{t \geq 0} I_j(tu) \leq \max_{t \geq 0} I_j(tu), \forall u \in \mathcal{N}_j$$

então, pelo Lema 3.4

$$c_{j,2} \leq \max_{t \geq 0} I_j(tu) = I_j(t_u u), \forall u \in \mathcal{N}_j.$$

Mas, para cada $u \in \mathcal{N}_j$ temos $t_u = 1$. Portanto,

$$c_{j,2} \leq I_j(u), \forall u \in \mathcal{N}_j$$

de onde segue que

$$c_{j,2} \leq c_{j,1}. \tag{3.36}$$

De (3.36) e (3.35), $c_{j,1} = c_{j,2}$.

Mostraremos agora que $c_j \leq c_{j,2}$. Para tanto, observe que

$$c_j = \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} I_j(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I_j(\gamma(t)), \quad \forall \gamma \in \Gamma_j. \tag{3.37}$$

Recorde que, utilizando os mesmos argumentos da demonstração do item $(ii)$ da Proposição 2.1, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}$ podemos mostrar que

$$\lim_{t \to \infty} I_j(tu) = -\infty.$$

Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $I_j(t_0 u) < 0$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_u : [0,1] &\rightarrow W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\} \\ t &\mapsto \gamma_u(t) = t t_0 u. \end{aligned}$$

Note que $\gamma_u \in \Gamma_j$, pois $\gamma_u(0) = 0$, $I_j(\gamma_u(1)) < 0$ e $\gamma_u \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega_j))$. Logo, por (3.37),

$$c_j \leq \max_{t \in [0,1]} I_j(\gamma_u(t)) = \max_{t \in [0,1]} I_j(t t_0 u) \leq \max_{t \geq 0} I_j(tu).$$

Portanto,

$$c_j \leq \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_j(tu) = c_{j,2},$$

ou seja,

$$c_j \leq c_{j,2}. \tag{3.38}$$

Por fim, mostraremos que $c_{j,1} \leq c_j$. Para este fim, defina os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{N}_j^+ = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}; I_j'(u)u > 0\} \text{ e } \mathcal{N}_j^- = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)\backslash\{0\}; I'(u)u < 0\}.$$

Seja $\gamma \in \Gamma_j$. Então $I_j(\gamma(1)) < 0$.

**Afirmação 3.9.** *Existe $\delta_* > 0$ tal que $B_{\delta_*}(0)\backslash\{0\} \subset \mathcal{N}_j^+$.*

De fato, dado $u \in \mathcal{N}_j^+$ é possível mostrar, como na demonstração da primeira geometria do passo da montanha da Seção 2.1, que existem $c_1$ e $c_2 > 0$ tais que

$$I_j'(u)u \geq c_2\|u\|_{\lambda,\Omega_j}^p - c_2\|u\|_{\lambda,\Omega_j}^q,$$

Definindo $\delta_* = (\frac{c_1}{c_2})^{\frac{1}{q-p}}$ temos

$$\|u\|_{\lambda,\Omega_j} < \delta_* \Leftrightarrow \|u\|_{\lambda,\Omega_j} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{q-p}} \Leftrightarrow c_2\|u\|_{\lambda,\Omega_j}^p - c_2\|u\|_{\lambda,\Omega_j}^q > 0$$

mostrando que $I_j'(u)u > 0$ em $B_{\delta_*}(0)\backslash\{0\}$.

**Conclusão**

Dado $\gamma \in \Gamma_j$, pelo Lema 3.2, podemos concluir que $\gamma(1) \notin \mathcal{N}_j^+$, pois $I_j(\gamma(1)) < 0$, ou seja, $\gamma([0,1]) \cap (\mathcal{N}_j^+)^c \neq \emptyset$. Como $\gamma(0) = 0$, segue da continuidade de $\gamma$ que existe um $t_0$ próximo de 0 tal que $\gamma(t) \in B_{\delta_*}(0)$. Logo, pela Afirmação 3.9, $\gamma(t_0) \in \mathcal{N}_j^+$ implicando que

$$\gamma([0,1]) \cap \mathcal{N}^+ \neq \emptyset.$$

Pelo Teorema da Alfândega (ver Apêndice, Teorema C.5), existe $t_1 \in [0, t_0)$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial\mathcal{N}_j^+$. Desde que $\partial\mathcal{N}_j^+ = \partial\mathcal{N}_j^- = \mathcal{N}_j$,

$$\gamma(t_0) \in \mathcal{N}_j \cap \gamma([0,1]).$$

Portanto, dado $\gamma \in \Gamma_j$ existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$\gamma(t_0) \in \mathcal{N}_j,$$

o que implica

$$c_{j,1} = \inf_{u \in \mathcal{N}_j} I_j(u) \leq I_j(\gamma(t_0)) \leq \max_{t \in [0,1]} I_j(\gamma(t)),$$

ou seja,

$$c_{j,1} \leq \max_{t \in [0,1]} I_j(\gamma(t)), \forall \gamma \in \Gamma_j.$$

Pela definição de ínfimo, segue que

$$c_{j,1} \leq c_j.$$

Assim, de (3.38), temos $c_j = c_{j,1} = c_{j,2}$. $\square$

De maneira semelhante mostra-se que os resultados desta seção são válidos também para o funcional $\Phi_{\lambda,j}$ . Para esse funcional definiremos

$$c_{\lambda,j,1} := \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j}(u) \;\text{ e }\; c_{\lambda,j,2} := \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(\Omega'_j)\\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} \Phi_{\lambda,j}(tu).$$

## 3.4 Um Valor Crítico Especial para $\Phi_\lambda$

Nesta seção mostraremos que os funcionais $I_j$ e $\Phi_{\lambda,j}$ verificam a geometria do passo da montanha e algumas relações entre os níveis minimax, $c_j$ e $c_{\lambda,j}$ associados aos funcionais citados, respectivamente. Além disso, utilizando o Lema da Deformação, mostraremos que $b_{\lambda,\Gamma}$ é um valor crítico para $\Phi_\lambda$.

Recorde que denotamos por $I_j : W_0^{1,p}(\Omega_j) \to \mathbb{R}$ e $\Phi_{\lambda,j} : W^{1,p}(\Omega'_j) \to \mathbb{R}$ os funcionais dados por

$$I_j(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega_j} \Big(|\nabla u|^p + Z(x)|u|^p\Big) - \int_{\Omega_j} F(u)$$

e

$$\Phi_{\lambda,j}(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega'_j} \Big(|\nabla u|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^p\Big) - \int_{\Omega'_j} F(u).$$

Sabemos que os pontos críticos desses funcionais acimas estão relacionados com as soluções fracas dos seguintes problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x)|u|^{p-2}u = f(u) \text{ em } \Omega_j \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_j \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda V(x) + Z(x))|u|^{p-2}u = f(u) \text{ em } \Omega'_j \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega'_j. \end{cases}$$

**Proposição 3.3.** *O funcional $\Phi_{\lambda,j}$ verifica a Geometria do Passo da Montanha, ou seja,*

*(i) Existe $r, \rho > 0$ tais que $\Phi_{\lambda,j}(u) \geq r > 0$ para todo $u \in W^{1,p}(\Omega'_j)$ com $\|u\| = \rho$.*

*(ii) Existe $e \in W^{1,p}(\Omega'_j)$, com $\|e\| > \rho$, tal que $\Phi_{\lambda,j}(e) < 0$.*

**Proposição 3.4.** *O funcional $I_j$ verifica a Geometria do Passo da Montanha, ou seja,*

*(i) Existem $r, \rho > 0$ tais que $I_j(u) \geq r > 0$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$ com $\|u\| = \rho$.*

*(ii) Existe* $e \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$*, com* $\|e\| > \rho$*, tal que* $I_j(e) < 0$.

As demonstrações das Proposições 3.3 e 3.4 seguem de maneira análoga a feita na Seção 2.2. No que segue, vamos denotar por $c_j$ e $c_{\lambda,j}$ os níveis minimax, os quais são obtidos pelo Teorema B.1

$$c_j = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_j(\gamma(t))$$

e

$$c_{\lambda,j} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma_j = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega_j)); \gamma(0) = 0, I_j(\gamma(1)) < 0\}$$

e

$$\Gamma_{\lambda,j} = \{\gamma \in C([0,1], W^{1,p}(\Omega_j')); \gamma(0) = 0, \Phi_{\lambda,j}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Além disso, pelo Teorema do passo da montanha com a condição $(PS)$ (Ver Apêndice A, Teorema B.2 ) existem funções não-negativas $w_j \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$ e $w_{\lambda,j} \in W^{1,p}(\Omega')$, pela condição $(PS)$ de $\Phi_{\lambda,j}$ e $I_j$, tais que

$$I_j(w_j) = c_j \quad \text{e} \quad I_j'(w_j) = 0 \tag{3.39}$$

$$\Phi_{\lambda,j}(w_{\lambda,j}) = c_{\lambda,j} \quad \text{e} \quad \Phi_{\lambda,j}'(w_{\lambda,j}) = 0. \tag{3.40}$$

Estudaremos algumas propriedades dos valores críticos $c_{\lambda,j}$ e $c_j$.

**Lema 3.5.** *As seguintes afirmações são válidas*

*(a)* $c_{\lambda,j} \le c_j, \forall j \in \{1, 2, \cdots, k\}$;

*(b)* $c_{\lambda,j} \to c_j$*, quando* $\lambda \to \infty$.

*Demonstração.* $(a)$ Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, considere $w_j \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$. Observe que a função $\tilde{w}_j : \Omega_j' \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{w}_j(x) = \begin{cases} w_j(x), & \text{em} \quad \Omega_j \\ 0, & \text{em} \quad \Omega_j' \backslash \Omega_j \end{cases}$$

está em $W^{1,p}(\Omega_j')$, pois

$$\int_{\Omega_j'} |\tilde{w}_j|^p = \int_{\Omega_j} |w_j|^p + \int_{\Omega_j'\backslash\Omega_j} |0|^p < \infty$$

e

$$\int_{\Omega_j'} |\nabla \tilde{w}_j|^p = \int_{\Omega_j} |\nabla w_j|^p + \int_{\Omega_j' \backslash \Omega_j} |\nabla 0|^p < \infty.$$

Portanto, podemos considerar a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega_j) \subset W^{1,p}(\Omega_j')$. Agora, observe que

$$\Phi_{\lambda,j}'(\tilde{w}_j)\tilde{w}_j = I_j'(w_j)w_j.$$

De fato, desde que $\tilde{w}_j = 0$ em $\Omega_j' \backslash \Omega_j$ e, por $(H_1)$, $V \equiv 0$ em $\Omega$ temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda,j}'(\tilde{w}_j)\tilde{w}_j &= \int_{\Omega_j'} \Big( |\nabla \tilde{w}_j|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|\nabla \tilde{w}_j|^p \Big) - \int_{\Omega_j'} f(\tilde{w}_j)\tilde{w}_j \\
&= \int_{\Omega_j} \Big( |\nabla \tilde{w}_j|^p + Z(x)|\nabla \tilde{w}_j|^p \Big) - \int_{\Omega_j} f(\tilde{w}_j)\tilde{w}_j \\
&= I_j'(w_j)w_j.
\end{aligned}$$

De maneira análoga verificamos que $\Phi_{\lambda,j}(\tilde{w}_j) = I_j(w_j)$. Se $w_j$ satisfaz (3.39), $w_j \in \mathcal{N}_j$, assim $I_j'(w_j)w_j = 0$, o que implica pela igualdade acima que

$$\Phi_{\lambda,j}'(\tilde{w}_j)\tilde{w}_j = 0,$$

mostrando que $\tilde{w}_j \in \mathcal{N}_{\lambda,j}$. Logo,

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j}(u) \leq \Phi_{\lambda,j}(\tilde{w}).$$

Pelo Teorema 3.1

$$c_{\lambda,j} = c_{\lambda,j,1} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j}(u).$$

O que implica

$$c_{\lambda,j} = c_{\lambda,j,1} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j}(u) \leq \Phi_{\lambda,j}(\tilde{w}) = I_j(w_j) = c_j.$$

$\square$

*Demonstração.* $(b)$ Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ fixado, a aplicação $\lambda \mapsto c_{\lambda,j}$ é estritamente crescente. De fato, seja $w_j \in W^{1,p}(\Omega_j')$. Pelo Lema 3.4, existem números reais $t_u^1, t_u^2 > 0$ tais que $t_u^1 u \in \mathcal{N}_{\lambda_1,j}$ e $t_u^2 u \in \mathcal{N}_{\lambda_2,j}$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
c_{\lambda_1,j} &= \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda_1,j}} \Phi_{\lambda_1,j}(u) \leq \Phi_{\lambda_1,j}(t_u^1 u) < \Phi_{\lambda_2,j}(t_u^2 u) \leq \max_{t \geq 0} \Phi_{\lambda_2,j}(tu) \\
&= c_{\lambda_2,j,2} = c_{\lambda_2,j}.
\end{aligned}$$

Seja $(\lambda_n)$ uma sequência tal que $\lambda_n \to \infty$. Do raciocínio anterior concluímos

$$c_{\lambda_1,j} < c_{\lambda_2,j} < \cdots < c_{\lambda_n,j} < c_{\lambda_2,j} \leq c_j.$$

Como a sequência $(c_{\lambda,j})$ é monótona e limitada por $c_j$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,j} = \sup_{n\in\mathbb{N}} c_{\lambda_n,j} \leq c_j.$$

Sem perda de generalidade podemos considerar $\lambda_n \geq 1$. Considere $w_{\lambda_n,j} \in W^{1,p}(\Omega')$ solução do problema $(P_{\lambda,j})$. Desse modo,

$$c_{\lambda_n,j} = \Phi_{\lambda_n,j}(w_{\lambda_n,j}) \to \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,j} \ \text{ e } \ \|\Phi_{\lambda_n,j}(w_{\lambda_n,j})\|^*_{\lambda_n} = 0,$$

de onde segue que $(w_{\lambda_n})$ é uma sequência $(PS)_\infty$ para a sequência de funcionais $(\Phi_{\lambda_n,j})$.

**Afirmação 3.10.** *A sequência $(w_{\lambda_n,j})$ é limitada em $W^{1,p}(\Omega'_j)$.*

Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz $(f_3)$,

$$\begin{aligned}
c_{\lambda_n,j} &= \Phi_{\lambda_n,j}(w_{\lambda_n,j}) - \frac{1}{\theta}\Phi'_{\lambda_n,j}(w_{\lambda_n,j})w_{\lambda_n,j} \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|w_{\lambda_n,j}\|^p_{\lambda_n,\Omega_j} - \int_{\Omega'_j}\Big(F(u) - \frac{1}{\theta}f(u)u\Big) \geq 0. \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|w_{\lambda_n,j}\|^p_{\lambda_n,\Omega_j}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2, existe $c > 0$ tal que

$$\|w_{\lambda_n,j}\|^p_{\lambda_n,\Omega_j} \leq c\|w_{\lambda_n,j}\|^p,$$

de onde segue

$$c_{\lambda_n,j} \ \geq \ c\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|w_{\lambda_n,j}\|^p_{\Omega_j}. \tag{3.41}$$

Logo,

$$c_j \geq \limsup_{n\to\infty} c_{\lambda_n,j} \ \geq \ \limsup_{n\to\infty} c\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|w_{\lambda_n,j}\|^p_{\Omega_j}. \tag{3.42}$$

Assim, podemos assumir que existe $w_{0,j} \in W^{1,p}(\Omega'_j)$, tal que

$$w_{\lambda_n,j} \rightharpoonup w_{0,j} \text{ em } W^{1,p}(\Omega'_j).$$

Pelo Teorema A.10, a menos de subsequência,

$$w_{\lambda_n,j} \to w_{0,j} \quad \text{em} \quad L^s(\Omega_j'), \quad \text{para} \quad s \geq 1.$$

Pelo Teorema A.8,

$$w_{\lambda_n,j}(x) \to w_{0,j}(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega_j'.$$

Seguindo os mesmos argumentos utilizados na demonstração da Proposição 3.1 mostra-se que

$$w_{\lambda_n,j} \to w_{0,j} \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\Omega_j'),$$

$w_{0,j} = 0$ em $\Omega_j' \backslash \Omega_j'$ e a restrição de $w_{0,j}$ a $\Omega_j$ é uma solução de $(P_j)$. Mostraremos que $w_0 \neq 0$. Para tanto, vamos provar a seguinte afirmação.

**Afirmação 3.11.** *Existe $\delta_q > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega_j'} |w_{\lambda_n,j}|^q > \delta_q > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, como $w_{\lambda_n,j} \in \mathcal{N}_{\lambda,j}$, então, $\Phi_{\lambda,j}'(w_{\lambda_n,j})w_{\lambda_n,j} = 0$, isto é,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla w_{\lambda_n,j}|^p + \int_{\Omega_j} (\lambda V(x) + Z(x))|w_{\lambda_n,j}|^p = \int_{\Omega_j} f(w_{\lambda_n,j})w_{\lambda_n,j}.$$

Assim, utilizando a condição de crescimento de $f$ na desigualdade anterior, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|w_{\lambda_n,j}\|_{\lambda_n,\Omega_j}^p &\leq \epsilon \int_{\Omega_j} |w_{\lambda_n,j}|^p + C_\epsilon \int_{\Omega_j} |w_{\lambda_n,j}|^q. \\ &\leq \epsilon \|w_{\lambda_n,j}\|_{p,\Omega_j}^p + C_\epsilon \|w_{\lambda_n,j}\|_{q,\Omega_j}^q. \end{aligned}$$

Como $w_{\lambda_n,j} \in W^{1,p}(\Omega_j)$, então $w_{\lambda_n,j} \in W^{1,p}(\Omega_j)$. Pelas imersões de Sobolev, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\|w_{\lambda_n,j}\|_{\lambda_n,\Omega_j}^p \leq \epsilon c_1 \|w_{\lambda_n,j}\|_{\lambda_n,\Omega_j}^p + c_2 \|w_{\lambda_n,j}\|_{q,\Omega_j}^q$$

Escolhendo $\epsilon_0 = \frac{1}{2c_1}$ temos

$$\frac{1}{2} \|w_{\lambda_n,j}\|_{\lambda_n,\Omega_j}^p \leq c_2 \|w_{\lambda_n,j}\|_{q,\Omega_j}^q$$

Pelo Lema 1.2,

$$\frac{1}{2} \|w_{\lambda_n,j}\|_{q,\Omega_j}^p \leq \frac{1}{2} \|w_{\lambda_n,j}\|_{\lambda_n,\Omega_j}^p \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \|w_{\lambda_n,j}\|_{q,\Omega_j}^p \leq c_2 \|w_{\lambda_n,j}\|_{q,\Omega_j}^q.$$

implicando em

$$\|w_{\lambda_n,j}\|_{\lambda_n,\Omega_j} > \delta,$$

com $\delta = \left(\frac{1}{2c_3}\right)^{\frac{1}{q-p}}$. Portanto,

$$\|w_{\lambda_n,j}\|^q_{q,\Omega_j} \geq \delta_q.$$

Agora, como

$$w_{\lambda_n,j} \to w_0 \quad \text{em} \quad L^s(\Omega_j'), \quad \text{para} \quad s \geq 1,$$

pelo Teorema A.8, existem uma subsequência $(w_{\lambda n_k,j})$ de $(w_{\lambda n,j})$ e uma função em $h \in L^p(\Omega_j)$ tal que

$$w_{\lambda n_k,j} \to w_0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega_j \quad \text{e} \quad |w_{\lambda n_k,j}| \leq h \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega_j.$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$\int_{\Omega_j'} |w_{\lambda_n,j}|^q \to \int_{\Omega_j} |w_0|^q \geq \delta_q > 0,$$

de onde segue que $w_0 \neq 0$. Portanto, $w_0 \in \mathcal{N}_{\lambda,j}$ e

$$c_j \geq \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,j} \geq \Phi_{\lambda,j}(w_0) = I_j(w_0) \geq c_j.$$

Mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,j} = c_j.$$

□

Agora definiremos uma aplicação que será muito útil ao longo desta seção. Com esta finalidade, recorde que pelo Teorema 3.1 existe $t_u > 0$ tal que

$$I_j(t_u w_j) = \max_{t\geq 0} I_j(tw_j) > I_j(tw_j)$$

escolha $R_j > 1$ tal que

$$0 < I_j\left(\frac{1}{R_j}w_i\right), \; I_j(R_j w_j) < c_j. \tag{3.43}$$

Se definirmos

$$R = \min_{1\leq j\leq l} R_j,$$

então

$$0 < I_j\left(\frac{1}{R}w_i\right), \; I_j(Rw_j) < c_j, \; \text{para } j = 1, 2, \cdots, k.$$

Da definção de $c_j$, a equação abaixo é válida

$$\max_{s\in[1/R^2,1]} I_j(sRw_j) = I_j(w_j) = c_j, \quad \forall j \in \Gamma. \tag{3.44}$$

De fato, usando o Lema 3.4,

$$c_j = I_j(w_j) \leq \max_{s\in[1/R^2,1]} I_j(sRw_j) \leq \max_{s\geq 0} I_j(sRw_j) = I_j(w_j) = c_j.$$

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_0 : [1/R^2,1]^l &\rightarrow E_\lambda\backslash\{0\} \\ \overrightarrow{t} &\mapsto \gamma_0(\overrightarrow{t}) \end{aligned} \tag{3.45}$$

em que

$$\begin{aligned} \gamma_0(\overrightarrow{t}) : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \gamma_0(\overrightarrow{t})(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j(x), & \text{se} \quad x \in \Omega_j \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega_j, \end{cases} \end{aligned}$$

onde

$$\hat{w}_j(x) = \begin{cases} w_j(x), & \text{em} \quad \Omega_j \\ 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N\backslash\Omega_j. \end{cases}$$

Observe que $\gamma_0$ está bem definida, ou seja, $\gamma_0(\overrightarrow{t}) \in E_\lambda\backslash\{0\}$. De fato, Por $(H_1)$, $V \equiv 0$ em $\Omega$, assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma_0(\overrightarrow{t})|^p &= \int_{\Omega_\Gamma} |\sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j(x)|^p \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^k \Omega_i} |\sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j(x)|^p \\ &= \sum_{i=1}^{k}\left(\int_{\Omega_i} |\sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j(x)|^p\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega_i} |t_j R w_j(x)|^p < \infty, \end{aligned}$$

pois, $w_j \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $\gamma_0(\overrightarrow{t}) \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Novamente por $(H_1)$, $V \equiv 0$ em $\Omega$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\gamma_0(\overrightarrow{t})|^p = \int_{\Omega_\Gamma} V(x)|\gamma_0(\overrightarrow{t})|^p + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Gamma} V(x)|\gamma_0(\overrightarrow{t})|^p = 0 < \infty.$$

Como $\gamma_0$ está bem definida podemos definir o seguinte conjunto:

$$\Gamma_* = \{\gamma \in C([1/R^2, 1]^l, E_\lambda \backslash \{0\}); \gamma = \gamma_0 \text{ sobre } \partial([1/R^2, 1]^l)\}$$

Note que $\Gamma_* \neq \emptyset$, pois $\gamma_0 \in \Gamma_*$. O próximo lema é um lema técnico que será utilizado para mostrar a existência de valor crítico de $\Phi_\lambda$.

**Lema 3.6.** *Dado $\gamma \in \Gamma_*$, existe $\overrightarrow{t} \in [1/R^2, 1]^l$ tal que*

$$\Phi'_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t}))(\gamma(\overrightarrow{t})) = 0, \ \forall j \in \Gamma.$$

*Demonstração.* Seja $\gamma \in \Gamma_*$. Defina aplicação

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\gamma} : [1/R^2, 1]^l & \to & \mathbb{R}^l \\ \overrightarrow{t} & \mapsto & \tilde{\gamma}(\overrightarrow{t}) = (\Phi'_{\lambda,1}(\gamma(\overrightarrow{t}))(\gamma(\overrightarrow{t})), \cdots, \Phi'_{\lambda,l}(\gamma(\overrightarrow{t}))(\gamma(\overrightarrow{t}))). \end{array}$$

Se mostrarmos que existe $\overrightarrow{t} \in [1/R^2, 1]^l$ de maneira que $\tilde{\gamma}(\overrightarrow{t}) = (0, 0, \cdots, 0)$ finalizamos a demonstração. Para tal, utilizaremos alguns resultados da Teoria do Grau Topológico presentes no Apêndice D. Inicialmente, mostraremos que $(0, \cdots, 0) \notin \tilde{\gamma}(\partial[1/R^2, 1]^l)$. Note que se $\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$, então pela definição de $\Gamma_*$, $\gamma(\overrightarrow{t}) = \gamma_0(\overrightarrow{t})$.

**Afirmação 3.12.**

$$I'_j(t_jRw_j)(t_jRw_j) = \Phi'_{\lambda,j}(\gamma_0(\overrightarrow{t}))(\gamma_0(\overrightarrow{t})). \tag{3.46}$$

De fato,

$$\begin{aligned} I'_j(t_jRw_j)(t_jRw_j) &= \int_{\Omega_j} |\nabla(t_jRw_j)|^{p-2}\nabla(t_jRw_j)\nabla(t_jRw_j) \\ &\quad + \int_{\Omega_j} Z(x)|t_jRw_j|^{p-2}t_jRw_jt_jRw_j - \int_{\Omega_j} f(t_jRw_j)t_jRw_j \\ &= \int_{\Omega_j} \Big(|\nabla(t_jRw_j)|^p + Z(x)|t_jRw_j|^p\Big) - \int_{\Omega_j} f(t_jRw_j)t_jRw_j. \end{aligned}$$

Note que $w_i = 0$, quando $i \neq j$, então na integral sobre $\Omega_j$, $t_iRw_i = 0$, assim

$$\begin{aligned} I'_j(t_jRw_j)(t_jRw_j) &= \int_{\Omega_j} \Big|\nabla\Big(\sum_{i=1}^{l} t_iRw_i\Big)\Big|^p + \int_{\Omega_j} Z(x)\Big|\sum_{i=1}^{l} t_iRw_i\Big|^p \\ &\quad - \int_{\Omega_j} f\Big(\sum_{i=1}^{l} t_iRw_i\Big)\sum_{i=1}^{l} t_iRw_i. \end{aligned}$$

Por $(H_1)$, $V \equiv 0$ em $\Omega$. Desse modo,

$$\begin{aligned} I_j'(t_jRw_j)(t_jRw_j) &= \int_{\Omega_j'} |\nabla\gamma_0(\overrightarrow{t})|^p + (\lambda V(x) + Z(x))|\gamma_0(\overrightarrow{t})|^p - \int_{\Omega_j'} f(\gamma_0(t))\gamma_0(\overrightarrow{t}) \\ &= \Phi_{\lambda,j}'(\gamma_0(\overrightarrow{t}))(\gamma_0(\overrightarrow{t})). \end{aligned}$$

**Afirmação 3.13.**

$$I_j'(t_jRw_j)(t_jRw_j) = 0 \textit{ se, e só se, } t_j = \frac{1}{R}\ , \forall j \in \{1, 2, \cdots, l\}. \tag{3.47}$$

Fixando $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$ e $t_j = \frac{1}{R}$, obtemos

$$I_j'(t_jRw_j)(t_jRw_j) = I_j'(w_j)(w_j) = 0,$$

pelo fato de $w_j \in W_0^{1,p}(\Omega_j)$ ser ponto crítico de $I_j$.

Reciprocamente, supondo que $I_j'(t_jRw_j)(t_jRw_j) = 0$, então

$$t_jRw_j \in \mathcal{N}_j = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega_j); I_j'(u)(u) = 0, u \neq 0\},$$

que é a variedade de Nehari associada a $I_j$. Pelo Lema 3.4, existe um único $t_j > 0$ tal que $I_j(t_jRw_j)(t_jRw_j) = 0$, para cada $j = 1, 2, \cdots, k$. Assim, concluímos que $t_jR = 1$ o que implica que $t_j = 1/R$.

Dessa forma, se $\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$, então $t_{j_0} = 1/R^2$ ou $t_{j_0} = 1$, para algum $j_0 \in \Gamma$. Consequentemente, de (3.47),

$$\Phi_{\lambda,j_0}'(\gamma_0(\overrightarrow{t}))(\gamma_0(\overrightarrow{t})) = I_{j_0}'\Big(\frac{1}{R}w_{j_0}\Big)\Big(\frac{1}{R}w_{j_0}\Big) \text{ ou } \Phi_{\lambda,j_0}'(\gamma_0(\overrightarrow{t}))(\gamma_0(\overrightarrow{t})) = I_{j_0}'(Rw_{j_0})(Rw_{j_0}).$$

Portanto, valendo $\Phi_{\lambda,j_0}'(\gamma_0(\overrightarrow{t}))(\gamma_0(\overrightarrow{t})) = 0$, obtemos que

$$Rw_{j_0} \text{ ou } \frac{1}{R}w_{j_0} \in \mathcal{N}_{j_0} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega_{j_0}); I_{j_0}'(u)(u) = 0, u \neq 0\}.$$

Pelo Teorema 3.1

$$c_{j_0} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{j_0}} I_{j_0}(u) \leq I_{j_0}(u), \forall u \in \mathcal{N}_{j_0},$$

em particular para $u = \frac{1}{R}w_{j_0}$ ou $u = Rw_{j_0}$ o que é uma contradição com (3.43). Com isso concluímos que

$$(0, \cdots, 0) \notin \tilde{\gamma}(\partial[1/R^2, 1]^l).$$

Mostraremos agora que fixado $\gamma \in \Gamma_*$, existe $\overrightarrow{t} \in (1/R^2, 1)^l$ tal que

$$\Phi_{\lambda,j}'(\gamma(\overrightarrow{t}))(\gamma(\overrightarrow{t})) = 0,\ \forall j \in \{1, 2, \cdots, l\}.$$

De fato, considere a função $f : [1/R^2, 1]^{2l} \to \mathbb{R}^l$ dada por

$$f(\overrightarrow{t}) = (f_1(\overrightarrow{t}), \cdots, f_{2l}(\overrightarrow{t}))$$

onde, para $j = 1, 2, \cdots, 2l$

$$f_j(\overrightarrow{t}) = I_j'(t_jRw_j)(t_jRw_j).$$

Dessa maneira, $f \equiv \tilde{\gamma}$ em $\partial([1/R^2, 1]^l)$. Então pelo Teorema D.1,

$$deg(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^{2l}, (0, \cdots, 0)) = deg(f, (1/R^2, 1)^{2l}, (0, \cdots, 0)) \tag{3.48}$$

mais ainda, por (3.47), $f \equiv 0$, se, e somente se, $\overrightarrow{t} = (1/R, \cdots, 1/R)$. Além disso, $f$ é diferenciável e utilizando argumentos semelhantes ao da Seção 1.2 obtemos

$$f'(1/R, \cdots, 1/R) = \begin{cases} a_{ii} = p\displaystyle\int_{\Omega_j}\Big(|\nabla(t_jRw_j)|^p + Z(x)|(t_jRw_j)|^p\Big) \\ \qquad\quad -\displaystyle\int_{\Omega_j}\Big(f'(t_jRw_j)(t_jRw_j)^2 + f(t_jRw_j)t_jRw_j\Big), \quad \text{se} \quad i = j \\ 0 \quad \text{se} \quad i \neq j \ . \end{cases}$$

Para $i = 1, 2, \cdots, 2l$. $f'(1/R, \cdots, 1/R)$ é uma transformação linear inversível com

$$sgn(det(f'(1/R, \cdots, 1/R))) = sgn\left(\prod_{i=1}^{2l} a_{i,i}\right) > 0$$

de onde segue, pelos Teoremas D.2 e D.3

$$deg(f, (1/R^2, 1)^{2l}, (0, \cdots, 0)) = deg(f'(1/R, \cdots, 1/R), B_1(0), (0, \cdots, 0)).$$

Pela igualdade anterior e (3.48)

$$deg(\tilde{\gamma}, (1/R^2, 1)^{2l}, (0, \cdots, 0)) = 1$$

consequentemente, pela definição de grau, existe $\overrightarrow{t} \in (1/R^2, 1)^l$ satisfazendo

$$\Phi_{\lambda,j}'(\gamma(\overrightarrow{t}))(\gamma(\overrightarrow{t})) = 0, \ \forall j \in \Gamma.$$

Finalizando a demonstração. $\square$

Agora defina

$$b_{\lambda,\Gamma} = \inf_{\gamma \in \Gamma_*} \max_{\overrightarrow{s} \in [1/R^2, 1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{s})).$$

Note que $b_{\lambda,\Gamma}$ está bem definido. De fato, dado $\gamma \in \Gamma_*$, $\Phi_\lambda(\gamma)$ é uma função contínua em

$[1/R^2, 1]^l$, pelo Teorema de Weierstrass, existe

$$\max_{\overrightarrow{s} \in [1/R^2,1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{s})).$$

Por outro lado, pelo Lema 3.6, para este $\gamma$, existe $\overrightarrow{t} \in [1/R^2, 1]^l$, tal que

$$\Phi'_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t}))(\gamma(\overrightarrow{t})) = 0, \ \forall j \in \Gamma.$$

De onde concluímos que

$$\gamma(\overrightarrow{t}) \in \mathcal{N}_{\lambda,j} = \{u \in W^{1,p}(\Omega'_j)\backslash\{0\}; \Phi'_{\lambda,j}(u)u = 0\},$$

que é a variedade de Nehari associada a $\Phi_{\lambda,j}$. Utilizando o Teorema 3.1, temos

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) &= \left(\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) - \sum_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t}))\right) + \sum_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t})) \\ &\geq \left(\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) - \sum_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t}))\right) + \sum_{j=1}^{l} \inf_{v \in \mathcal{N}_{\lambda,j}} \Phi_{\lambda,j}(v) \\ &= \left(\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) - \sum_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t}))\right) + \sum_{j=1}^{l} c_{\lambda,j}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) - \sum_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t})) \geq 0.$$

Com efeito, de $(g3)^*$

$$G(x,\xi) \leq \frac{v_0}{p}|\xi|^p, \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega'_\Gamma.$$

Assim, pelo Lema 1.2

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) - \sum_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda,j}(\gamma(\overrightarrow{t})) &= \frac{1}{p}\|u\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} G(x,u) \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} - \frac{v_0}{p}|u|^p_{p,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} \\ &\geq \frac{\delta}{p}\|u\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) \geq \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) \geq \sum_{j=1}^{l} c_{\lambda,j} = c_{\lambda,\Gamma} > 0, \forall \gamma \in \Gamma_*, \tag{3.49}$$

mostrando que

$$b_{\lambda,\Gamma} = \inf_{\gamma\in\Gamma_*} \max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t}))$$

está bem definido.

**Afirmação 3.14.** *Sejam* $\lambda \geq 1, \gamma \in \Gamma_*$ *e* $\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2,1]^l)$. *Então*

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) = \sum_{j=1}^{l} I_j(t_j R w_j). \tag{3.50}$$

De fato, como $\gamma \in \Gamma_*$ e $\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2,1]^l)$, então

$$\gamma(\overrightarrow{t}) = \gamma_0(\overrightarrow{t}) = \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j,$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) &= \Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{t})) \\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left[ \left|\nabla\Big(\sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j\Big)\right|^p + (\lambda V(x) + Z(x))\left|\sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j\right|^p \right] \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} G\Big(x, \sum_{j=1}^{l} t_j R\hat{w}_j\Big).
\end{aligned}$$

Note que $\hat{w}_j = 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega_\Gamma} \left[ \left|\nabla\Big(\sum_{j=1}^{l} t_j R w_j\Big)\right|^p + (\lambda V(x) + Z(x))\left|\sum_{j=1}^{l} t_j R w_j\right|^p \right] \\
&- \int_{\Omega_\Gamma} G\Big(x, \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j\Big) \\
&= \frac{1}{p}\int_{\bigcup_{i\in\Gamma}\Omega_i} \left[ \left|\nabla\Big(\sum_{j=1}^{l} t_j R w_j\Big)\right|^p + (\lambda V(x) + Z(x))\left|\sum_{j=1}^{l} t_j R w_j\right|^p \right] \\
&- \int_{\bigcup_{i\in\Gamma}\Omega_i} G\Big(x, \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j\Big),
\end{aligned}$$

por (2.3), a união $\Omega_\Gamma = \bigcup_{j\in\Gamma}\Omega_j$ é disjunta, desse modo

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) &= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{l}\int_{\Omega_j}\left[\Big|\nabla\Big(\sum_{j=1}^{l}t_jRw_j\Big)\Big|^p + (\lambda V(x)+Z(x))\Big|\sum_{j=1}^{l}t_jRw_j\Big|^p\right] \\ &- \sum_{j=1}^{l}\int_{\Omega_j}G\Big(x,\sum_{j=1}^{l}t_jRw_j\Big)\end{aligned}$$

por fim, por $(H_1)$, $V(x)=0, \forall x\in\Omega$. Assim, concluímos que (3.50) ocorre.

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) &= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{l}\int_{\Omega_j}\big(|\nabla(t_jRw_j)|^p + Z(x)|(t_jRw_j)|^p\big) \\ &\quad -\sum_{j=1}^{l}\int_{\Omega_j}F(t_jRw_j)t_jRw_j \\ &= \sum_{j=1}^{l}I_j(t_jRw_j).\end{aligned}$$

Nossa intenção agora é mostrar que $b_{\lambda,\Gamma}$ é um valor crítico para $\Phi_\lambda$. Para isso, mostraremos alguns lemas técnicos. O próximo resultado relaciona $b_{\lambda,\Gamma}$ com os níveis minimax associados aos funcionais $\Phi_{\lambda,j}$ e $I_j$.

**Proposição 3.5.** *Se*

$$c_{\lambda,\Gamma} = \sum_{j=1}^{l}c_{\lambda,j} \quad e \quad c_\Gamma = \sum_{j=1}^{l}c_j,$$

*então*

*(a)* $c_{\lambda,\Gamma}\le b_{\lambda,\Gamma}\le c_\Gamma, \forall\lambda\ge 1$;

*(b)* $b_{\lambda,\Gamma}\to c_\Gamma$, *quando* $\lambda\to\infty$;

*(c)* $\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) < c_\Gamma, \forall\lambda\ge 1, \gamma\in\Gamma_*$ *e* $\overrightarrow{t}\in\partial([1/R^2,1]^l)$.

*Demonstração.* $(a)$ Fixemos $\lambda\ge 1$. Para a desigualdade $b_{\lambda,\Gamma}\le c_\Gamma$ tomando $\gamma\in\Gamma_*$ e utilizando a Afirmação 3.14 obtemos

$$\begin{aligned}b_{\lambda,\Gamma} &= \inf_{\gamma\in\Gamma_*}\max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l}\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) \\ &\le \max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l}\Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{t})) \\ &= \max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l}\sum_{j=1}^{l}I_j(t_jRw_j) \\ &= c_\Gamma.\end{aligned}$$

A desigualdade $c_{\lambda,\Gamma} \leq b_{\lambda,\Gamma}$ foi mostrada em (3.49).

($b$) É consequência do item anterior, pois já sabemos que $c_{\lambda,j} \to c_j$ quando $\lambda \to \infty$.

($c$) Fixemos $\lambda \geq 1$, $\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$ e $\gamma \in \Gamma_*$ de maneira arbitrária. Pela definição de $\Gamma_*$

$$\gamma(\overrightarrow{t}) = \gamma_0(\overrightarrow{t}) = \sum_{j=1}^{l} t_j R w_j.$$

Consequentemente, da Afirmação 3.14,

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) = \sum_{j=1}^{l} I_j(t_j R w_j).$$

Como $\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$, devemos ter algum $t_j \in \{1/R^2, 1\}$ onde $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$. Pela forma que $R > 1$ foi fixado obtemos

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) = \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j=\frac{1}{R^2}}} I_j(t_j R w_j) + \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j=1}} I_j(t_j R w_j) + \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j\neq\frac{1}{R^2} \text{ e } t_j\neq 1}} I_j(t_j R w_j).$$

Logo,

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) \leq \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j=\frac{1}{R^2}}} I_j\left(\frac{1}{R} w_j\right) + \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j=1}} I_j(R w_j) + \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j\neq\frac{1}{R^2} \text{ e } t_j\neq 1}} \max_{t_j\in[1/R^2,1]} I_j(t_j R w_j).$$

Por (3.43) e (3.44) obtemos

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) \leq \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j=\frac{1}{R^2}}} c_j + \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j=1}} c_j + \sum_{\substack{j\in\{1,2,\cdots,l\} \\ t_j\neq\frac{1}{R^2} \text{ e } t_j\neq 1}} c_j,$$

isto é,

$$\Phi_\lambda(\gamma(\overrightarrow{t})) \leq c_\Gamma.$$

□

Agora, utilizando o Lema da Deformação (ver Apêndice B, Lema B.1), mostraremos que $b_{\lambda,\Gamma}$ é um valor crítico para $\Phi_\lambda$.

**Proposição 3.6.** *$b_{\lambda,\Gamma}$ é um valor crítico de $\Phi_\lambda$, para $\lambda$ suficientemente grande.*

*Demonstração.* Faremos esta demonstração por absurdo. Suponha que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $b_{\lambda_0,\Gamma}$ não seja valor crítico de $\Phi_{\lambda_0}$. Neste caso é preciso mostrar a existência de $\lambda_1 > \lambda_0$ para concluir um absurdo. Recorde que pelo item ($c$) da Proposição 3.5, para $\lambda \geq 1$ e

$\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2, 1]^l)$ temos

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{t})) < c_\Gamma.$$

Desse modo, é possível definir o seguinte número real

$$L = \max_{\overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2,1]^l)} \Phi_{\lambda_0}(\gamma_0(\overrightarrow{t})),$$

consequentemente $L < c_\Gamma$. Sabemos do item $(b)$ da Proposição 3.5 que $b_{\lambda,\Gamma} \to c_\Gamma$, quando $\lambda \to \infty$, então, pela definição de limite, existe $\lambda_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_1$, $L < b_{\lambda,\Gamma}$. Desse modo, se $\lambda_0 \geq \lambda_1$, existe $\tau = \tau(\lambda_0) > 0$ suficiente pequeno de maneira que

$$L < b_{\lambda_0,\Gamma} - 2\tau. \tag{3.51}$$

Assim, pelo Lema da Deformação, existe $\eta \in C([0,1] \times E_\lambda, E_\lambda)$ tal que

$$\eta(\Phi_{\lambda_0}^{b_{\lambda_0,\Gamma}+\tau}) \subset \Phi_{\lambda_0}^{b_{\lambda_0,\Gamma}+\tau} \text{e} \quad \eta(1,u) = u \quad \text{se} \quad \Phi_{\lambda_0}(u) \notin ([b_{\lambda_0,\Gamma} - 2\tau, b_{\lambda_0,\Gamma} + 2\tau]),$$

onde, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Phi_\lambda^\alpha = \{u \in E_\lambda; \Phi_\lambda(u) \leq \alpha\}$. Desse modo, de (3.51), obtemos

$$\Phi_{\lambda_0}(\gamma_0(t)) < b_{\lambda_0,\Gamma} - 2\tau, \forall t \in \partial([1/R^2, 1]^l) \quad \text{e} \quad \eta(1, \gamma_0(t)) = \gamma_0(t), \forall t \in \partial([1/R^2, 1]^l).$$

Por outro lado, pela definição de $b_{\lambda_0,\Gamma}$, existe $g \in \Gamma_*$ tal que

$$\max_{\overrightarrow{t} \in [1/R^2,1]^l} \Phi_{\lambda_0}(g(\overrightarrow{t})) < b_{\lambda_0,\Gamma} - \tau. \tag{3.52}$$

Definindo a aplicação contínua

$$\begin{aligned} h : [1/R^2, 1]^l &\to E_\lambda \\ \overrightarrow{t} &\mapsto \eta(1, g(\overrightarrow{t})), \end{aligned}$$

vemos que $h \in \Gamma_*$, pois já é contínua por construção e

$$h(t) = \eta(1, g(\overrightarrow{t})) = g(\overrightarrow{t}) = \gamma_0(t), \forall \overrightarrow{t} \in \partial([1/R^2, 1])^l.$$

Por 3.52, temos

$$\Phi_{\lambda_0}(h(\overrightarrow{t})) \leq b_{\lambda_0,\Gamma} - \tau, \ \forall \overrightarrow{t} \in [1/R^2, 1]^l.$$

Assim,

$$\max_{\overrightarrow{t} \in [1/R^2,1]^l} \Phi_{\lambda_0}(h(\overrightarrow{t})) \leq b_{\lambda_0,\Gamma} - \tau.$$

Pela definição de $b_{\lambda_0,\Gamma}$ obtemos

$$b_{\lambda_0,\Gamma} = \inf_{\gamma\in\Gamma_*} \max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l} \Phi_{\lambda_0}(h(\overrightarrow{t})) \leq \max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l} \Phi_{\lambda_0}(h(\overrightarrow{t})) \leq b_{\lambda_0,\Gamma} - \tau.$$

o que é um absurdo. Note que o absurdo ocorreu pois supomos que $\lambda_0 \geq \lambda_1$, portanto, $\lambda_0 < \lambda_1$, mostrando que o teorema é válido. □

## 3.5 Prova do Teorema Principal

Com o objetivo de demonstrar principal teorema desta dissertação, encontraremos soluções não-negativas $u_\lambda$, para valores grandes de $\lambda$, as quais convergem em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para uma função que é uma solução de energia mínima do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x)|u|^{p-2}u = f(u) \text{ em } \Omega_j, \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega_j \end{cases} \tag{$P_j$}$$

em cada $\Omega_j, j \in \Gamma$, e para 0 em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma$, quando $\lambda \to \infty$. Para este fim, mostraremos duas proposições que em conjunto com as Proposições 3.1 e 3.2 implicam o Teorema 0.1. A partir de agora, denotemos por

$$M = 1 + \sum_{j=1}^{k} \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)^{-1} c_j}, \quad \text{e} \quad B_{M+1}(0) = \{u \in E_\lambda; \|u\|_\lambda \leq M+1\},$$

e para valores pequenos de $\mu > 0$ também consideraremos

$$A_\mu^\lambda = \{u \in B_{M+1(0)}; \|u\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\backslash\Omega'_\Gamma} \leq \mu, |\Phi_{\lambda,j}(u) - c_j| \leq \mu, \quad \forall j \in \Gamma\}.$$

Usaremos também a notação

$$\Phi_\lambda^{c_\Gamma} = \{u \in E_\lambda; \Phi_\lambda(u) \leq c_\Gamma\}.$$

Observamos que

$$w = \sum_{j=1}^{l} w_j \ \in A_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma}.$$

Mostrando que $A_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma} \neq \emptyset$. Vamos fixar $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \mu < \frac{1}{4}\min\{c_j; j \in \Gamma\}. \tag{3.53}$$

O próximo resultado mostra uma estimativa uniforme $\|\Phi'_\lambda(u)\|$ na região $A_{2\mu}^\lambda \cap A_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma}$.

**Proposição 3.7.** *Seja $\mu > 0$ satisfazendo* (3.53). *Então, existem $\Lambda_* \geq 1$ e $\sigma_0 > 0$*

*independentes de $\lambda$, tais que*

$$\|\Phi'_\lambda(u)\| \geq \sigma_0 \textit{ para } \lambda \geq \Lambda_* \textit{ e } u \in (A^\lambda_{2\mu}\backslash A^\lambda_\mu) \cap \Phi^{c_\Gamma}_\lambda.$$

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que existam $\lambda_n \to \infty$ e $u_n \in (A^{\lambda_n}_{2\mu}\backslash A^{\lambda_n}_\mu) \cap \Phi^{c_\Gamma}_{\lambda_n}$ tais que

$$\|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\| \to 0. \tag{3.54}$$

Como $u_n \in \Phi^{c_\Gamma}_{\lambda_n}$, $\Phi_{\lambda_n}(u_n) \leq c_\Gamma$. De (3.54), $\Phi'_{\lambda_n}(u_n) = o_n(1)$, assim, concluímos que $(u_n)$ é $(PS)_\infty$. Logo, por (3.1), a sequência $(\|u_n\|_{\lambda_n})$ é limitada. Por outro lado, $(\Phi_{\lambda_n}(u_n))$ também é limitada, pois, como $u_n \in A^{\lambda_n}_{2\mu}$

$$c_j - 2\mu < \Phi_{\lambda_n}(u_n) < c_j + 2\mu, \forall j \in \Gamma. \tag{3.55}$$

Escolhendo $M = \max\limits_{j\in\Gamma}\{c_j + 2\mu\}$ temos que $|\Phi_{\lambda_n}(u_n)| < M$. Portanto, pelo Teorema Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência se necessário, podemos admitir que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \to c, \tag{3.56}$$

$c \in (-\infty, c_\Gamma]$ devido $u_n \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda$. De (3.54) e (3.56), concluímos que $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_\infty$. Desse modo, da Proposição 3.1, a menos de uma subsequência, existe $u \geq 0$, onde $u \in W^{1,p}_0(\Omega_\Gamma)$ de maneira que $u_{|\Omega_j}$, $j \in \Gamma$, é uma solução para $(P_j)$,

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^N\backslash\Omega_j} \to 0 \text{ e } \Phi_{\lambda_n, j}(u_n) \to I_j(u). \tag{3.57}$$

Observe que apenas um dos seguintes casos ocorre:

$(i)$ $u_{|\Omega_j} \neq 0$, para todo $j \in \Gamma$, ou
$(ii)$ $u_{|\Omega_{j_0}} = 0$, para algum $j_0 \in \Gamma$.

Caso $(i)$: De fato, pelo Teorema 3.1,

$$I_j(u_{|\Omega_i}) \geq c_j = \inf_{v\in\mathcal{N}_j} I_j(v), \ \forall j \in \Gamma.$$

Desse modo,

$$c_\Gamma = \sum_{i=1}^{l} c_i \leq \sum_{i=1}^{l} I_i(u_{|\Omega_i}) = \Phi_\lambda(u_{|\Omega_\Gamma}) \leq c_\Gamma.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{l} c_i = \sum_{i=1}^{l} I_i(u_{|\Omega_i}).$$

Daí obtemos que

$$c_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l} c_i = \sum_{i=1}^{l} I_i(u_{|\Omega_i}) \geq I_j(u_{|\Omega_j}) + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{l} c_i.$$

Portanto,

$$I_j(u_{|\Omega_j}) = c_j,\ \forall j \in \Gamma.$$

Então de (3.57) e (3.76),

$$\|u_n\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Gamma} \leq \mu \ \text{ e } \ |\Phi_{\lambda_n,j}(u_n) - c_j| \leq \mu,\ \forall j \in \Gamma,$$

para $n$ suficientemente grande. Logo, $u_n \in A_\mu^{\lambda_n}$, o que é uma contradição.

Se $(ii)$, então, de (3.57),

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |\Phi_{\lambda_n,j_0}(u_n) - c_{j_0}| &= |I_{j_0}(u|_{\Omega_{j_0}}) - c_{j_0}| \\ &= |0 - c_{j_0}| = c_{j_0} > 4\mu, \end{aligned} \tag{3.58}$$

o que é uma contradição com o fato de que $u_n \in A_{2\mu}^{\lambda_n}$. □

**Proposição 3.8.** *Sejam $\mu > 0$ satisfazendo (3.53) e $\Lambda_* \geq 1$ dado na Proposição 3.7. Então, para $\lambda \geq \Lambda_*$, existe uma solução $u_\lambda$ de $(A_\lambda)$ tal que $u_\lambda \in A_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma}$.*

*Demonstração.* Seja $\lambda \geq \Lambda_*$. Suponha, por absurdo, que não existam pontos críticos de $\Phi_\lambda$ em $A_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma}$. Como o funcional $\Phi_\lambda$ verifica a condição $(PS)$, existe uma constante $d_\lambda > 0$ tal que

$$\|\Phi_\lambda'(u)\| \geq d_\lambda,\ \text{para quaquer}\ \ u \in (A_{2\mu}^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma}).$$

Da Proposição 3.7 deveríamos ter

$$\|\Phi_\lambda'(u)\| \geq \sigma_0,\ \text{para qualquer}\ u \in (A_{2\mu}^\lambda \setminus A_\mu^\lambda) \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma},$$

onde $\sigma_0$ não depende de $\lambda$. Considere $\Psi : E_\lambda \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando

$$\Psi(u) = 1,\ \text{para}\ u \in A_{\frac{2}{3}\mu}^\lambda,\ \Psi(u) = 0,\ \text{para}\ u \notin A_{2\mu}^\lambda \text{ e } 0 \leq \Psi(u) \leq 1,\ \forall u \in E_\lambda.$$

E seja $H : \Phi_\lambda^{c_\Gamma} \to E_\lambda$ definida por

$$H(u) = \begin{cases} -\Psi(u)\|Y(u)\|_\lambda^{-1} Y(u), & \textit{para} \quad u \in A_{2\mu}^\lambda \\ 0, & \textit{para} \quad u \notin A_{2\mu}^\lambda, \end{cases}$$

onde $Y : X\setminus\{0\} \to X$ é um campo de vetores pseudo-gradiente para $\Phi_\lambda$ sobre o conjunto $X = \{u \in E_\lambda; \Phi_\lambda'(u) \neq 0\}$, ou seja, é um campo vetorial contínuo, localmente Lipschitz tal que para todo $u \in E_\lambda$ verifica

$$\|Y(u)\|_\lambda \leq 2\|\Phi'_\lambda(u)\|_* \quad \text{e} \quad \Phi'_\lambda(u)Y(u) \geq |\Phi'_\lambda(u)u|^2. \tag{3.59}$$

Observe que $H$ está bem definida, uma vez que $\Phi'_\lambda(u) \neq 0$, para $u \in A^\lambda_{2\mu} \cap \Phi^{c_\Gamma}_\lambda$. Além disso, para $\lambda \geq \Lambda_*$ e $u \in A^\lambda_{2\mu} \cap \Phi^{c_\Gamma}_\lambda$,

$$\|H(u)\|_\lambda = \| - \Psi(u)\|Y(u)\|^{-1}_\lambda Y(u)\|_\lambda \leq \frac{\|Y(u)\|_\lambda}{\|Y(u)\|_\lambda} = 1. \tag{3.60}$$

Se $u \notin A^\lambda_{2\mu}$, $H(u) = 0$. Assim, a desigualdade

$$\|H(u)\|_\lambda \leq 1, \ \forall \lambda \geq \Lambda_* \text{ e } u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda, \tag{3.61}$$

é verdadeira e garante a existência da função $\eta : [0, \infty) \times \Phi^{c_\Gamma}_\lambda \to \Phi^{c_\Gamma}_\lambda$ definida por

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = H(\eta), \\ \eta(0, u) = u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda. \end{cases} \tag{3.62}$$

Note que esta aplicação está bem definida pelo Teorema da Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, já que $H$ é uma função localmente Lipschitziana. Além disso, $\eta$ possui as seguintes propriedades:

$$\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(\eta(t, u)) \leq 0, \forall t \geq 0, \forall u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda \tag{3.63}$$

$$\left\|\frac{d\eta}{dt}\right\|_\lambda = \|H(\eta)\|_\lambda \leq 1, \forall t \geq 0, \forall u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda \tag{3.64}$$

e

$$\eta(t, u) = u, \forall t \geq 0, \forall u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda \backslash A^\lambda_{2\mu} \tag{3.65}$$

De fato, para mostrar (3.63), fixemos $t \geq 0$. Se $\eta(t, u) \in A^\lambda_{2\mu}$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_\lambda(\eta(t, u)) &= \Phi'_\lambda(\eta(t, u))\frac{d\eta}{dt} \\ &= \Phi'_\lambda(\eta(t, u))H(\eta) \\ &- \frac{\Psi(\eta(t, u))}{\|Y(\eta(t, u))\|}\Phi'_\lambda(\eta(t, u))Y(\eta(t, u)). \end{aligned}$$

Por (3.59), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(\eta(t,u)) &\leq -\frac{\Psi(\eta(t,u))}{\|Y(\eta(t,u))\|}\|\Phi'_\lambda(\eta(t,u))\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}\Psi(\eta(t,u))\|\Phi'_\lambda(\eta(t,u))\| \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Se $\eta(t,u) \notin A^\lambda_{2\mu}$, então $H(\eta) = 0$. Desse modo,

$$\frac{d}{dt}\Phi_\lambda(\eta(t,u)) = \Phi'_\lambda(\eta(t,u))\frac{d\eta}{dt} = \Phi'_\lambda(\eta(t,u))H(\eta) = 0.$$

Mostrando que (3.63) ocorre. (3.64) segue de (3.62) e (3.61). Para mostrar (3.65), fixemos $u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda$. Considere a função $\tilde{\eta} : [0,\infty) \to \Phi^{c_\Gamma}_\lambda$ definida por

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t,u).$$

Por (3.62),

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = H(\eta) = 0, \quad \forall u \notin A^\lambda_{2\mu},$$

Logo,

$$\eta(t,u) = u,\ \forall t \geq 0, u \in \Phi^{c_\Gamma}_\lambda \backslash A^\lambda_{2\mu}. \tag{3.66}$$

Estudamos agora dois caminhos importantes para o que segue.

- O caminho $t \mapsto \eta(t,\gamma_0(\overrightarrow{s}))$, onde $\overrightarrow{s} = (s_1,\cdots,s_l) \in [1/R^2,1]^l$ .

Da definição de $\gamma_0$ combinada com a condição sobre $\mu$, obtemos

$$\gamma_0(\overrightarrow{s}) \notin A^\lambda_{2\mu},\ \forall \overrightarrow{s} \in \partial([1/R^2,1]^l),$$

e segue que

$$\eta(t,\gamma_0(\overrightarrow{s})) = \gamma_0(\overrightarrow{s}), \forall \overrightarrow{s} \in \partial([1/R^2,1]^l).$$

Portanto, $\eta(t,\gamma_0(\overrightarrow{s})) \in \Gamma_*$, para cada $t \geq 0$.

- O caminho $\overrightarrow{s} \mapsto \gamma_0(\overrightarrow{s})$, onde $\overrightarrow{s} = (s_1,\cdots,s_l) \in [1/R^2,l]^l$.

Observamos que

$$supp(\gamma_0(\overrightarrow{s})) \subset \overline{\Omega}_\Gamma.$$

De fato, pela forma que $\gamma_0$ está definida, temos que $\gamma_0(\overrightarrow{s}) \in W^{1,p}_0(\Omega_\Gamma)$. Seja $(\theta_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos de $\theta_i$ de $\Omega_\Gamma$. Então, pela definição de suporte,

$$supp(\gamma_0(\overrightarrow{s})) = (\Omega_\Gamma \backslash \Theta) \subset \Omega_\Gamma \subset \overline{\Omega}, \text{ onde } \Theta = \bigcup_{i \in I} \theta_i$$

é o conjunto onde $\gamma_0(\overrightarrow{s}) = 0$ quase sempre. Observe também que

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{s})) \text{ independente de } \lambda \geq 1, \text{ pois } \Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{s})) = \sum_{j=1}^{l} I_j(\gamma_0(\overrightarrow{s})), \tag{3.67}$$

para todo $\overrightarrow{s} \in [1/R^2, 1]^l$. Além disso,

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{s})) < c_\Gamma, \forall \overrightarrow{s} \in [1/R^2, 1]^l,$$

e a seguinte igualdade ocorre

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(\overrightarrow{s})) = c_\Gamma \text{ se, e somente se, } s_j = \frac{1}{R}, \ \forall j \in \Gamma.$$

Portanto,

$$m_0 = \sup\{\Phi_\lambda(u); u \in \gamma_0([1/R^2, 1]^l \backslash A_\mu^\lambda)\} \tag{3.68}$$

é independente de $\lambda$, por (3.50), e $m_0 < c_\Gamma$.

**Lema 3.7.** *Existe $K_* > 0$ tal que*

$$|\Phi_{\lambda,j}(u) - \Phi_{\lambda,j}(v)| \leq K_* \|u - v\|_{\lambda,\Omega'_j} \ \forall u, v \in B_{M+1}(0) \ e \ \forall j \in \Gamma.$$

*Demonstração.* Fixados $u, v \in B_{M+1}(0)$, considere a função $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha(t) = \Phi_{\lambda,j}(tu + (1-t)v).$$

Desse modo,

$$\alpha(1) = \Phi_{\lambda,j}(u), \quad \alpha(0) = \Phi_{\lambda,j}(v) \ \text{ e } \ \alpha'(t) = \Phi_{\lambda,j}(tu + (1-t)v)(u - v).$$

Do Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\alpha(1) - \alpha(0)}{1 - 0} = \alpha'(t_0).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|\Phi_{\lambda,j}(u) - \Phi_{\lambda,j}(v)| &= |\Phi'_{\lambda,j}(t_0u + (1-t_0)v)(u-v)| \\
&\leq \|\Phi'_{\lambda,j}(t_0u + (1-t_0)v)\|_*\|u-v\|_\lambda \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \|\Phi'_{\lambda,j}(tu + (1-t)v)\|_*\|u-v\|_\lambda,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\|\Phi_{\lambda,j}(tu + (1-t)v)\|_* = \sup_{w\in E_\lambda, \|w\|_\lambda\leq 1} |\Phi_{\lambda,j}(tu + (1-t)v)(w)|.
$$

Assim, para concluir o resultado, basta mostrar que existe $K_* > 0$ tal que

$$
|\Phi'_{\lambda,j}(tu + (1-t)v)w| \leq K_*, \quad \forall w \in E_\lambda, \|w\|_\lambda \leq 1 \ \text{ e } \ \forall u, v \in B_{M+1}(0).
$$

De fato, para facilitar a notação, considere $w_{u,v} = tu + (1-t)v$. Desse modo,

$$
\begin{aligned}
|\Phi'_{\lambda,j}(w_{u,v})w| &= \Big|\int_{\Omega'_j} |\nabla w_{u,v}|^{p-2}\nabla w_{u,v}\nabla w + \int_{\Omega'_j} (\lambda V(x) + Z(x))|w_{u,v}|^{p-2}w_{u,v}w \\
&- \int_{\Omega'_j} f(w_{u,v})w|. \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade triangular, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\Phi'_{\lambda,j}(w_{u,v})w| &\leq \Big|\int_{\Omega'_j} |\nabla w_{u,v}|^{p-2}\nabla w_{u,v}\nabla w\Big| + \Big|\int_{\Omega'_j} (\lambda V(x) + Z(x))w_{u,v}|^{p-2}w_{u,v}w\Big| \\
&+ \Big|\int_{\Omega'_j} f(w_{u,v})w\Big| \\
&\leq \int_{\Omega'_j} |\nabla w_{u,v}|^{p-1}|\nabla w| + \int_{\Omega'_j} (\lambda V(x) + Z(x))|w_{u,v}|^{p-1}\|w| \\
&+ \int_{\Omega'_j} |f(w_{u,v})\|w|.
\end{aligned}
$$

Desde que $|\nabla w_{u,v}|^{p-1} \in L^p(\Omega'_j)$ e $|\nabla w| \in L^p(\Omega'_j)$, utilizando a Desigualdade de Hölder obtemos $|\nabla w_{u,v}|^{p-1}|\nabla w| \in L^1(\Omega'_j)$. Além disso,

$$
\int_{\Omega'_j} (\lambda V(x) + Z(x))|w_{u,v}|^{p-1}\|w| = \int_{\Omega'_j} |\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|w_{u,v}|^{p-1}|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|w|.
$$

Como

$$
|\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{p-1}{p}}|w_{u,v}|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega'_j) \ \text{ e } \ |\lambda V(x) + Z(x)|^{\frac{1}{p}}|w| \in L^p(\Omega'_j),
$$

obtemos pela Desigualdade de Hölder

$$
(\lambda V(x) + Z(x))|w_{u,v}|^{p-1}\|w| \in L^1(\Omega'_j).
$$

Restando mostrar que

$$\int_{\Omega'_j} |f(w_{u,v})||w| < \infty. \tag{3.70}$$

Pelo Lema 1.3,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'_j} |f(tu+(1-t)v||w| &\leq \int_{\Omega'_j} |w|(\epsilon|tu+(1-t)v|^{p-1} + C_\epsilon|tu+(1-t)v|^{q-1})\\ &\leq 2^{p-1}\epsilon\left(\int_{\Omega'_j} |w||tu|^{p-1} + \int_{\Omega'_j} |w||(1-t)v|^{p-1}\right)\\ &+ 2^{q-1}C_\epsilon\left(\int_{\Omega'_j} |w||tu|^{q-1} + \int_{\Omega'_j} |w||(1-t)v|^{q-1}\right).\end{aligned}$$

Utilizando argumentos semelhantes aos anteriores obtemos

$$\int_{\Omega'_j} |f(w_{u,v})||w| < \infty. \tag{3.71}$$

Finalizando a demonstração. □

**Lema 3.8.** *Existe $T > 0$ tal que*

$$\max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l} \Phi_\lambda(\eta(T,\gamma_0(\overrightarrow{t}))) \leq \max\left\{m_0, c_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu\right\}. \tag{3.72}$$

*Demonstração.* De fato, escrevendo $u = \gamma_0(\overrightarrow{t})$, $\overrightarrow{t} \in [1/R^2,1]^l$, se $u \notin A^\lambda_\mu$, de (3.64) e da definição de $m_0$ (3.68)

$$\Phi_\lambda(\eta(t,u)) \leq \Phi_\lambda(u) \leq m_0,\ \forall t \geq 0,$$

como $\overrightarrow{t} \in [1/R^2,1]^l$ foi tomado de maneira arbitrária temos que

$$\max_{\overrightarrow{t}\in[1/R^2,1]^l} \Phi_\lambda(\eta(t,u)) \leq m_0 \leq \max\left\{m_0, c_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu\right\}. \tag{3.73}$$

Assumindo então que $u \in A^\lambda_\mu$ e definindo

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t,u),\ \tilde{d}_\lambda = min\{d_\lambda, \sigma_0\} \text{ e } T = \frac{\sigma_0\mu}{K_*\tilde{d}_\lambda}, \tag{3.74}$$

é preciso analisar os seguintes casos:

**Caso 1**: $\tilde{\eta}(t) \in int\left(A^\lambda_{\frac{2}{3}\mu}\right)$, $\forall t \in [0,T]$.

Neste caso, temos $\Psi(\tilde{\eta}(t)) = 1$ e $\|\Phi'_\lambda(\tilde{\eta}(t))\| \geq \tilde{d}_\lambda$ para todo $t \in [0,T]$. Logo, do

Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\int_0^T \frac{d}{ds}\Phi_\lambda(\tilde{\eta}(s))ds = \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) - \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(0)) = \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) - \Phi_\lambda(u).$$

De (3.63),

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) &= \Phi_\lambda(u) + \int_0^T \frac{d}{ds}\Phi_\lambda(\tilde{\eta}(s))ds \\ &\leq c_\Gamma - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{ds}\Psi(\tilde{\eta}(s))\|\Phi'_\lambda(\tilde{\eta}(s))\|ds \\ &\leq c_\Gamma - \frac{1}{2}\int_0^T \tilde{d}_\lambda ds.\end{aligned}$$

Assim, de (3.74)

$$\Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq c_\Gamma - \frac{1}{2}\tilde{d}_\lambda T = c_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu,$$

mostrando (3.72).

**Caso 2**: $\tilde{\eta}(t_0) \in \partial\left(A^\lambda_{\frac{3}{2}\mu}\right)$, para algum $t_0 \in [0, T]$.

Pelo Teorema da Alfândega (Ver Apêndice C.5), existem $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ satisfazendo

$$\tilde{\eta}(t_1) \in \partial A^\lambda_\mu\ ,\ \tilde{\eta}(t_2) \in \partial A^\lambda_{\frac{3}{2}\mu} \text{ e } \tilde{\eta}(t_2) \in A^\lambda_{\frac{3}{2}\mu}\backslash A^\lambda_\mu,\ \forall t \in (t_1, t_2].$$

Afirmamos que

$$\|\tilde{\eta}(t_2) - \tilde{\eta}(t_1)\| \geq \frac{1}{2K_*}\mu. \tag{3.75}$$

Definindo $w_1 = \tilde{\eta}(t_1)$ e $w_2 = \tilde{\eta}(t_2)$, obtemos

$$\|w_2\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Gamma}(w_2) = \frac{3}{2}\mu, \quad |\Phi_{\lambda,j_0}(w_2) - c_{j_0}| = \frac{3}{2}\mu,$$

$$\|w_1\|_{\lambda,\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\Gamma}(w_2) = \mu \ \text{ e } \ |\Phi_{\lambda,j_0}(w_1) - c_{j_0}| = \mu,$$

para algum $j_0 \in \Gamma$. Pelo Lema 3.7 e pela desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_2 - w_1\| &\geq \frac{1}{K_*}|\Phi_{\lambda,j_0}(w_2) - \Phi_{\lambda,j_0}(w_1)| \\
&= \frac{1}{K_*}|(\Phi_{\lambda,j_0}(w_2) - c_{j_0}) - (\Phi_{\lambda,j_0}(w_1) - c_{j_0})| \\
&\geq \frac{1}{K_*}(|\Phi_{\lambda,j_0}(w_2) - c_{j_0}| - |\Phi_{\lambda,j_0}(w_1) - c_{j_0}|) \\
&\geq \frac{1}{K_*}\left(\frac{3}{2}\mu - \mu\right) \\
&\geq \frac{1}{2K_*}\mu.
\end{aligned}$$

Então, de (3.75), (3.64) e pelo Teorema do Valor Médio, $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2K_*}\mu$ e, desta maneira,

$$\Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq \Phi_\lambda(u) - \int_0^T \Psi(\tilde{\eta}(s))\|\Phi'_\lambda(\tilde{\eta}(s))\|ds,$$

o que implica

$$\Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) \leq c_\Gamma - \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0 ds = c_\Gamma - \sigma_0(t_1 - t_2) \leq c_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\sigma\mu,$$

mostrando (3.72).

Fixando $\tilde{\eta}(\overrightarrow{t}) = \eta(T, \gamma_0(\overrightarrow{t}))$, temos que $\tilde{\eta} \in \Gamma_*$ e, portanto,

$$b_{\lambda,\Gamma} \leq \max_{\overrightarrow{t} \in [1/R^2]^l, 1} \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(\overrightarrow{t}) \leq \max\{m_0, c_\Gamma - \frac{1}{2K_*}\sigma_0\mu\} < c_\Gamma,$$

contradizendo o fato de que $b_{\lambda,\Gamma} \to C_\Gamma$, quando $\lambda \to \infty$. □

Agora, demonstraremos o principal resultado desta dissertação.

**Teorema 0.1.** *Supondo que $(H1) - (H2), (f_1) - (f_4)$ ocorrem. Então, para qualquer subconjunto não-vazio $\Gamma$ de $\{1, 2, \cdots, k\}$, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para $\lambda \geq \lambda^*$, $(P_\lambda)$ possui uma família de soluções verificando: Para qualquer sequência $\lambda_n \to \infty$, é possível obter uma subsequência $\lambda_{n_i}$ tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para uma função $u$ que satisfaz $u(x) = 0$ para todo $x \notin \Omega_\Gamma$ e a restrição de $u|_{\Omega_j}$ é uma solução de energia mínima de*

$$-\Delta_p u + Z(x)u^{p-1} = f(u), u > 0 \text{ em } \Omega_j,\ u|_{\partial\Omega_j} = 0 \text{ para } j \in \Gamma \text{ onde } \Omega_\Gamma = \bigcup_{j\in\Gamma} \Omega_j.$$

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 3.8 para $\mu$ satisfazendo (3.53) e $\Lambda_* \geq 1$, existe uma solução $u_\lambda \in A_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_\Gamma}$, qualquer que seja $\lambda \geq \Lambda_*$.

**Afirmação 3.15.** *Existem $\lambda_0 \geq \Lambda_*$ e $\mu > 0$ suficientemente pequeno, tais que $u_\lambda$ é uma* *solução para* $(P_\lambda)$ *se* $\lambda \geq \Lambda_0$ *e* $\mu \in (0, \mu_0)$.

De fato, admita por contradição que existem $\lambda_n \to \infty$ tais que $(u_{\lambda_n})$ não é uma solução para $(P_{\lambda_n})$. Da Proposição 3.8, a sequência $(u_{\lambda_n})$ verifica

$(i)$ $\Phi'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, pois $(u_{\lambda_n})$ é solução de $(A_{\lambda_n})$.
$(ii)$ $\Phi_{\lambda_n, j}(u_{\lambda_n}) \to c_j, \forall j \in \Gamma$, pois $u_{\lambda_n} \in \Phi_\lambda^{c_\Gamma}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De $(i)$ e $(ii)$ concluímos que $(u_{\lambda_n})$ é uma sequência $(PS)_\infty$. Assim, do item $(b)$ da Proposição 3.1, temos

$$\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma} \to 0.$$

Consequentemente,

$$u_{\lambda_n} \to 0 \ \text{ em } \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\Gamma) \ \text{ quando } \ \lambda_n \to \infty.$$

Desse modo, pela Proposição 3.2, $u_{\lambda_n}$ é uma solução para $(P_{\lambda_n})$, para valores grandes de $n$, o que é uma contradição. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Agora, nosso objetivo é demonstrar a segunda parte do Teorema. Sabemos de $(i)$ e de $(ii)$ que $(u_{\lambda_n})$ é uma sequência $(PS)_\infty$. Assim, utilizando a Proposição 3.1, $u_{\lambda_n}$ converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para uma função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, que satisfaz $u = 0$ fora de $\Omega_\Gamma$ e $u_{|\Omega_j}$, $j \in \Gamma$, é uma solução não-negativa para

$$\begin{cases} -\Delta_p u + Z(x) u^{p-1} = f(u) & em \quad \Omega_j, \\ \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega_j) \quad , u \geq 0, & \text{em } \Omega_j. \end{cases} \tag{$P_j$}$$

Resta mostrar que $u_{|\Omega_j}$ é de energia mínima. De fato, pelo Teorema 3.1,

$$I_j(u_{|\Omega_i}) \geq c_j = \inf_{v \in \mathcal{N}_j} I_j(v), \ \forall j \in \Gamma.$$

Desse modo,

$$c_\Gamma = \sum_{i=1}^{l} c_i \leq \sum_{i=1}^{l} I_i(u_{|\Omega_i}) = \Phi_\lambda(u_{|\Omega_\Gamma}) \leq c_\Gamma.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{l} c_i = \sum_{i=1}^{l} I_i(u_{|\Omega_i}).$$

Daí obtemos que

$$c_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{l} c_i = \sum_{i=1}^{l} I_i(u_{|\Omega_i}) \geq I_j(u_{|\Omega_j}) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{l} c_i.$$

Portanto,

$$I_j(u_{|\Omega_j}) = c_j,\ \forall j \in \Gamma.$$

Mostrando que $u_{|\Omega_j}$ é solução de energia mínima, concluindo a demonstração. $\square$

# Referências


ALVES, C. O. Existence of multi-bump solutions for a class of quasilinear problems. *Advanced Nonlinear Studies 6*, p. 491–509, 2006.

ALVES, C. O.; DING, Y. H. Existence, multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems. *Journal of the Juliusz Schauder Center Volume 29*, p. 265–278, 2007.

ALVES, C. O.; FIGUEREDO, G. M. Multiplicity of positive solutions for a quasilinear in irn via penalization method. *Advanced Nonlinear Studies 5*, p. 531–551, 2005.

AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis, 14*, p. 349–381, 1973.

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration.* [S.l.]: John Wiley and Sons, 1966.

BARTSCH, T.; PANKOV, A.; WANG, Z. Q. Nonlinear schrodinger equations with steep potencial well. *Comm. Contemp Math, 3*, p. 549–569, 2001.

BARTSCH, T.; WANG, Z. Q. Multiple positive solutions for a nonlinear schrodinger equation. *Z. angew. Math. Phys. 51*, p. 366–384, 2000.

BENEDETTO, E. d. $c^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, N 8*, p. 827–850–1306, 1983.

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* [S.l.]: Springer, 2011.

CLAPP, M.; DING, Y. H. Positive solutions of a schrodinger equations with critical non-linearity. *Z. Angew. Math. Phys. 55*, p. 592–605, 2004.

DEIMLING, K. *Nonlinear Functional Analysis.* [S.l.]: Springer, 1980.

DING, Y.; TANAKA, K. Multiplicity of positive solutions for a nonlinear schrodinger equation. *manuscripta math. 112*, p. 109–135, 2003.

EVANS, L. C. *Differential Equations.* [S.l.]: American Mathematical Society, Vol. 19.

FIGUEIREDO, D. G. de; DING, Y. H. Solutions of a nonlinear schrodinger equation, discrete contin. *Dyn. System 08*, p. 563–584, 2002.

GUI, C. Existence of multi-bumb solutions for nonlinear schrodinger equations via variational method. *Comm. P.D.E. 21*, p. 787–820, 1996.

KAVIAN, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1993.

KREYSZIG. *Introductory Funcional Analysis with Applications*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1978.

LIEBERMAN, G. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applications, Vol 12*, p. 1203–1219, 1988.

LIMA, E. L. *Curso de Análise - Vol.1*. [S.l.]: ISBM, 2007.

PINO, M. del; FELMER, P. L. Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains. *Calc. Var. PDE 4*, p. 121–137, 1996.

SÉRÉ, E. Existence of infinitely many homoclinic orbits in hamiltonian systems. *Math. Z. 209*, p. 27–42, 1992.

TOLKSDORFF, P. On the dirichlet problem for quasilinear equations. *Communications in Partial Differential Equations N 8*, p. 773–817, 1983.

TRUDINGER, N. S. On harnack type inequalities and their applications on quasilinear elliptic equations. *Communication on pure and applied Mathematics XX*, p. 721–747, 1967.

WILLEM, M. *Minimax Theorems, Progressin Nonlinear Diferential Equations and Their Applications*. [S.l.]: Birkhäuser, 1996.

YANG, J. Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents. *Nonlinear Analysis 25*, p. 1283–1306, 1995.

# APÊNDICE A – Os Espaços $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$

## A.1 O Espaço $L^p(\Omega)$

Neste apêndice, apresentaremos os espaços de Lebesgue e Sobolev com os principais resultados utilizados no decorrer do nosso trabalho. Indicamos aos leitores interessados as referências: Brezis (2011), Bartle (1966) e Kreyszig (1978).

Sejam $(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida, isto é, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto qualquer, $\mathcal{X}$ é uma $\sigma-$ álgebra em $\Omega$, ou seja, uma coleção de subconjuntos de $\Omega$ tal que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{X}$;

(b) $A \in \mathcal{X} \Rightarrow A^c \in \mathcal{X}$;

(c) Se $(A_n)$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{X}$, então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

$\mu$ é uma medida, isto é, é uma função $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty)$, satisfazendo

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, sempre que $A_n$ for uma família enumerável de $\mathcal{X}$.

Os elementos de $\mathcal{X}$ são chamados conjuntos mensuráveis.

Conjuntos $E \in \mathcal{X}$ com a propriedade $\mu(E) = 0$ são chamados conjuntos de medida nula. Diremos que uma propriedade é q.t.p (quase todo ponto) se tal propriedade vale em $\Omega$ exceto em conjuntos que possuam medida nula. Denotaremos por $L^1(\Omega)$ o conjunto das funções integráveis de $\Omega$ em $\mathbb{R}$ com respeito a medida $\mu$.

**Definição A.1.** *Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p \leq \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

*A norma usual nesse espaço será denotada por*

$$|f|_{p,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*E o espaço das funções limitadas q.t.p é definido como segue*

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R};\, f \ \textit{é mensurável e existe} \ \ C \ \textit{tal que} \ \ |f| \leq C \ \textit{q.t.p. em} \ \Omega \}.$$

*A norma usual nesse espaço será denotada por*

$$|f|_{\infty} = \inf\{ C : |f| \leq C \ \ \textit{q.t.p em} \ \ \Omega \}.$$

A seguir enunciaremos os principais resultados envolvendo o espaço $L^p(\Omega)$ utilizados neste trabalho.

**Teorema A.1.** *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.*Ver Brezis (2011). □

**Teorema A.2.** *$L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

*Demonstração.*Ver Brezis (2011). □

**Teorema A.3.** ***(Desiguladade de Young).*** *Sejam $p > 1$ e $p' > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dados $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

*Demonstração.*Ver Kreyszig (1978). □

**Teorema A.4.** ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se $1 \leq p < \infty$, $(\xi_j), (\omega_k) \in l^p$, então*

$$\left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \omega_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\omega_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.*Ver Kreyszig (1978). □

**Teorema A.5.** ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $1 < p, q < \infty$ conjugados, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sejam $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funções $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e $V \subseteq \mathbb{R}^N$ Então*

$$fg \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \left| \int_V f(x)g(x) \right| \leq \left( \int_V |f(x)|^p \right)^{1/p} \left( \int_V |g(x)|^q \right)^{1/q}.$$

*Demonstração.*Ver Bartle (1966). □

**Teorema A.6.** ***(Teorema da Convergência Dominada)*** *Seja $(f_n)$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Se*

$$f_n(x) \to f(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega$$

*e existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in N$ q.t.p em $\Omega$. Então*

$$f \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega f_n \to \int_\Omega f.$$

*Demonstração.*Ver Bartle (1966). □

**Teorema A.7.** ***(Lema de Fatou)*** *Seja $f_n : E \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas, então*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

*Demonstração.*Ver Bartle (1966). □

**Teorema A.8.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Se $(f_n)$ é uma sequência de funções convergente em $L^p(\Omega)$ com limite $f$, então existem uma subsequência $(f_{n_k})$ de $(f_n)$ e uma função $g \in L^p(\Omega)$ tais que:*

*(i)* $f_{n_k}(x) \to f(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega.$

*(ii)* $|f_{n_k}(x)| \leq g \quad q.t.p \quad em \quad \Omega, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

*Demonstração.*Ver Bartle (1966). □

**Lema A.1.** ***(Brezis-Lieb)*** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(f_n)$ uma sequência de funções limitadas de $L^p(\Omega)$ convergente q.t.p para $f$. Então $f \in L^p(\Omega)$,*

$$|f|_p^p = \lim_{n\to\infty} (|f_n|_p^p - |f - f_n|_p^p). \tag{A.1}$$

*Demonstração.*Ver Kavian (1993). □

**Proposição A.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto qualquer, $\theta \geq 1$, e $u \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq \theta$. Se existe $K > 0$, que não depende de $p$, tal que*

$$|u|_{p,\Omega} \leq K, \ \forall p \geq \theta.$$

*Então $u \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$|u|_{\infty,\Omega} \leq K,$$

*com*

$$\lim_{p\to\infty}|u|_{p,\Omega}=|u|_{\infty,\Omega}.$$

*Demonstração.* Fixemos $\epsilon>0$ e consideremos o conjunto

$$E=\{x\in\Omega;|u(x)|\geq K+\epsilon\}.$$

Mostraremos que a medida de Lebesgue de $E$ é nula. Note que a medida de $E$ é finita, de fato, suponha por absurdo que $|E|=\infty$. Desse modo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\geq\int_E|u|^p\geq(K+\epsilon)^p|E|=\infty,$$

o que é um absurdo, pois $u\in L^p(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para todo $p\geq\theta$

$$(K+\epsilon)^p|E|\leq\int_E|u|^p\leq|u|^p_{p,\Omega}\leq K^p,$$

ou seja,

$$(K+\epsilon)|E|^{\frac{1}{p}}\leq K.$$

Suponha por contradição que a medida de $E$ é positiva. Aplicando o limite $p\to\infty$ na desigualdade acima, obtemos um absurdo, portanto $|E|=0$ e daí, $|u(x)|\leq(K+\epsilon)$, q.t.p. em $\Omega$. Em particular, $|u|_{\infty,\Omega}\leq K+\epsilon$. Como $\epsilon$ foi tomado de maneira arbitrária, $|u|_{\infty,\Omega}\leq K$.

Vamos mostrar agora que

$$\lim_{p\to\infty}|u|_{p,\Omega}=|u|_{\infty,\Omega}.$$

Dado $\delta>0$, considere

$$\Omega_\delta=\{x\in\Omega;|u(x)|\geq|u|_{\infty,\Omega}-\delta\}.$$

Se $\delta(0,|u|_{\infty,\Omega})$, então $0<|\Omega_\delta|<\infty$, pelo mesmo argumento acima. Daí,

$$|u|_{p,\Omega}=\int_\Omega|u|^p\geq\int_{\Omega_\delta}|u|^p>\int_\Omega(|u|_{\infty,\Omega}-\delta)^p\geq\int_{\Omega_\delta}=(|u|_{\infty,\Omega}-\delta)|\Omega_\delta|^{\frac{1}{p}}.$$

Tomando $p\to\infty$, note que $\lim_{p\to\infty}|\Omega_\delta|^{\frac{1}{p}}=1$, obtemos

$$\liminf_{p\to\infty}|u|_{p,\Omega}\geq|u|_{\infty,\Omega}-\delta.$$

Como $\delta>0$ é arbitrário, concluímos que

$$\liminf_{p\to\infty}|u|_{p,\Omega}\geq|u|_{\infty,\Omega}. \tag{A.2}$$

Por outro lado,

$$|u|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^{p-\theta}|u|^\theta\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |u|^{p-\theta}_{\infty,\Omega}|u|^\theta\right)^{\frac{1}{p}} = |u|^{\frac{p-\theta}{p}}_{\infty,\Omega}|u|^{\frac{\theta}{p}}_{\theta,\Omega}.$$

Tomando o $p \to \infty$, temos

$$\limsup_{p\to\infty} |u|_{p,\Omega} \leq |u|_{\infty,\Omega}, \tag{A.3}$$

de (A.3) e (A.2), concluímos

$$\lim_{p\to\infty} |u|_{p,\Omega} = |u|_{\infty,\Omega}.$$

□

## A.2 O Espaço $W^{1,p}(\Omega)$

Nesta seção apresentaremos os principais resultados utilizados em nosso trabalho sobre os espaços de Sobolev. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$.

**Definição A.2.** *Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^N$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, ...g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que}$$

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi,\ \forall\phi \in C^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, 2, \cdots, N\Big\}.$$

*A norma associada a este espaço é definida por*

$$\begin{aligned} \|\ \|_p : W^{1,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p)\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

**Proposição A.2.** *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, para $1 < p < \infty$.*

*Demonstração.* Ver Brezis (2011) □

**Teorema A.9.** ***(Gagliardo–Nirenberg)*** *Seja $1 \leq p < N$. Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N),\ \text{onde},\ p^* = \frac{Np}{N-p},$$

*e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que*

$$|u|_{p^*} \leq C|\nabla u|_p,\ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

*Demonstração.*Ver Brezis (2011). □

**Teorema A.10.** ***(Rellich–Kondrachov)*** *Suponha que $\Omega$ é limitado e de classe $C^1$. Então as seguintes imersões são compactas:*

*(i)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*), \quad onde \ \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad se \ \ p < N;$

*(ii)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad se \ \ p = N;$

*(iii)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), p > N.$

*Demonstração.*Ver Brezis (2011). □

**Teorema A.11.** *Se $1 \leq p < \infty$, então as seguintes imersões são contínuas.*

*(i)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^*(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*), \quad onde \ \ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad se \ \ p < N;$

*(ii)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad se \ \ p = N;$

*(iii)* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), \quad p > N.$

*Demonstração.*Ver Brezis (2011). □

**Proposição A.3.** *Suponha que $\Omega$ seja de classe $C^1$ e $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & em \ \ \Omega \\ 0, & em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

*Demonstração.*Ver Brezis (2011). □

**Proposição A.4.** *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso,*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & se \ \ u > 0 \\ 0, & se \ \ u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & se \ \ u > 0 \\ \nabla u, & se \ \ u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u, & se \ \ u > 0 \\ 0, & se \ \ u \leq 0 \\ -\nabla u, & se \ \ u \leq 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Ver Evans (Vol. 19) $\square$

# APÊNDICE B – Teorema do Passo da Montanha

O objetivo dessa seção é apresentar o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz (1973) e Willem (1996).

**Lema B.1.** ***(Lema da Deformação)*** *Sejam* $(E, \| \ \|_E)$ *um espaço de Banach,* $c \in \mathbb{R}$ *e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Sejam também os seguintes conjuntos*

$$V = \{u \in E; I(u) = c \ e \ I'(u) = 0\}$$

*e dado* $s \in \mathbb{R}$*,*

$$I^s = \{u \in E; I(u) \leq s\}.$$

*Se* $c$ *não é valor crítico de* $I$*, então dado* $\epsilon > 0$ *existem* $\epsilon \in (0, \tilde{\epsilon})$ *e* $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ *tais que*

*(i)* $\eta(1, u) = u$*, se* $I(u) \notin ([c - \tilde{\epsilon}, c + \tilde{\epsilon}])$.

*(ii)* $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$;

*Demonstração.*Ver Willem (1996). □

**Teorema B.1.** ***(Teorema do Passo da Montanha)*** *Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *e* $I(0) = 0$*. Suponha que:*

*(H1)* *Existem* $\alpha, r > 0$ *tais que* $I(u) \geq \alpha > 0$ *para todo* $u \in X$ *com* $\|u\| = r$.

*(H2)* *Existe* $e \in X$*, com* $\|e\| > r$*, tal que* $I(e) < 0$.

*Então, para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $u_\epsilon \in X$ *tal que:*

*a)* $c - 2\epsilon \leq I(u_\epsilon) \leq c + 2\epsilon$.

*b)* $\|I'(u_\epsilon)\| < 4\epsilon$.

*onde*

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

*e*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

*Demonstração.*Inicialmente vamos mostrar que $c$ é um número real positivo. De fato, como $\gamma \in \Gamma$ temos

$$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = e \text{ e } \gamma([0,1]) \text{ é conexo.}$$

Desse modo,

$$\gamma(0) \in B_r(0), \gamma(1) \in X\backslash\overline{B_r(0)}.$$

Então, pelo Teorema da Alfândega (ver Apêndice C, Teorema C.5), existe $t_0 \in \partial(B_r(0))$ tal que $\|\gamma(t_0)\| = r$. Por $(H_1)$ e pela definição de $c$ temos

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \alpha > 0.$$

Como $\alpha$ é cota inferior do conjunto $\{\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) : \gamma \in \Gamma\}$ e o ínfimo é maior das cotas inferiores

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha.$$

Concluindo que $c$ é um número real positivo.

Agora, suponha por absurdo que existe $\epsilon_0 > 0$

$$c - 2\epsilon_0 < I(u) < c + 2\epsilon_0, \forall u \in X; \tag{B.1}$$

$$\|I'(u)\| \geq 4\epsilon_0. \tag{B.2}$$

Sem perda de generalidade podemos supor $\epsilon_0 > 0$ tal que $c - 2\epsilon_0 > 0$. Assim,

$$I(e) \leq 0 < c - 2\epsilon_0 \text{ e } I(0) = 0 < c - 2\epsilon_0. \tag{B.3}$$

Considerando (B.1) e (B.2), pelo Lema da Deformação, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

$(i)$ $\eta(1, u) = u$, se $I(u) \notin ([c - \epsilon_0, c + \epsilon_0])$.

$(ii)$ $\eta(1, I^{c+\epsilon_0}) \subset I^{c-\epsilon_0}$.

Segue da definição de $c$ que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$I(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon_0, \tag{B.4}$$

o que implica, $\gamma(t) \in I^{c+\epsilon}, \forall t \in [0,1]$. Defina $\beta : [0,1] \to X$ definida por $\beta(t) = \eta(1, \gamma(t))$, onde $\eta$ é dado pelo Lema da Deformação. Desde que $\eta \in C([0,1]\times X, X)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, segue que $\beta \in C([0,1] \times X, X)$. Como, por (B.3), $I(0), I(e) \notin [c - \epsilon_0, c + \epsilon_0]$,

$$\beta(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0, \quad \text{e} \quad \beta(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e.$$

Assim concluímos que $\beta \in \Gamma$. Por definição,

$$\beta(t) = \eta(1, \gamma(t)), \forall t \in [0,1]$$

e como $\gamma(t) \in I^{c+\epsilon}$, para todo $t \in [0,1]$, pelo Lema da Deformação

$$\beta(t) = \eta(1, \gamma(t)) \in I^{c-\epsilon_0}, \forall t \in [0,1]$$

logo

$$I(\beta(t)) < c - 2\epsilon_0, \forall t \in [0,1].$$

o que implica

$$\max_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) < c - 2\epsilon_0.$$

Portanto,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) \leq c - 2\epsilon_0,$$

o que é uma contradição. Portanto o teorema é válido. $\square$

**Observação:** Os itens $(a)$ e $(b)$ implicam que existem sequências $(PS)_c$ em $X$.

**Teorema B.2.** *Sejam $X$ um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ verificando a condição $(PS)$ com $I(0) = 0$. Suponha que*

*(H1) Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = r$.*

*(H2) Existe $e \in X$, com $\|e\| > r$, tal que $I(e) < 0$. Para*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

*Defina*

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

*Então $c \geq \alpha$ e $c$ é valor crítico de $I$.*

*Demonstração.* Considerando $\epsilon = \frac{1}{n}$ na tese do teorema anterior temos

$$c - \frac{2}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{2}{n} \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\| < \frac{4}{\epsilon}.$$

Desse modo, quando $n \to \infty$, obtemos

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Mostrando $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_c$. Como $I$ satisfaz a condição $(PS)$, existem uma subsequência $(u_{n_k})$ de $(u_n)$ e $u \in X$ tais que

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em X}.$$

Desde $I \in C^1(X, \mathbb{R})$

$$I'(u_{n_k}) \to I'(u) \quad \text{e} \quad I(u_{n_k}) \to I(u)$$

Pela unicidade do limite

$$I'(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) = c$$

mostrando que $c$ é valor crítico de $I$.

$\square$

# APÊNDICE C – Resultados Utilizados na Dissertação

## C.1 Resultados de Análise Funcional

**Teorema C.1.** *Seja $H$ um espaço de Banach reflexivo. Se $(u_n)$ é uma sequência limitada em $H$, então existem uma subsequência $(u_{n_j})$ de $(u_n)$ e $u \in H$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad em \quad H.$$

*Demonstração.* Ver Kreyszig (1978). □

**Teorema C.2.** *Sejam $E$ espaço de Banach e $F$ subespaço fechado de $E$. Se $E$ é reflexivo, então $F$ é reflexivo.*

*Demonstração.* Ver Brezis (2011) □

**Lema C.1.** *Sejam $(E_1, \| \ \|_1), (E_2, \| \ \|_2), \cdots, (E_n, \| \ \|_n)$ espaços reflexivos, então $\big(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \| \ \|_{E_1\times\cdots\times E_n}\big)$ é reflexivo, onde*

$$\|(u_1, u_2, \cdots, u_n)\|_{E_1\times\cdots\times E_n} = \|u_1\|_{E_1} + \cdots + \|u_n\|_{E_n}.$$

*Demonstração.* Ver Kreyszig (1978). □

**Teorema C.3.** *Sejam $(E, \| \ \|_1)$, $(E, \| \ \|_2)$ espaços de Banach. Suponha que as normas $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ são equivalentes. Então, $(E, \| \ \|_1)$ é reflexivo se, e somente se, $(E, \| \ \|_2)$ é reflexivo.*

*Demonstração.* Ver Kreyszig (1978). □

**Teorema C.4.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ um isomosfismo isométrico. Então $E$ é reflexivo se e somente se, $F$ é reflexivo.*

*Demonstração.* Ver Kreyszig (1978). □

## C.2 Resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$

**Teorema C.5.** ***(Teorema da Alfândega)*** *Seja $C \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto conexo e $X \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto arbitrário. Se $C$ contém pontos de $X$ e de $\mathbb{R}^N - X$, então $C$ contém algum ponto da fronteira de $X$.*

*Demonstração.*Ver Lima (2007). □

**Lema C.2.** *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n \in [0, \infty)$, $p \geq 1$, então*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leq 2^{np} \sum_{i=1}^{n} a_i^p. \tag{C.1}$$

*Demonstração.*Vamos utilizar indução sobre $n$. Se $n = 1$ segue que a desigualdade se verifica. Sabemos que para $n = 2$ a seguinte desigualdade é válida:

$$(a_1 + a_2)^p \leq 2^p (a_1^p + a_2^p). \tag{C.2}$$

Suponha que a desigualdade (C.3) seja válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Resta mostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^p \leq 2^{(n+1)p} \sum_{i=1}^{n+1} a_i^p. \tag{C.3}$$

De fato, utilizando (C.2), em seguida a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^p &\leq 2^p \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p + a_{n+1}^p\right) \\ &\leq 2^p \left(2^{np} \sum_{i=1}^{n} a_i^p + a_{n+1}^p\right) \\ &\leq 2^{(n+1)p} \sum_{i=1}^{n+1} a_i^p. \end{aligned}$$

□

**Teorema C.6.** *Seja $(u_n)$ uma sequência de números reais não-negativa. Se existir*

$$\limsup_{n \to \infty} u_n,$$

*então $(u_n)$ é limitada.*

*Demonstração.* Ver Lima (2007). □

**Teorema C.7.** ***(Teorema do Divergente)*** *Seja $\Omega$ um domínio limitado com fronteira suave do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $\eta$ um vetor unitário normal exterior à $\partial(\Omega)$. Para qualquer campo vetorial $F$ de classe $C^1(\overline{\Omega})$ vale a seguinte identidade*

$$\int_{\Omega} divF = \int_{\partial(\Omega)} F.\eta ds,$$

*onde $ds$ indica o elemento de área $(N-1)$-dimensional de $\partial(\Omega)$.*

*Demonstração.* Ver Lima (2007). □

**Teorema C.8.** ***(Teorema do Valor Médio)*** *Se $f$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $(a, b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot$$

*Demonstração.* Ver Lima (2007). □

**Teorema C.9.** ***(Teorema do Valor Intermediário)*** *Suponha que $f$ é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $y_0 \in (f(a), f(b))$, então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

*Demonstração.* Ver Lima (2007). □

**Teorema C.10.** *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y, \rangle \geq \begin{cases} C_1|x-y|^p, & se \quad p \geq 2 \\ \dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

*Demonstração.* Ver Yang (1995). □

## C.3 Desigualdade de Harnack

Esta seção foi baseada em Trudinger (1967), Lieberman (1988) e Benedetto (1983). Resaltamos que para uma melhor compreensão dos Teoremas C.11 e C.12 é preciso consultar os artigos citados em suas demonstrações.

Considere a seguinte equação quaselinear de segunda ordem

$$divA(x, u, u_x) + B(x, u, u_x) = 0. \tag{C.4}$$

Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$, $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$ vetores de $E^n$, $u_x = (u_{x_1}, ..., u_{x_1})$. Considere também $A : \Omega \times E \times E^n \to E^n$ é uma função mensurável vetorial e $B : \Omega \times E \times E^n \to E$ é uma função mensurável escalar onde $\Omega$ é um domínio em $E^n$. O div$A(x, u, u_x)$ denota o divergente de $A(x, u(x), u_x(x))$ com respeito a $x$. Considere que as funções da equação (C.4) verificam as seguintes condições, para $M < \infty$ e para todo $(x, u, \rho) \in \Omega \times (-M, M) \times E^n$,

(i) $|A(x, u, \rho)| \leq a_0|\rho|^{\alpha-1} + |a_1(x)u|^{\alpha-1} + (a_3(x))^{\alpha-1}$,

(ii) $\rho A(x, u, \rho) \geq |\rho|^\alpha - |a_2(x)u|^\alpha - (a_4(x))^\alpha$,

(iii) $|B(x, u, \rho)| \leq b_0|\rho|^\alpha + b_1(x)|\rho|^{\alpha-1} + (b_2(x))^\alpha|u|^{\alpha-1} + (b_3(x))^\alpha$,

onde $\alpha > 1, a_0, b_0$ são constantes, $a_i(x), b_i(x)$ são funções mensuráveis não-negativas que podem possivelmente depender de $M$.

**Teorema C.11.** *Seja $u$ uma solução fraca de* (C.4)*, verificando as condições* $(i) - (iii)$ *em um cubo $K = K(3\rho) \subset \Omega$ com $0 \leq u < M$ em $K$. Então*

$$\max_{K(\rho)} u(x) \leq C_* \min_{K(\rho)} u(x),$$

*onde $C_* = C_*(\alpha, n, a_0, b_0, M, \mu, \rho)$ é uma constante.*

*Demonstração.*Ver Trudinger (1967). □

**Teorema C.12.** ***(Estimativa $C^{1,\alpha}$, Tolksdorff, Lieberman).*** *Seja $\Omega$ um domínio limitado de classe $C^{2,\beta}$ para algum $\beta \in (0,1)$ e considere $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}} \leq K_1$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $K_1 > 0$. As constantes $\alpha$ e $K_1$ só dependem de $N, \Omega, p, |u|_\infty$, e $|\Delta_p u|_\infty$.*

*Demonstração.*Ver Tolksdorff (1983) Proposição 3.7, página 806 e Lieberman (1988) Teorema 1, página 1203. □

# APÊNDICE D – Alguns Resultados da Teoria do Grau Topológico

Nesta seção expomos alguns resultados usados da Teoria do Grau, os quais podem ser encontrados em Deimling (1980). Seja $E$ um espaço de Banach munido com a norma $\| \|_E$ e consideremos o seguinte conjunto:

$$\Gamma = \{(f, \Omega, y); \Omega \subset E \text{ é aberto e limitado, } f : \overline{\Omega} \to E \text{ contínua e } \ y \notin f(\partial(\Omega))\}.$$

Um **Grau Topológico** em $E$ é uma aplicação

$$deg : \Gamma \to \mathbb{Z}$$

que verifica as seguintes propriedades:

a) $deg(I, B_1(0), 0) = 1$, onde $I(x) = x$, para todo $x \in E$;

b) Se $\Omega_1, \Omega_2$ são abertos de $E$ tais que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \ \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega \ \text{ e } \ f(x) \neq y, \forall x \in \overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

então

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y);$$

c) Se $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to E$ e $y : [0, 1] \to E$ são aplicações contínuas tais que

$$H(t, x) \neq y(t), \forall t \in [0, 1].$$

Neste trabalho utilizamos os seguintes resultados:

**Teorema D.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $y \in \mathbb{R}^N$. Se $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ são contínuas e satisfazem*

$$f(x) = g(x), \forall x \in \partial(\Omega),$$

*então*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(g, \Omega, y).$$

**Teorema D.2.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$, e $x_0 \in \Omega$ tal que $f^{-1}(\{y\}) = \{x_0\}$. Se $f$ é contínua e diferenciável em $x_0 \in \Omega$ e $f'(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é invertível, então*

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f'(x_0), B_1(0), 0).$$

**Teorema D.3.** *Se $A : \mathbb{R}^N \to$ é uma aplicação linear invertível, então*

$$deg(A, B_1(0), 0) = sgn(det(A)) = (-1)^m,$$

*onde $m$ é a soma das multiplicidades de todos os autovetores negativos de $A$.*